Modelování a simulace

Petr Peringer
peringer AT fit.vutbr.cz
Martin Hrubý
hrubym AT fit.vutbr.cz

Vysoké učení technické v Brně,
Fakulta informačních technologií,
Božetěchova 2/1,
612 00 Brno

(Verze: 12. září 2024)

Úvod

Text je určen pro studenty FIT. Obsahuje základní přehled problematiky modelování a simulace vhodný pro studenty bakalářského studia. Předpokládají se základní znalosti programování (C, C++, ...) a matematiky (relace, derivace, integrály, dif. rovnice).

Obsah slajdů je velmi stručný, podrobnější informace jsou součástí výkladu.

Na slajdech spolupracovali:

- Martin Hrubý – Petriho sítě, náhodné procesy

Pravidla

- Přednášky
- Minimálně 2 demo-cvičení (+doplňky)
- Samostatná práce: projekt
- Konzultace

Hodnocení celkem 100b:

- 10b půlsemestrální test
- 20b projekt
- Zápočet: alespoň 10 z výše uvedených bodů
- 70b zkouška (požadováno min. 30 bodů)

Zdroje informací

- Literatura
- WWW odkazy
- Oficiální stránka:
  `https://www.fit.vut.cz/study/course/IMS/`
- Aktuální informace pro studenty:
  `https://www.fit.vut.cz/person/peringer/public/IMS/`
- Vlastní uvažování a (simulační) experimenty
- ...

Literatura

- Fishwick P.: *Simulation Model Design and Execution: Building Digital Worlds*, Prentice-Hall, 1995
- Law A., Kelton D.: *Simulation Modelling & Analysis*, second edition, McGraw-Hill, 1991
- Rábová a kol.: *Modelování a simulace*, skriptum VUT, Brno, 1992
- Ross S.: *Simulation*, 3rd edition, Academic Press, 2002
- (Zeigler B., Muzzy A., Kofman E.: *Theory of Modelling and Simulation*, 3rd edition, Academic Press, 2019)
- ...

Poznámky:
Studijní opora — viz IS
(Poznámka: Informace k zadání Bc práce — témata.)

Modelování systémů na počítačích

Přehled

- Základní pojmy a princip
- Souvislosti a aplikace
- Výhody a nevýhody
- Alternativy
- Úvod do teorie systémů
- Typy simulace
- Velmi stručný přehled simulačních nástrojů

Základní pojmy (systém, model)

Systém =

soubor elementárních částí (prvků systému), které mají mezi sebou určité vazby.

Rozlišujeme (mimo jiné)
- reálné systémy
- nereálné systémy (fiktivní, ještě neexistující)

Model =

napodobenina systému jiným systémem.

- Model = reprezentace znalostí.
- Klasifikace: fyzikální modely, matematické modely, ...
- Přírodní zákony jsou matematické modely
  (Příklad: Ohmův zákon $u = Ri$).

Základní pojmy (modelování, simulace)

Modelování =

vytváření modelů systémů.

- Modelování je velmi používaná metoda
- Modelovat lze jen to, co známe a umíme popsat

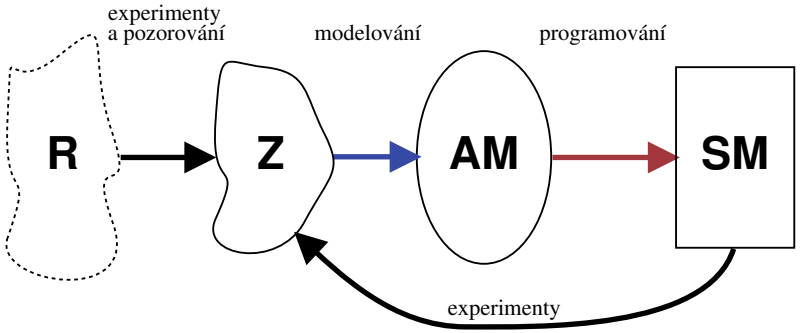
Simulace =

získávání nových znalostí o systému experimentováním s jeho modelem.

- Budeme se zabývat pouze simulací na číslicových počítačích.

Princip modelování a simulace

Realita → Znalosti → Abstraktní model → Simulační model



Cílem je získat nové znalosti o modelovaném systému.

Základní etapy modelování a simulace

1. *Vytvoření abstraktního modelu*: Formování zjednodušeného popisu zkoumaného systému.
2. *Vytvoření simulačního modelu*: Zápis abstraktního modelu formou programu.
3. *Verifikace a validace*: Ověřování správnosti modelu.
4. *Simulace*: Experimentování se *simulačním* modelem.
5. *Analýza a interpretace výsledků*: Získání nových znalostí o zkoumaném systému.

Souvislosti

- pozorování a reálné experimenty
- *Computational Science*
- učení, hry — ”co se stane když”
- programování (simulační model je program)
- algoritmy, datové struktury
- numerická matematika (integrační metody, ...)
- počítačová grafika (vizualizace výsledků)
- technické vybavení: superpočítače, ...
- teorie systémů (stabilita, citlivost, chaos, ...)
- pravděpodobnost a statistika
- + obory související s modelovaným systémem

Příklady použití simulace v praxi

- **Věda:** biologie, lékařství, ekologie, chemie, jaderná fyzika, astronomie, sociologie, ...
  (Např. předpověď počasí, zemětřesení, šíření epidemií, ...)
- **Technika:** strojírenství, stavebnictví, doprava, elektro, ...
  (Dynamika konstrukcí, simulace mikroprocesorů, optimalizace motoru, ...)
- **Ekonomika** (Vývoj cen na burze, ...)
- **Výuka** (Různé demonstrační modely)
- **Film** (Vizuální efekty všeho druhu)
- **Hry** (Simulátor letadla, ...)
- ...

Výhody simulačních metod

- Cena (např. ”crash” testy automobilů)
- Rychlost (růst rostlin, vznik krystalů, pohyb planet)
- Bezpečnost (jaderné reakce, šíření epidemií)
- ...
- Někdy jediný způsob (srážky galaxií)
- Možnost modelovat velmi složité systémy (mikroprocesory, různé biologické systémy, počasí)

Velmi často je výhodnější experimentovat s modely, než s originálními systémy.

Problémy simulačních metod

- Problém validity (platnosti) modelu.
- Někdy velmi vysoká náročnost vytváření modelů.
- Náročnost na výkon počítačů.
- Získáváme konkrétní numerické výsledky (například změna parametru vyžaduje celou simulaci opakovat).
- Nepřesnost numerického řešení.
- Problém stability numerických metod.

Alternativní přístup

Analytické řešení modelů

- Popis chování systému matematickými vztahy a jeho *matematické řešení*.
- Vhodné pro jednoduché systémy nebo zjednodušené popisy složitých systémů.
- Výsledky jsou ve formě funkčních vztahů, ve kterých se jako proměnné vyskytují parametry modelu.
- Dosazením konkrétních hodnot získáme řešení.

Shrnutí: Hlavní předností analytického řešení je přesnost a menší časová náročnost výpočtu řešení matematického modelu. Řešit ale umíme jen modely jednoduché nebo podstatně zjednodušené.

Příklad: Model volného pádu ve vakuu

Kdy použít simulační metody

Simulaci je vhodné použít když:

- neexistuje *úplná* matematická formulace problému nebo nejsou známé analytické metody řešení matematického modelu;
- analytické metody vyžadují tak zjednodušující předpoklady, že je nelze pro daný model přijmout;
- analytické metody jsou dostupné pouze teoreticky, jejich použití by bylo obtížné a simulační řešení je jednodušší;
- modelování na počítači je jedinou možností získání výsledků v důsledku obtížnosti provádění experimentů ve skutečném prostředí;
- potřebujeme měnit časové měřítko (simulace např. umožní vypočítat řešení rychleji než by proběhl příslušný děj v reálném systému).

Úvod do teorie systémů

(Systems Theory, Systems Science)

Přehled:

- Definice základních pojmů:
  - Systém
  - Prvek systému
  - Časová množina
  - Chování systému
  - Okolí systému
- Homomorfní a izomorfní systémy
- Klasifikace prvků systému a systémů

Formální definice systému

Systém S je dvojice

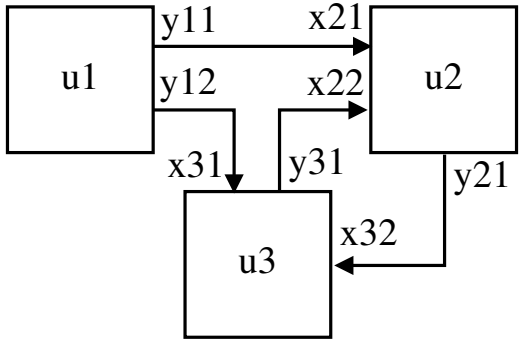
$$S = (U, R)$$

kde:

- Univerzum U je konečná množina prvků systému:
  $U = \{u_1, u_2, ..., u_N\}$
- Prvek systému: $u = (X, Y)$ kde
  - X je množina všech vstupních proměnných
  - Y je množina všech výstupních proměnných
- Charakteristika systému R je množina všech propojení:
  $R = \bigcup_{i,j=1}^{N} R_{ij}$
- Propojení prvku u_i s prvkem u_j: $R_{ij} \subseteq Y_i \times X_j$

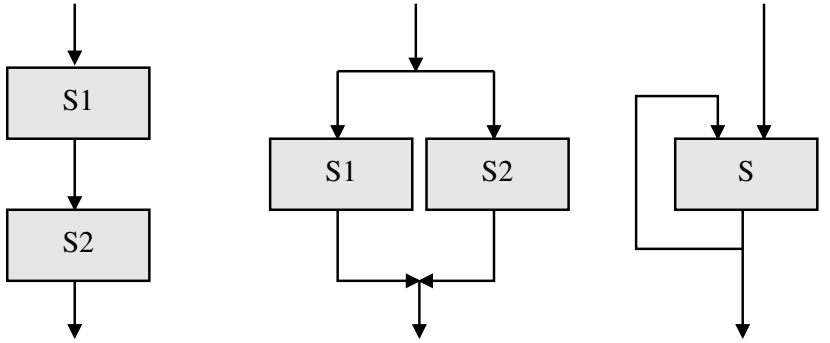
Příklad definice jednoduchého systému

$U = \{u_1, u_2, u_3\}$
$R = \{(y_{11}, x_{21}), (y_{12}, x_{31}), (y_{31}, x_{22}), (y_{21}, x_{32})\}$



Vazby mezi prvky systému

sériová, paralelní, zpětná vazba



Čas

Budeme rozlišovat tři základní pojmy:

Reálný čas ve kterém probíhá skutečný děj v reálném systému (viz fyzikální definice času).

Modelový čas je "časová osa" modelu (modeluje reálný čas ze vzorového systému — např. proměnná t v diferenciální rovnici $y'' = -g$). Při simulaci nemusí být synchronní s reálným časem.

Strojový čas je čas CPU spotřebovaný na výpočet programu (závisí na složitosti simulačního modelu, počtu procesorů a nesouvisí přímo s modelovým časem).

Poznámka: Příkaz `time` (POSIX)

Časová množina

(Time base)

T je množina všech časových okamžiků, ve kterých jsou definovány hodnoty vstupních, stavových a výstupních proměnných prvku systému.

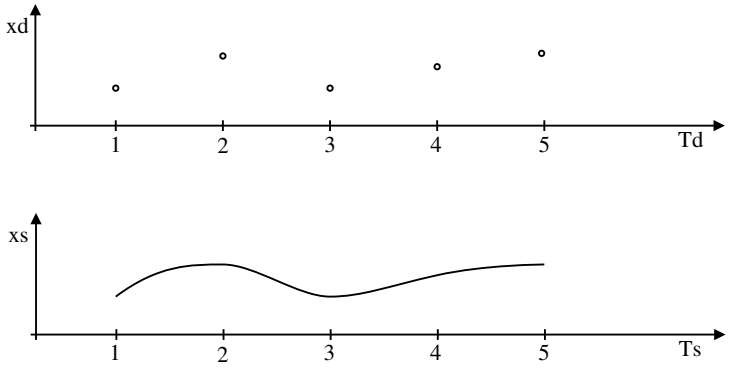
Příklady časových množin

- diskrétní: $T_d = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- spojitá: $T_s = \langle 1.0, 5.0 \rangle$ $T_s \subset \mathbf{R}$

Poznámka:
Na číslicovém počítači se spojitá časová množina vždy diskretizuje.

Časová množina — příklady

Signály s diskrétní (T_d) a spojitou (T_s) časovou množinou:



Chování systému

- Každému časovému průběhu vstupních proměnných přiřazuje časový průběh výstupních proměnných.
- Je dáno vzájemnými interakcemi mezi prvky systému.

Chování systému S můžeme definovat jako zobrazení χ:

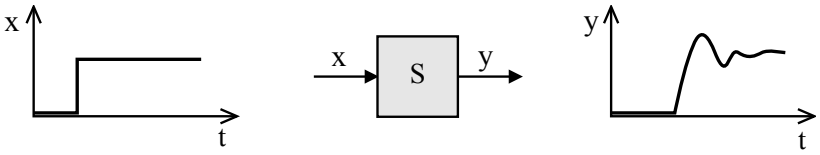
$$\chi : \ [\sigma_i(S)]^T \rightarrow [\sigma_o(S)]^T$$

kde:

- $[A]^T$ je množina všech zobrazení T do množiny A,
- $\sigma_i(S)$ je vstupním prostorem systému S,
- $\sigma_o(S)$ je výstupním prostorem systému S.

Chování systému — příklad

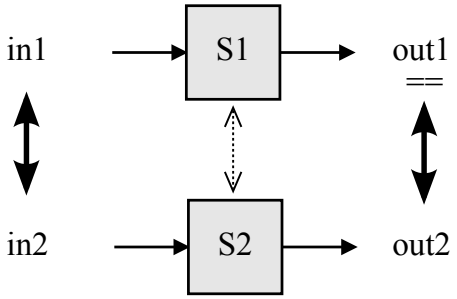
- Spojitý systém S, odezva na jednotkový skok:



Ekvivalence chování systémů

Systémy S_1 a S_2 považujeme za systémy se stejným chováním, vyvolají-li stejné podněty u obou systémů stejné reakce.

Stejnými podněty/reakcemi rozumíme ty dvojice podnětů/reakcí, které jsou spolu vzájemně přiřazeny definovaným vstupním/výstupním zobrazením.



Izomorfní systémy

Systémy $S_1 = (U_1, R_1)$ a $S_2 = (U_2, R_2)$ jsou izomorfní, když a jen když:

1. Prvky univerza U_1 lze vzájemně jednoznačně (1:1) přiřadit prvkům univerza U_2.
2. Prvky charakteristiky R_1 lze vzájemně jednoznačně přiřadit prvkům charakteristiky R_2, a to tak, že prvku charakteristiky R_1, vyjadřujícímu orientovaný vztah mezi dvěma prvky univerza U_1, je vždy přiřazen právě ten prvek charakteristiky R_2, který vyjadřuje stejně orientovaný vztah mezi odpovídající dvojicí prvků univerza U_2 a naopak.

Poznámka: Zjednodušeno (nezahrnuje chování).

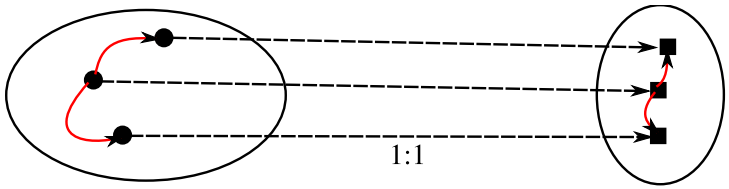
Homomorfní systémy

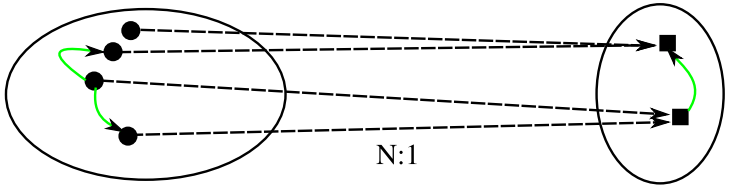
Systém $S_1 = (U_1, R_1)$ je homomorfní se systémem $S_2 = (U_2, R_2)$ právě když:

1. Prvkům univerza U_1 je možno přiřadit jednoznačně prvky univerza U_2 (opačně tomu tak být nemusí, N:1).
2. Prvkům charakteristiky R_1 je možno jednoznačně přiřadit prvky charakteristiky R_2, a to tak, že prvku charakteristiky R_1 vyjadřujícímu orientovaný vztah mezi dvěma prvky univerza U_1 je vždy přiřazen právě ten prvek charakteristiky R_2, který vyjadřuje stejně orientovaný vztah mezi odpovídající dvojicí prvků univerza U_2 ve smyslu bodu 1.

Poznámka: Vytváření homomorfních systémů je základním principem modelování.

Jednoduché příklady izomorfismu a homomorfismu





Okolí systému

Podstatné okolí systému zahrnuje vše co má vliv na chování systému a není jeho součástí.

- Uzavřený systém — nekomunikuje s okolím (často jen zanedbáváme vliv okolí)
- Otevřený systém — komunikuje s okolím (typicky má definován vstup i výstup)

Klasifikace prvků systémů

Klasifikace 1:

- Prvky se spojitým chováním
- Prvky s diskrétním chováním

Klasifikace 2:

- Prvky s deterministickým chováním
- Prvky s nedeterministickým chováním

Příklady:
Šumová dioda = spojitý prvek, stochastické chování
Rezistor = spojitý prvek, deterministické chování
FIFO Fronta = diskrétní prvek, deterministické chování

Klasifikace systémů

Typ systému závisí na typu jeho prvků.

Systémy:

spojité: *všechny* prvky mají spojité chování
diskrétní: *všechny* prvky mají diskrétní chování
kombinované: obsahuje spojité i diskrétní prvky

Systémy:

deterministické: všechny prvky deterministické
nedeterministické: obsahuje alespoň jeden prvek s nedeterministickým chováním

Simulace

= experimentování s reprezentací simulačního modelu.

Cíl simulace:

získání nových informací o chování systému v závislosti na vstupních veličinách a na hodnotách parametrů.

Postup:

opakované řešení modelu (provádění simulačních běhů),

1. nastavení hodnot parametrů a počátečního stavu modelu,
2. zadávání vstupních podnětů z okolí při simulaci,
3. vyhodnocení výstupních dat (informací o chování systému)

Simulační běhy opakujeme tak dlouho, dokud nezískáme dostatek informací o chování systému nebo pokud nenalezneme takové hodnoty parametrů, pro které má systém žádané chování.

Typy simulace

Podle použitého popisu modelu:

- Spojitá / diskrétní / kombinovaná
- Kvalitativní / kvantitativní
- ...

Podle simulátoru:

- Na analogovém / číslicovém počítači, fyzikální
- ”Real-Time” simulace
- Paralelní a distribuovaná simulace

Další možnosti:

- Vnořená simulace (simulace v simulaci)
- *”Reality in the loop”*
- Interaktivní simulace, virtuální realita

Zpracování výsledků simulace

Postup:

- Záznam průběhu simulace
- Vizualizace výsledků, animace

Analýza získaných výsledků:

- Intuitivní vyhodnocení, heuristiky, ...
- Statistické zpracování
- Automatické vyhodnocení (např. pro optimalizaci)
- Porovnávání s naměřenými daty
- ...

Verifikace modelu

Verifikací ověřujeme korespondenci *abstraktního* a *simulačního* modelu, tj. izomorfní vztah mezi AM a SM.

- Předchází vlastní etapě simulace.
- Analogicky s programy v běžných programovacích jazycích představuje verifikace simulačního modelu jeho ladění.

Poznámka:
Abstraktní model je formální specifikací pro program (simulační model).

Validace modelu

Ověřování validity (platnosti) simulačního modelu je proces, v němž se snažíme dokázat, že skutečně pracujeme s modelem adekvátním modelovanému systému.

- Jeden z nejobtížnějších problémů modelování.
- Vyžaduje neustálou konfrontaci informací, které o modelovaném systému máme a které simulací získáváme.
- Nelze absolutně dokázat přesnost modelu.
  (Validitu modelu chápeme jako míru použitelnosti/správnosti získaných výsledků.)
- Pokud chování modelu neodpovídá předpokládanému chování originálu, musíme model modifikovat.

Simulační nástroje

Simulační systémy usnadňují vytváření modelů, provádění experimentů a analýzu výsledků.

Tyto nástroje jsou použitelné pro:

- práci s abstraktními modely (báze znalostí, ...),
- programování simulačních modelů (simulační jazyky a knihovny modelů),
- experimentování se simulačními modely (simulátory),
- vizualizaci a vyhodnocování výsledků.

Poznámka: V rámci předmětu IMS použijeme SIMLIB/C++, systémy Dymola/OpenModelica a případně SciLab/Octave/Matlab - viz odkazy na WWW IMS

Shrnutí úvodní části

- Metoda simulace
- Použití simulace v různých oborech
- Výhody a problémy
- Základní teoretické souvislosti
- Problém verifikace a validace modelů
- Stručná charakteristika simulačních nástrojů

Modely a modelování

Přehled:

- Modelování – proces vytváření modelů
  - abstraktní model
  - simulační model
- Klasifikace modelů
- Popis modelů
- Příklady jednoduchých modelů

Příklady abstraktních modelů

Způsoby matematického popisu modelů:

- Konečný automat
- Petriho síť
- Turingův stroj
- Algebraické rovnice
- Diferenciální rovnice (obyč. i parciální)
- Diferenční rovnice
- Markovské procesy
- ...

Poznámka: Klasifikace abstraktních modelů

Vytvoření abstraktního modelu I

Formulace zjednodušeného popisu systému abstrahujícího od všech nedůležitých skutečností vzhledem k *cíli a účelu* modelu.

- Nedovedeme postihnout reálný svět v celé komplikovanosti
- Zajímáme se jen o ohraničené části
- Identifikace vhodných složek systému
- Systém nemusí být definován pouze na reálném objektu — potom vycházíme ze znalostí analogických systémů.

Z hlediska teorie systémů předpokládáme mezi modelovaným systémem a abstraktním modelem *homomorfní* vztah.

Vytvoření abstraktního modelu II

Specifické cíle a účely modelů:

- *Studium chování systému* pro určitá specifická kritéria, zkoumání povahy závislostí mezi parametry a odezvou systému.
- *Predikce* — vyhodnocení chování systému za určitých podmínek.
- *Analýza citlivosti* — určení faktorů (parametrů), které jsou pro činnost systému nejvýznamnější.
- *Optimalizace* — nalezení takové kombinace parametrů, která vede k nejlepší odezvě systému.

Vymezení účelu modelu má významný dopad na celý proces budování abstraktního modelu i na vlastní experimentování se simulačním modelem.

Vytvoření simulačního modelu

simulační model = abstraktní model zapsaný formou programu

Vztahy mezi modely

homomorfní vztah: *modelovaný systém — abstraktní model*
izomorfní vztah: *abstraktní model — simulační model*

Poznámky:

- Izomorfní vztah představuje silnější vztah ekvivalence mezi abstraktními systémy — shodnost struktur a chování prvků uvažovaných systémů.
- Konkrétní implementace simulačního modelu závisí na typu modelu a na použitém simulačním nástroji.

Klasifikace modelů 1

Tradiční rozdělení:

- spojité modely
- diskrétní modely
- kombinované modely

Poznámka:
Odpovídající varianty DEVS formalismu: DEVS, DESS, DEVS&DESS

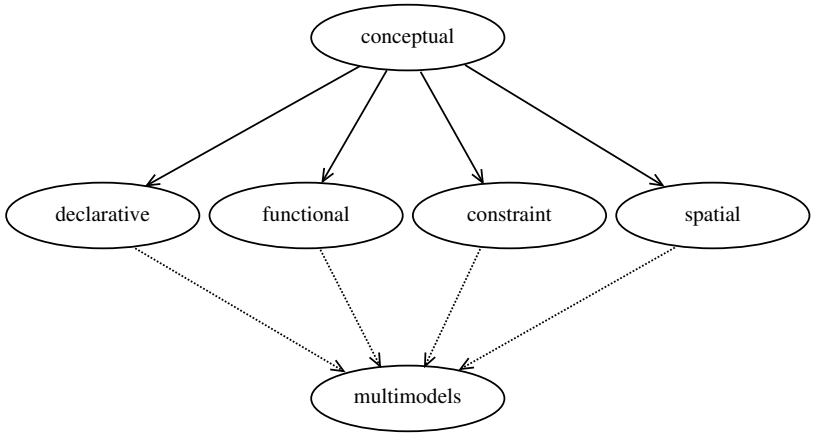
Klasifikace modelů 2

Klasifikace podle [Fishwick]:

- Konceptuální modely
- Deklarativní modely
- Funkcionální modely
- Modely popsané rovnicemi (*constraint*)
- Prostorové (*spatial*) modely
- Multimodely

Poznámka: Multimodel je složen z modelů různého typu.

Klasifikace modelů 2 — obrázek



Konceptuální modely

- Modely, jejichž komponenty (prozatím) nebyly přesně popsány ve smyslu teorie systémů.
- Obvykle se používají v počáteční fázi modelování pro ujasnění souvislostí a komunikaci v týmu.
- Mají formu textu nebo obrázků.

Deklarativní modely

- Popis přechodů mezi stavy systému.
- Model je definován *stavy* a *událostmi*, které způsobí přechod z jednoho stavu do druhého za jistých podmínek.
- Vhodné především pro diskrétní modely.
- Obvykle zapouzdřeny do objektů (hierarchická struktura).

Příklady:

- Konečné automaty (deterministické i nedeterministické, Markovovy modely)
- Petriho sítě
- Událostmi řízené systémy s kalendářem

Funkcionální modely

- Grafy zobrazující *funkce* a *proměnné*.
- Jsou možné 2 modifikace: uzel grafu je funkce nebo proměnná

Příklady:

- Systémy hromadné obsluhy se zařízeními a frontami (*"Queuing systems"*)
- Bloková schemata (spojitá simulace, ...)
- Kompartmentové systémy
- Grafy signálových toků
- Systémová dynamika

Modely popsané rovnicemi (constraint)

- Rovnice (algebraické, diferenciální, diferenční)
- Neorientované grafy (elektrická schemata, *"Bond-graphs"*)

Příklady:

- Diferenciální rovnice systému dravec-kořist:

$$\frac{dx_k}{dt} = k_1 x_k - k_2 x_k x_d$$
$$\frac{dx_d}{dt} = k_2 x_k x_d - k_3 x_d$$

- Balistika, kyvadlo, RC článek, ...
- Chaos (například *"Lorenz equation"*)
- Logistická rovnice $x \leftarrow ax(1-x)$

Prostorové (spatial) modely

Rozdělují systém na prostorově menší ohraničené podsystémy.

Příklady:

- Parciální diferenciální rovnice (difůze, proudění, ...)
- Celulární automaty (hra *"Life"*)
- L-systémy
- *N-body problem*: mechanické modely těles + kolize

Multimodely

Modely složené z různých typů modelů, které jsou obvykle heterogenní (popsané různým způsobem).

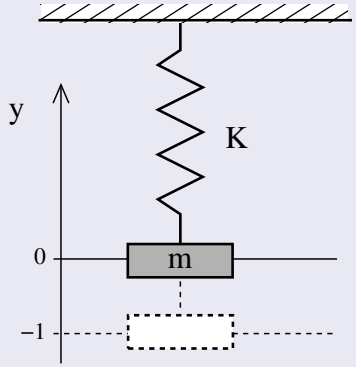
Příklady:

- Kombinované modely (např. spojité + diskrétní)
- Modely s neurčitostí (např. spojité + fuzzy)
- Modely na různé úrovni abstrakce (kvalitativní + kvantitativní)
- Spojování modelů (FMI, *"co-simulation"*, HLA, ...)
- ...

Poznámka:
Většina netriviálních modelů spadá do této kategorie.

Příklad1: Závaží na pružině (spojitý)

Obrázek = konceptuální model



Příklad1 — pokračování

Diferenciální rovnice = abstraktní model (constraint)

$$y'' = -g - \frac{K}{m} y$$

Počáteční podmínky

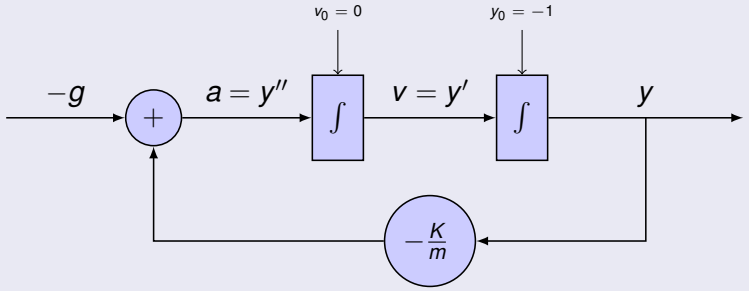
$$\begin{aligned} y(0) &= -1 \\ y'(0) &= 0 \end{aligned}$$

Poznámky:

- Počáteční podmínky jsou nutné pro jednoznačnost řešení
- Pozor na shodné jednotky (např. délka: metry / stopy ?)

Příklad1 — pokračování

Blokové schema = abstraktní model (funkcionální)



Příklad1 — pokračování

program = simulační model

```
// popis modelu v SIMLIB/C++
struct Model {
    Integrator v, y;
    Model(double m, double K, double y0) :
        v(-g - K/m * y, 0),
        y(v, y0)  {}
};

Model s(1, 1e3, -1);   // instance modelu s parametry

// vynechán popis simulačního experimentu
```

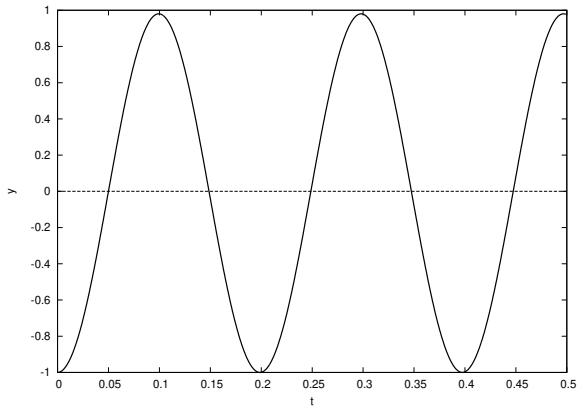

Příklad1 — pokračování

Výsledky simulace: tabulka (pozor na přesnost tisku)

```
# čas   y       v
 0.000 -1       0
 0.001 -0.9995 0.99
 0.002 -0.998  1.979
 0.003 -0.9955 2.966
 0.004 -0.9921 3.95
 0.005 -0.9876 4.93
 0.006 -0.9822 5.906
 0.007 -0.9758 6.875
 0.008 -0.9685 7.837
 0.009 -0.9602 8.792
 0.010 -0.9509 9.738
 ...
```

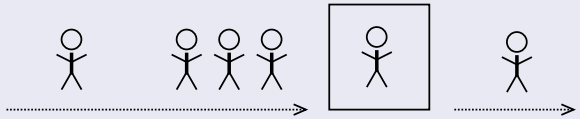

Příklad1 — pokračování

Výsledky simulace: graf (vytvořen programem Gnuplot)



Příklad2: Zákazníci v obchodě (diskrétní)

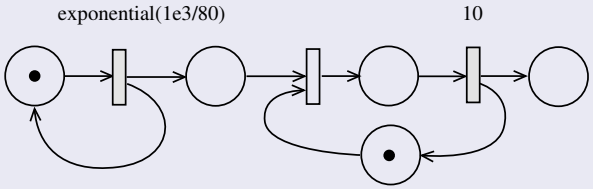
Obrázek = konceptuální model



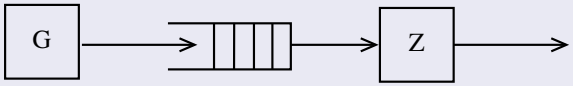
- Zákazníci přicházejí s určitým rozložením pravděpodobnosti,
- jsou obsluhováni zařízením po určitou dobu,
- vytváří se fronta zákazníků.

Příklad2 — pokračování

Petriho síť = abstraktní model (deklarativní)



Blokové schema = abstraktní model (funkcionální)



Příklad2 — pokračování

program = simulační model:

```
Facility  Linka("Linka");
class Zakaznik : public Process { // třída zákazníků
  void Behavior() {               // --- popis chování
    Seize(Linka);                 // obsazení zařízení
    Wait(10);                     // obsluha
    Release(Linka);               // uvolnění zařízení
  }
};
class Generator : public Event {  // generátor zák.
  void Behavior() {               // --- popis chování
    (new Zakaznik)->Activate();   // nový zákazník
    Activate(Time+Exponential(1e3/80)); // interval
  }
}; // ... vynechán popis experimentu a sběr statistik
```

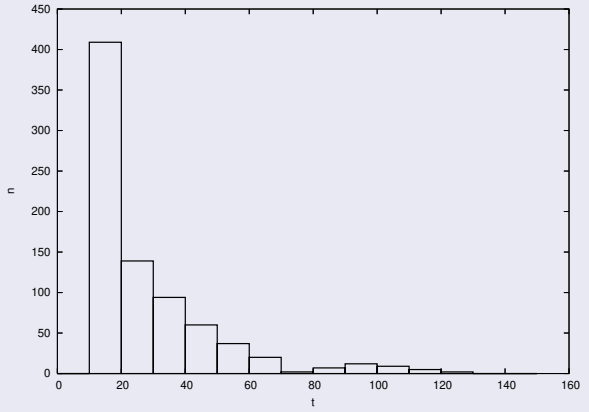

Příklad2 — pokračování

Výsledky simulace: statistiky

```
FACILITY Linka
 Time interval = 0 - 10000
 Number of requests = 797
 Average utilization = 0.796405

Input queue 'Linka.Q1'
 Maximal length = 12
 Average length = 1.37766
 Minimal time = 0.00798347
 Maximal time = 112.171
 Average time = 22.1489
 Standard deviation = 31.087
```


Příklad2 — pokračování

Výsledky simulace: histogram – čas strávený v systému



Shrnutí

- Modely různých typů a úrovní abstrakce
- Jsou možné různé popisy stejného systému
- Často nutné kombinovat = multimodely
- Je výhodné použít objekty (OOP)
- Použití hotových modelů jako komponent
- ...

Vše se odrazí v implementaci nástrojů pro simulaci.

Simulační nástroje — přehled

Možnosti:

- použití obecných jazyků (C, C++, Java, Python, ...)
- simulační knihovny pro obecné jazyky (SIMLIB/C++, SimPy, ...)
- simulační jazyky (Simula67, Modelica, ACSL, ...)
- simulační systémy (OpenModelica, Dymola, ANSYS, PowerDEVS, ...)
- propojování různých nástrojů (HLA, FMI, ...)

Poznámky:
HLA = *High Level Architecture*, standard pro distribuovanou simulaci
FMI = *Functional Mockup Interface*

Simulační jazyky

= speciální programovací jazyky

Poskytují prostředky usnadňující efektivní popis:

- struktury modelů (propojení komponent)
- chování modelů (rovnice, algoritmy)
- simulačních experimentů

Výhody:

- jednodušší popis modelu (snadnější verifikace)
- možnost automatické kontroly popisu modelu

Nevýhody:

- další jazyk = překladač, výuka, údržba
- relativně málo používáno = problémy (cena, chyby)

Typy simulačních jazyků

Klasifikace podle typu modelů:

- diskrétní
- spojité
- kombinované
- ...

Příklady:

- Simula67,
- Simscript,
- ACSL (Advanced Continuous Simulation Language),
- Modelica,
- ...

Dostupné simulační nástroje

V rámci výuky budeme používat:

- SIMLIB/C++: OO knihovna pro C++ (LGPL)
- DYMOLA/Modelica: komerční program
  OpenModelica: volně dostupné
- (Octave nebo SciLab: integrované prostředí, jazyk pro numerické výpočty, knihovny, různé specializované nadstavby – ”toolkity”)

Podpůrné nástroje:

- Vizualizace: Gnuplot
- Statistika: GNU R, ”diehard” testy
- ...

Přehled některých dalších programů

- Matlab/Simulink
- Sage
- GNU Octave (a OctaveForge)
- Simula67 (cim)
- SciPy, NumPy — Python
- SPICE — elektrické obvody
- GSL = *GNU Scientific Library* — knihovna, ISO C
- ... (další viz WWW)

Shrnutí

- Nástrojů pro podporu modelování a simulace existuje velmi mnoho.
- Některé nástroje vyžadují speciální vybavení (superpočítače).
- Většina nástrojů je zaměřena na konkrétní problém/oblast.
- Podrobnější informace o používaných nástrojích budou uvedeny později.

Reklama: Předmět *Simulační nástroje a techniky* v magisterském studiu bude zahrnovat podrobnosti o efektivní implementaci simulačních systémů a pokročilých metodách modelování a simulace.

Modelování náhodných procesů

Obsah:

- Pravděpodobnost, náhodné proměnné, ...
- Rozložení náhodných čísel
- Generování pseudonáhodných čísel
- Transformace rozložení pseudonáhodných čísel
- Testování pseudonáhodných čísel
- Metoda *Monte Carlo*

Poznámka:
Předpokládáme základní znalosti z teorie pravděpodobnosti.

Pravděpodobnost a statistika

- Co je náhodnost? (nedeterminismus, pseudonáhodnost)
- Některé části reality neumíme popsat jinak ⇒ používáme náhodné jevy/procesy
- Každý proces má jiný charakter (a odpovídající rozložení)
- Jde o jeden ze způsobů popisu neurčitosti
- Příklady: příchody zákazníků, doba obsluhy, ...
- Postup:
  1. Změříme vzorek procesu v realitě (získáme soubor dat),
  2. ten aproximujeme analytickým vyjádřením (typicky pomocí existujícího rozložení),
  3. a nakonec náhodný proces modelujeme generátorem pseudonáhodných čísel (s odpovídajícím rozložením a parametry).

Terminologie (opakování)

- Jev
- Pravděpodobnost jevu
- Náhodná proměnná
- Rozložení pravděpodobnosti
- Distribuční funkce (*CDF*),
- Funkce hustoty pravděpodobnosti (*PDF*)
- Střední hodnota (*Mean*)
- Rozptyl (*Variance*)
- Zákon velkých čísel
- Centrální limitní věta
- ...

Náhodné proměnné

Náhodná proměnná je taková veličina, která jako výsledek pokusů může nabýt nějakou hodnotu, přičemž předem nevíme jakou konkrétně.

Náhodné proměnné rozdělujeme na:

diskrétní: nabývají jen konečně nebo spočetně mnoha různých hodnot
(Příklad: co padne při hodu kostkou)

spojité: hodnoty spojitě vyplňují určitý interval
(Příklad: čas mezi příchody zákazníků)

Poznámka:
Náhodné proměnné označujeme velkými písmeny, např. X, a jejich možné hodnoty odpovídajícími malými písmeny, např. x_1, x_2.

Náhodné proměnné – pokračování

Náhodné veličiny můžeme zadat:

- distribuční funkcí
- rozdělením pravděpodobnosti (např. funkce hustoty)

Existuje celá řada různých používaných rozložení, viz literatura. Například:

McLaughlin M.: *A Compendium of Common Probability Distributions*, 2016

`https://www.causascientia.org/math_stat/Dists/Compendium.pdf`

Diskrétní rozdělení pravděpodobnosti

určuje vztah mezi možnými hodnotami náhodné veličiny x_i a jim příslušejícími pravděpodobnostmi $p_i = P(X = x_i)$.

Obecně platí: $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$

Lze definovat například tabulkou pravděpodobností pro všechny možné hodnoty náhodné proměnné:

x_i	x_1	x_2	...	x_N
p_i	p_1	p_2	...	p_N

Musí platit: $\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$

kde N je počet možných hodnot

Diskrétní distribuční funkce

Distribuční funkce náhodné veličiny X je funkce

$$F(x) = P(X \leq x)$$

kde $P(X \leq x)$ je pravděpodobnost toho, že náhodná veličina X nabude hodnoty menší nebo rovnu zvolenému reálnému číslu x.

Platí: $F(x) = \sum_{x_i \leq x} p_i$

Příklad: Hod kostkou

x_i	1	2	3	4	5	6
$F(x_i)$	1/6	2/6	3/6	4/6	5/6	1

Poznámka: Graf distribuční funkce diskrétní náhodné proměnné je po částech konstantní.

Spojité náhodné proměnné

- Distribuční funkce: $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$
- Funkce hustoty pravděpodobnosti: $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$

Distribuční funkce $F(x)$ má tyto základní vlastnosti:

- $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$
- $F(x_1) \leq F(x_2)$ pro $x_1 < x_2$ (je neklesající)
- $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$

Spojité náhodné proměnné

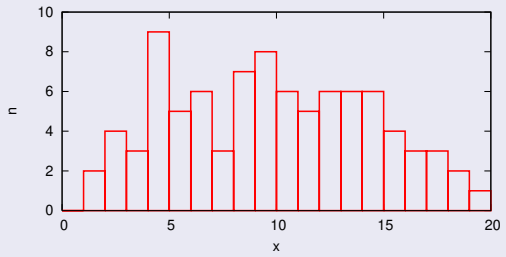
Hustota pravděpodobnosti $f(x)$ má tyto základní vlastnosti:

- $f(x) \geq 0$
- $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
- $P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$

Histogram

Mějme soubor N výsledků pokusů.
Histogram H roztřídí soubor do K tříd podle vhodně zvolených intervalů. Hodnota $H(i)$ = počet výsledků v $i-$tém intervalu.

Příklad histogramu pro $K = 20$, $N = 100$



Poznámky: Problém stanovení optimálního počtu intervalů.
(Histogram se blíží funkci hustoty pravděpodobnosti.)

Charakteristiky náhodných proměnných

Charakteristiky polohy: posunutí vzhledem k počátku (střed, modus, medián, kvantily).

Charakteristiky variability: rozsah kolísání hodnot kolem středu (rozptyl a směrodatná odchylka).

Charakteristiky šikmosti: udává nesymetričnost rozložení.

Charakteristiky špičatosti: porovnává variabilitu rozložení ve středu a na okrajích.

Charakteristiky lze stanovit podle tzv. momentů.

Obecné momenty

Je-li X náhodná veličina s frekvenční funkcí p_i resp. hustotou pravděpodobnosti $f(x_i)$, pak

obecný moment k-tého řádu je:

$$m_k(X) = \sum_i x_i^k p_i$$

$$m_k(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx$$

Příklad: Střední hodnota je moment prvního řádu:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

$$E(X) = m_1(X) = \mu$$

Centrální momenty

Je-li X náhodná veličina s p_i resp. $f(x_i)$, pak

centrální moment k-tého řádu je:

$$M_k(X) = \sum_i [x_i - E(X)]^k p_i$$

$$M_k(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(X)]^k f(x) dx$$

Příklad: Rozptyl je centrální moment 2. řádu:

$$D(X) = \sum_i [x_i - E(X)]^2 p_i$$

$$D(X) = M_2(X)$$

Koeficient šikmosti a špičatosti

Šikmost:

$$\beta_1 = \frac{M_3(X)}{\sigma(X)^3}$$

kde $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ je směrodatná odchylka

Špičatost:

$$\beta_2 = \frac{M_4(X)}{\sigma(X)^4}$$

Použití momentů

- Testování náhodných čísel
- Odhady parametrů rozložení
- ...

Poznámka:
Konkrétní parametry konkrétního rozložení se projeví v jeho momentech. Z odhadu lze zpětně vyčíslit parametry.

Některá často používaná rozložení

- Diskrétní:
  - Poissonovo
  - Binomické
  - ...
- Spojitá:
  - rovnoměrné (Uniform)
  - exponenciální (Exponential)
  - normální (Normal, Gauss)
  - Pearsonovo (χ^2)
  - ...

Poissonovo rozložení

Diskrétní rozložení

$$p_i = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}, \quad \lambda > 0, \quad i \in \{0, 1, 2, ...\}$$

$$E(x) = \lambda, \quad D(x) = \lambda, \quad \beta_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}, \quad \beta_2 = \frac{1}{\lambda} + 3$$

Příklady použití:

- Systémy hromadné obsluhy: počet příchodů zákazníků do obchodu za jednotku času.
  Souvisí s exponenciálním rozložením (časový interval mezi příchody — počet příchodů za jednotku času).
- Počet hovorů přes telefonní ústřednu za hodinu.
- Počet alfa částic, které vstoupí za daný časový interval do dané oblasti.
- Počet zmetků ve výrobě za 1 měsíc.

Rovnoměrné (Uniform) rozložení

Obvykle označujeme $R(a, b)$.

$F(x) = 0$ pro $x \leq a$, $\frac{x-a}{b-a}$ pro $a \leq x \leq b$, jinak 1

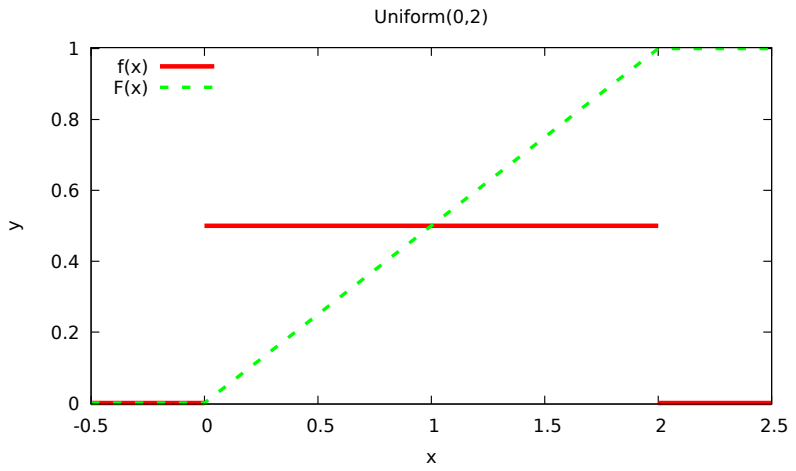
$f(x) = \frac{1}{b-a}$ pro $x \in \langle a, b \rangle$, jinak 0

V normované formě $R(0, 1)$ je základem pro generování dalších rozložení.

Charakteristiky:

- Střední hodnota: $E(X) = \frac{a+b}{2}$
- Rozptyl: $D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

Příklad: Rovnoměrné rozložení



Exponenciální rozložení

$f(x) = \frac{1}{A} e^{-\frac{1}{A}(x-x_0)}$ pro $x \geq x_0$, jinak 0

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{1}{A}(x-x_0)} & x \geq x_0 \\ 0 & x < x_0 \end{cases}$$

kde A a x_0 jsou parametry.

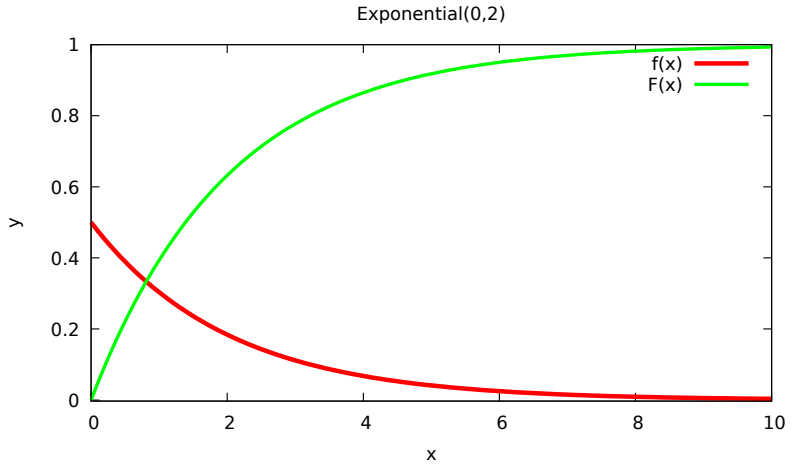
Často se používá normované rozložení s $x_0 = 0$.

- Střední hodnota: $E(X) = x_0 + A$
- Rozptyl: $D(X) = A^2$

Poznámka:
V literatuře se často používá jako parametr $\lambda = \frac{1}{A}$ (”rate”).

Použití: rozložení dob obsluhy, časové intervaly mezi poruchami nebo mezi příchody požadavků.

Příklad: Exponenciální rozložení



Normální (Gaussovo) rozložení

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Parametry:

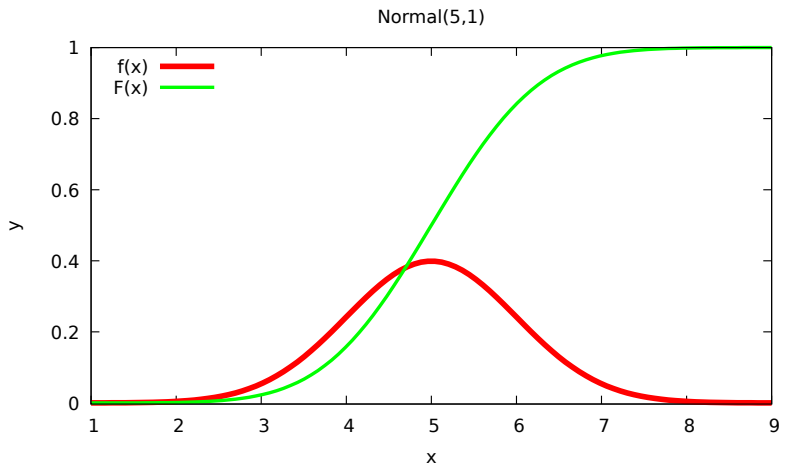
- Střední hodnota: μ
- Rozptyl: σ^2 (směrodatná odchylka: σ)

Pravidlo tří sigma:

$$P(X \in \langle \mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma \rangle) \geq 0.99$$

Použití: Odpovídá jevům s vlivem většího počtu nezávislých faktorů.

Příklad: Normální rozložení



Pearsonovo rozložení χ^2_k

Založeno na normálním rozložení s parametry $\mu = 0, \sigma = 1$.

$$\chi^2_k = \sum_{i=1}^{k} X_i^2, \quad X \text{ je z } \quad N(0,1)$$

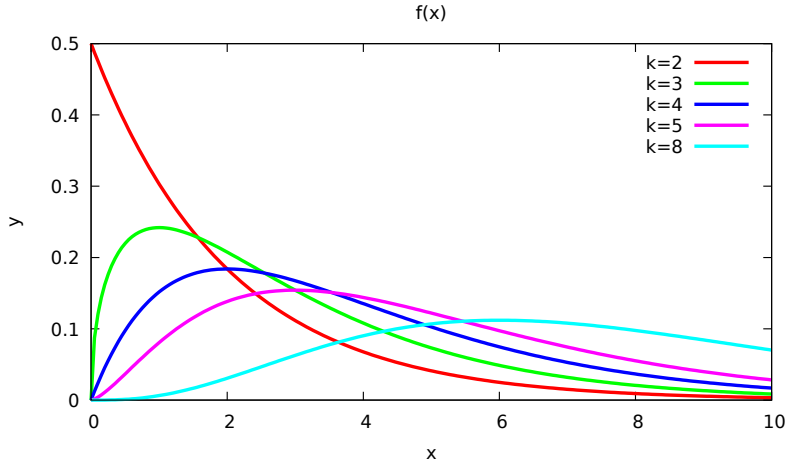
k - počet stupňů volnosti (nemělo by přesáhnout 50, protože pak výsledek konverguje k 1).

$$f(x) = (x)^{\frac{k}{2}-1} \ \exp(-\frac{x}{2}) \ 2^{-\frac{k}{2}} \ \frac{1}{\Gamma(\frac{k}{2})}$$

Charakteristiky: $E(\chi^2_k) = k, \quad D(\chi^2_k) = 2k$

Použití: Testování statistických hypotéz.

Příklady: Pearsonovo rozložení χ^2_k



Generování pseudonáhodných čísel

- základem je kvalitní generátor rovnoměrného rozložení
- transformací (rovnoměrného rozložení) získáme soubor čísel jiného rozložení

Problém:

Náhodná $\times$ Pseudonáhodná čísla

Generátory:

- Fyzikální zdroje náhodnosti: opravdu náhodné (nedeterministické), generují jen málo bitů za sekundu
- Algoritmické generátory: pseudonáhodné (deterministické), generují řádově miliardy bitů za sekundu

Kongruentní generátory

$$x_{n+1} = (ax_n + b) mod\ m$$

kde konstantní parametry a, b a m (multiplikační, aditivní, modul) musí mít vhodné hodnoty

- Generují *rovnoměrné rozložení* $\langle 0, m)$
- Rozsah $\langle 0, m)$ se převádí na normovaný $\langle 0, 1)$
- Generují periodicky se opakující posloupnost čísel. *Perioda generátoru* je maximálně m a závisí na parametrech.
- Dvě po sobě generovaná čísla nejsou statisticky nezávislá.

Příklad: Kongruentní generátor v C

Jednoduchý generátor (32 bitů), rozsah $\langle 0, 1)$

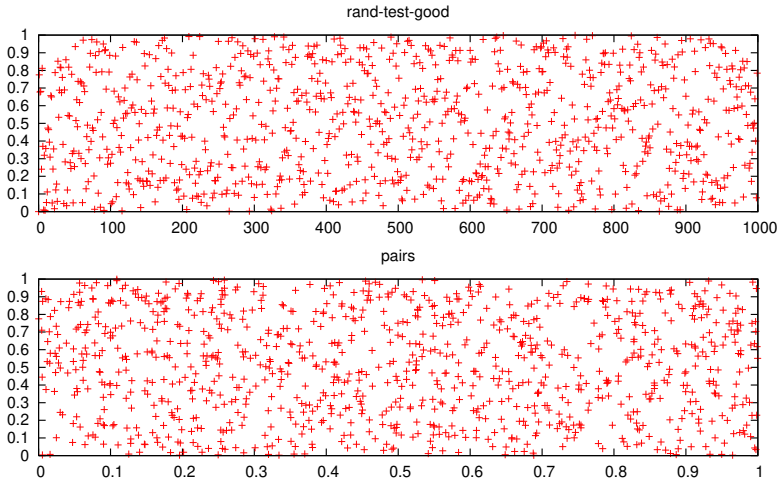
```
static uint32_t ix = SEED; // počáteční hodnota, 32b
double Random(void) {
    ix = ix * 69069u + 1u; // mod 2^32 je implicitní
    return ix / ((double)UINT32_MAX + 1.0);
}
```

Poznámky: Nepříliš kvalitní (závislost dvojic, krátká perioda). Pro generování malých čísel nikdy nepoužívejte operaci modulo (např. `1 + (ix % 6)` pro hody kostkou je nevhodné, vždy použijte `1 + (int)(Random()*6)`).

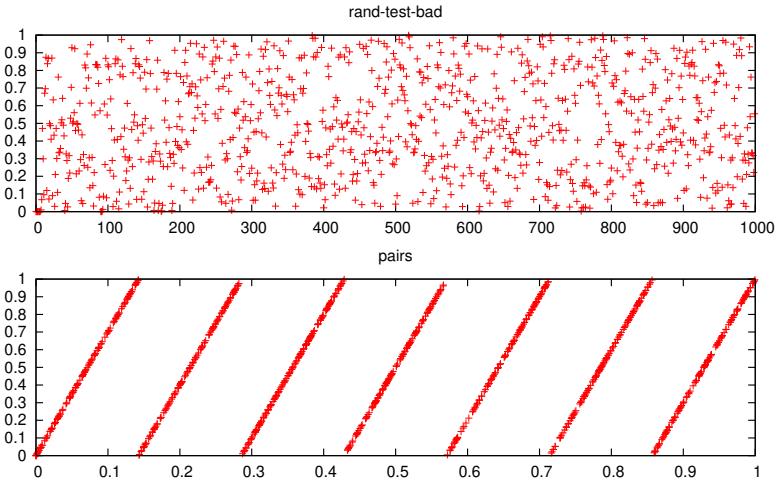
Příklad: Kongruentní generátor v C++

```
class Kongr {
    unsigned ix;        // stav generátoru
public:
    Kongr(unsigned seed = SEED) : ix(seed) {}
    // základní generátor <0,UINT_MAX)
    unsigned next() {
        ix = ix * A + B; // implicitně modulo
        return ix;
    }
    // mapováno na rozsah <0,1)
    double nextDouble() {
        return  next()/(UINT_MAX+1.0);
    }
} generator1;   // použití: generator1.next()
```

Příklad: $a = 69069$, $b = 1$, $m = 2^{32}$



Příklad: $a = 7$, $b = 1$, $m = 2^{32}$ (Nevhodné parametry!)



Další metody generování

- Mersenne twister (perioda $2^{19937} - 1$)
- Xorshift
- různé další varianty LCG (Linear Congruential Generator)
- bitové operace, carry — LFSR (Linear Feedback Shift Register)
- ...

Požadavky na generátory:

- rovnoměrnost rozložení
- statistická nezávislost generované posloupnosti
- co nejdelší perioda
- rychlost

Příklad: Xorshift generátor v C

```
// Zdroj: Marsaglia: "Xorshift RNGs"
// stav musí být inicializován (SEED!=0)
uint64_t xorshift64(uint64_t *state)
{
    uint64_t x = *state;
    x ^= x << 13;
    x ^= x >> 7;
    x ^= x << 17;
    return (*state = x);
}
```

Poznámky: Dovoluje použít více různých stavů, například pro vlákna. Existují varianty pro 32, 64, 128 i více bitů ve stavu.

Transformace na jiná rozložení

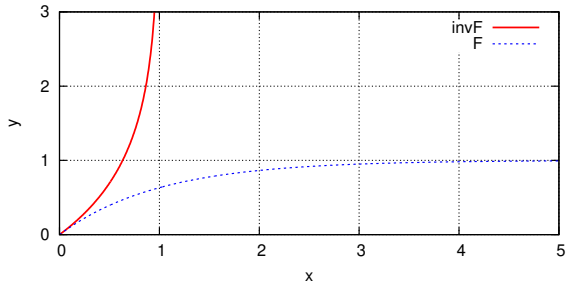
Metody:

- Inverzní transformace — používá inverzní distribuční funkci cílového rozložení. Pro některá rozložení nelze použít (např. když distribuční funkci nelze vyjádřit elementárními funkcemi).
- Vylučovací — sérií pokusů hledáme číslo, které vyhovuje funkci hustoty cílového rozložení. Nevhodná pro neomezená rozložení.
- Kompoziční — složitou funkci hustoty rozložíme na několik jednodušších (intervaly, na každý lze použít jinou metodu).
- Jiná, specificky vytvořená pro dané rozložení.

Metoda inverzní transformace

1. Inverze distribuční funkce: F^{-1}
2. Generování $x = Uniform(0, 1)$
3. Výsledek: $y = F^{-1}(x)$

Příklad: Exponenciální rozložení $F(x) = 1 - e^{-\frac{x-x_0}{A}}$
$y = x_0 - A * \ln(1 - x)$ viz. obrázek pro $x_0 = 0$, $A = 1$

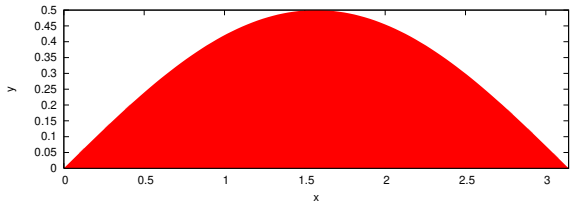


Vylučovací metoda

Náhodnou veličinu ξ s funkcí hustoty $f(x), x \in \langle x_1, x_2), f(x) \in \langle 0, M)$ (kde M je max. hodnota $f(x)$) generujeme takto:

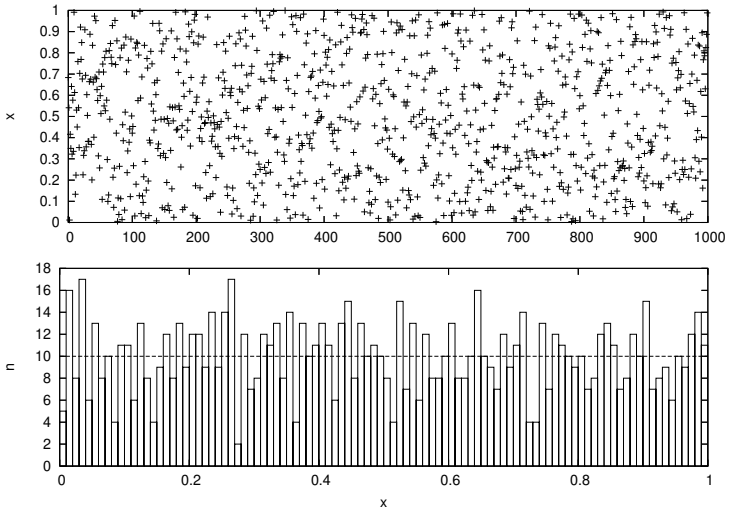
1. $x = Uniform(x_1, x_2)$
2. $y = Uniform(0, M)$
3. je-li $y < f(x)$, pak x prohlásíme za hodnotu náhodné veličiny ξ jinak goto 1

Efektivita generátoru souvisí s poměrem ploch $(x_1, x_2) \times (0, M)$ a $\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$

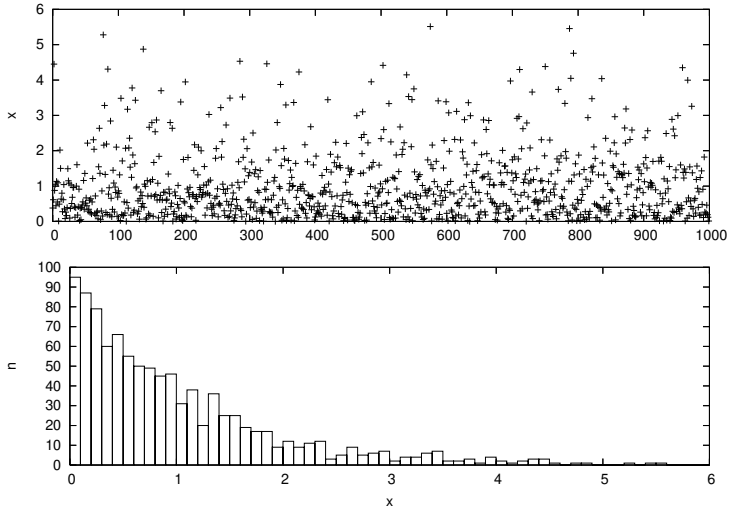


Poznámka: Nehodí se na neomezená rozložení.

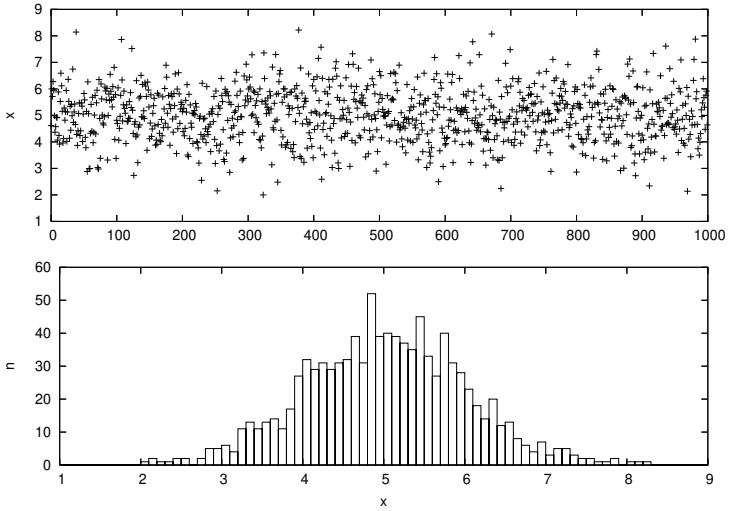
Vzorek čísel z generátoru Uniform(0,1)



Vzorek z generátoru Exponential(0,1)



Vzorek z Normal(5,1)



Testování generátorů náhodných čísel

Máme soubor (pseudo)náhodných čísel a chceme:

- Potvrdit hypotézu jeho příslušnosti k danému rozložení.
- Nalézt jeho rozložení (případně nejvíce podobné).
- Nalézt takové parametry rozložení, aby vzorek odpovídal danému rozložení s těmito parametry.

Existuje mnoho statistických testů a nástrojů pro testování náhodných čísel (např. programy *diehard*, *dieharder*)

Poznámka: náročné, problém interpretace výsledků

Test dobré shody χ^2

Příklad testování generátoru náhodné veličiny:

1. Vygenerujeme soubor n vzorků (např. $n = 10000$).
2. Vypočteme histogram souboru H (pro k-kategorií).
3. Vypočteme teoretický (analytický) histogram rozložení h.
4. Výpočet: $\chi^2_{k-1} = \sum_{j=1}^{k} \frac{(H_j - h_j)^2}{h_j}$,
5. Výsledek testu zhodnotíme na základě tabulky χ^2 :
   - zvolená hladina významnosti p (např. 0.05), x_p je kvantil rozložení pro počet stupňů volnosti $k - 1$
   - je-li $\chi^2_{k-1} > x_p$, pak generátor nevyhovuje

Přesnější popis viz literatura

Další metody testování

- testy rovnoměrnosti rozložení (χ^2)
- rovnoměrnost dvojic/trojic
- rovnoměrnost maxima z n členů
- testy náhodnosti
- test na intervaly, test sběratele kuponů
- poker test (celočíselný, $0 \leq x_i < d$)
- Hammingův test
- ...

Poznámka: Testování transformovaných rozložení

Metoda Monte Carlo

Experimentální numerická (simulační) metoda (metody):

- řeší danou úlohu experimentováním se stochastickým modelem
- využívá vzájemného vztahu mezi hledanými veličinami a pravděpodobnostmi, se kterými nastanou určité jevy
- vyžaduje generování (pseudo)náhodných čísel
- není příliš přesná
- existuje řada variant (*Metropolis, Quasi-MC*)

Postup:

1. vytvoříme stochastický model
2. provádíme náhodné experimenty
3. získanou pravděpodobnost nebo průměr použijeme pro výpočet výsledku

Aplikace metody Monte Carlo

- Historie: Buffonova úloha (π), projekt *"Manhattan"*
- Výpočet určitých integrálů
  - molekulární simulace ($3N$-rozměrný integrál)
  - počítačová grafika (*Path tracing*)
  - kontrola složení (např. salámu)
- Řešení diferenciálních rovnic (náhodné procházky)
- Finance

Souvislosti: náhodné vzorkování, průzkumy, *oversampling*, některé optimalizační metody (např. *Simulované žíhání*), ...

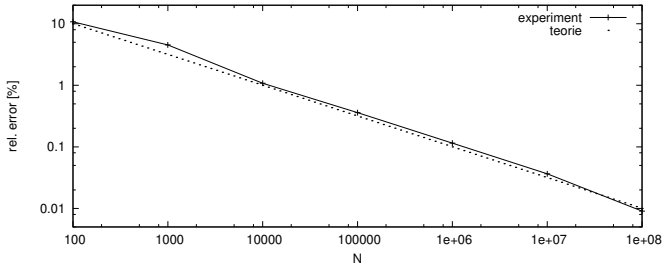
Přesnost metody Monte Carlo

Přesnost metody není velká — pro relativní chybu platí:

$$err = \frac{1}{\sqrt{N}}$$

kde N je počet provedených experimentů.

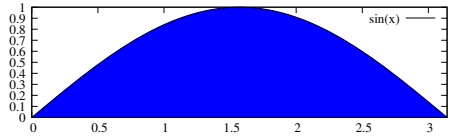
Příklad: Experiment — závislost chyby na počtu pokusů



Příklad1 — výpočet jednoduchého určitého integrálu

$$\int_0^{\pi} sin(x)dx$$

1. Generujeme N náhodných bodů (x_i, y_i) (rovnoměrně v rozsahu souřadnic: $rozsah_x = \langle 0, \pi \rangle$, $rozsah_y = \langle 0, 1 \rangle$)
2. Vypočteme *pravděpodobnost* P jevu $y_i < sin(x_i)$



3. Výsledek je přibližně roven $|rozsah_x| * |rozsah_y| * P$:

$$\int_0^{\pi} sin(x)dx \approx \pi P$$

Příklad1 — efektivnější metoda

$$\int_0^{\pi} sin(x)dx$$

Rychlejší a korektnější postup:

1. Generujeme N náhodných hodnot: $x_i \in \langle 0, \pi \rangle$
2. Vypočteme *průměr*: $E = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} sin(x_i)$
3. Výsledek: $\int_0^{\pi} sin(x)dx \approx \pi E$

Lze dokázat, že pro $N \to \infty$ platí rovnost: $\int_0^{\pi} sin(x)dx = \pi E$

Poznámka: Nemusíme znát obor hodnot funkce.

Příklad2 — výpočet objemu tělesa

Výpočet objemu koule o poloměru r :

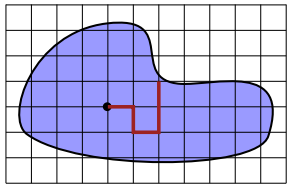
- Generujeme N náhodných bodů (x_i, y_i, z_i).
  Pro zjednodušení použijeme jako těleso kouli a pro všechny osy jen rozsah $\langle 0, r \rangle$, který odpovídá $\frac{1}{8}$ koule.
- Vypočteme pravděpodobnost P jevu $x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 < r^2$
- Výsledek: $objem \approx 8Pr^3$

Poznámka:
Metoda Monte Carlo je výhodná především pro vícerozměrné integrály, kdy běžné metody nejsou efektivní. Uvedené jednoduché příklady proto považujte pouze za ilustrační.

Příklad3 — Dirichletova úloha (řešení PDR) — princip

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

+ okrajové podmínky na hranici Γ: $u(Q) = f(Q), \quad Q \in \Gamma$



Postup řešení:

1. Volba čtvercové sítě, aproximace okrajů.
2. Provádíme náhodné procházky z výchozího bodu k okraji.
3. Průměrná hodnota koncových bodů náhodných procházek udává přibližnou hodnotu řešení $u(x, y)$ ve výchozím bodu.

Monte Carlo — shrnutí

- Velmi používaná metoda v případech, kdy běžné numerické metody jsou neefektivní nebo nepoužitelné (např. N-rozměrné integrály pro velké N).
- Jednoduchá implementace.
- Náročnost na kvalitu generátoru pseudonáhodných čísel.
- Relativně malá přesnost, nízká efektivita.
- Existují různé další varianty MC metod — viz literatura.

Diskrétní simulace

Agenda:

- Popis diskrétních systémů
- Systémy hromadné obsluhy (*Queuing Systems*)
  - Aktivní entity: procesy, události
  - Pasivní entity: fronty, zařízení, sklady,
- Příklady: Petriho sítě
- Implementace: Algoritmus řízení simulace, kalendář
- *"next-event"* simulace
- Nástroje pro sběr statistik
- Základní popis SIMLIB/C++
- Příklady: SIMLIB/C++

Formy popisu diskrétních systémů

- Program v (simulačním) programovacím jazyce
- Petriho sítě (C. A. Petri, 1962, existují různé varianty)
- DEVS (*Discrete Event System Specification*)
- Automaty, sítě automatů
- Procesní algebry (CCS, CSP, ...)
- π-calculus
- CHAM, PRAM
- ...

Procesy

V diskrétním modelování používáme pojem *proces*:

- Process je posloupnost událostí
- Paralelní procesy — současně prováděné procesy
- Kvaziparalelismus — provádění "paralelních" procesů na jednoprocesorovém počítači

V modelovaných systémech často existuje mnoho paralelně probíhajících a vzájemně komunikujících procesů.

Poznámky:
- nepreemptivní implementace (např. *coroutines*)
- zapouzdření, objekty, agenti

Paralelismus

- Popis jednotlivých procesů sekvencí kroků (program).
- Popis komunikace procesů — zprávy (synchronní, asynchronní).
- Synchronizace při používání sdílených prostředků.

Petriho sítě

Definice P/T Petriho sítě:

$$\Sigma = (P, T, F, W, C, M_0)$$

kde:

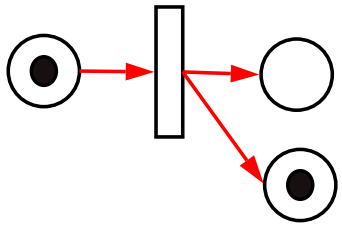
- P je množina míst (stavy)
- T je množina přechodů, $P \cap T = \emptyset$
- Incidenční relace $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$
- Váhová funkce $W : F \to \{1, 2, ...\}$
- Kapacity míst $C : P \to N$
- Počáteční značení $M_0 : P \to N$
  (M se nazývá *značení* Petriho sítě)

Graf Petriho sítě

Obvykle zadáváme Petriho síť formou grafu:

- Místa – kružnice
- Přechody – obdélníky
- Incidenční relace – šipky (orientované hrany)
- Váhová funkce – ohodnocení hran

Příklad:



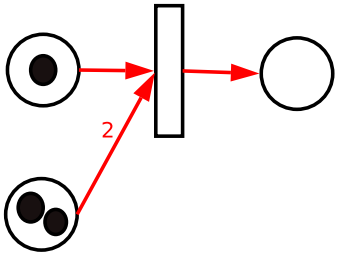
Chování Petriho sítě

Proveditelnost přechodu v Petriho síti:

Přechod je proveditelný při značení M, jestliže:

- ve vstupních místech čeká dostatek procesů
- a současně výstupní místa mají dostatečně volnou kapacitu.

Příklad:



Petriho sítě v modelování

Petriho sítě mohou modelovat:

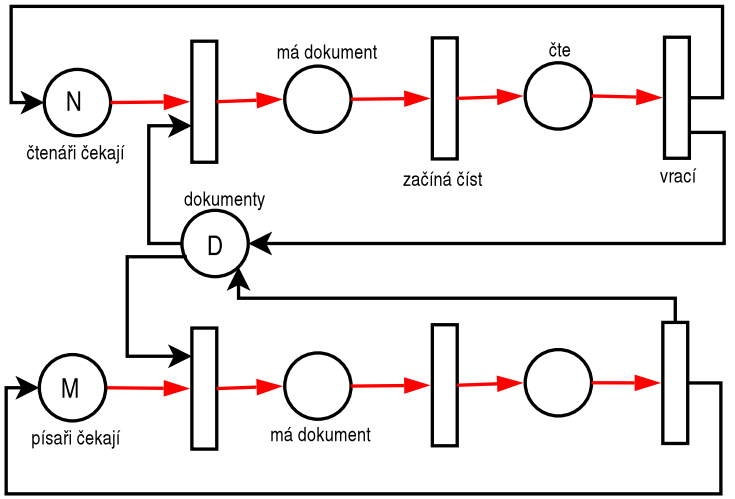
- paralelismus procesů
- komunikaci a synchronizaci procesů
- nedeterminismus

Pro modelování diskrétních systémů zavádíme do klasických P/T Petriho sítí několik rozšíření: priority, pravděpodobnosti a doby přechodů.

Další typy Petriho sítí

- Hierarchické – do sebe vnořené sítě
- Barvené – značky mají datový typ (”barvu”)
- Objektově orientované – OOPN, PNtalk
- Stochastické – P/T síť s prioritami, pravděpodobnostmi a časováním přechodů.
- ...

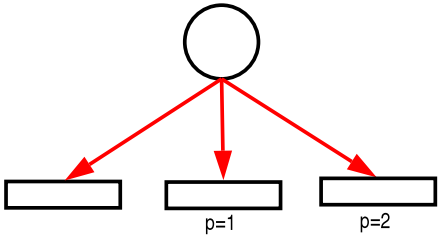
Příklad: čtenáři a písaři



Prioritní přechody

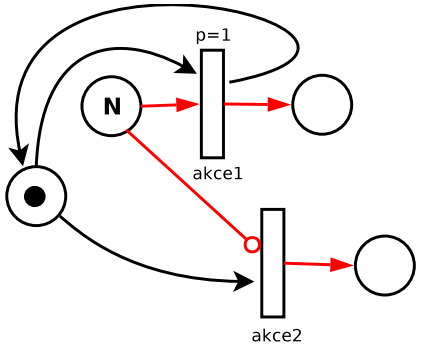
- je-li více přechodů proveditelných z jednoho značení, můžeme jim dát priority
- $p_t \in \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$
- vyšší číslo $\Rightarrow$ vyšší priorita
- implicitně je priorita $p_t = 0$

Příklad:

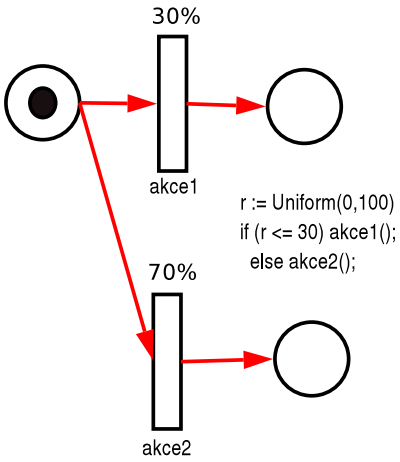


Poznámka: Inhibiční hrany

```
while ( N > 0 ) {
    akce1();
    N = N - 1;
}
akce2();
```



Pravděpodobnost provedení přechodu

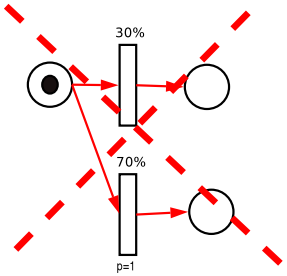


Pravidla používání rozšířených přechodů

- Přechod má pouze JEDEN parametr (priorita, pravděpodobnost, časování).
- Pozor: tento parametr NENÍ parametrem HRANY.

Příklad – CHYBNĚ

Nejednoznačnost – přechod se provede s pravděpodobností 70%, ale prioritně = NESMYSL!

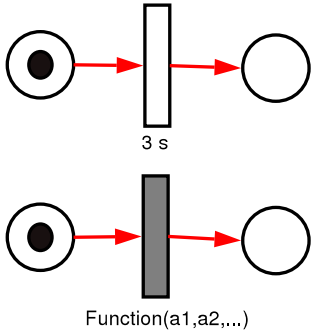


Časované Petriho sítě

Přidání modelového času:

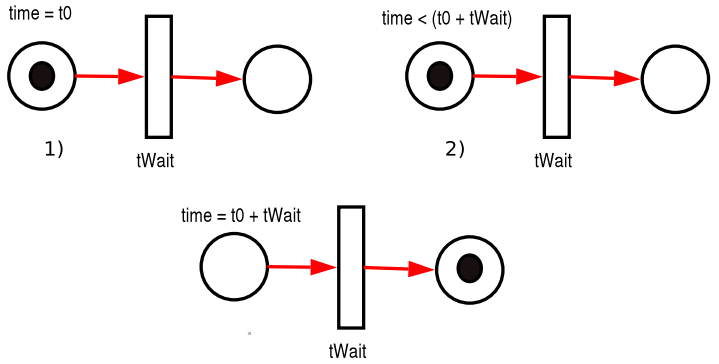
Časovaný přechod má parametr – dobu provádění:

- Konstantní čas čekání
- Náhodně generovaná doba čekání



Sémantika časovaného přechodu

- Pokud je přechod je v čase *t* proveditelný, spustí se odpočet času
- Po celou dobu odpočítávání se nemění stav značek
- Na konci doby se provede přemístění značek



Sémantika časovaného přechodu 2

Běžný časovaný přechod neomezuje počet současně čekajících.

Někdy ale zavádíme kapacitu časovaného přechodu:

Kapacita přechodu udává kolik procesů může na přechodu čekat současně:

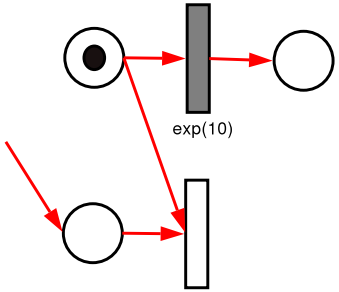
- jeden (implicitně), vzniká fronta
- více (nutno specifikovat poznámkou u přechodu)

Poznámka:
Poznámka k sémantice časového přechodu: lze řešit i dočasným odstraněním značek na dobu odpočítávání času, ale to komplikuje další případy, jako je například přerušení čekání.

Přechody ve Stochastické PN (SPN)

V SPN platí:

- Máme dva druhy přechodů: časované a okamžité
- Jediným povoleným parametrem časovaného přechodu je údaj o čase (náhodný nebo konstantní)
- Parametry okamžitého přechodu: priorita, pravděpodobnost
- Okamžitý přechod má vždy vyšší prioritu než časovaný



Systémy hromadné obsluhy (SHO)

SHO (*Queueing Systems*) jsou systémy obsahující zařízení (s frontami), která poskytují obsluhu transakcím.

Typický SHO obsahuje:

- transakce (=procesy) a popis jejich příchodů
- obslužné linky (více typů) a popis obsluhy
- fronty různých typů ve kterých transakce čekají

Co sledujeme při simulaci:

- informace o čase stráveném transakcí v systému
- doby čekání ve frontách
- vytížení obslužných linek

Cíl: odhalit různá zdržení, optimalizovat výkon, ...

Vstupní tok požadavků

Obvykle jde o stochastický proces příchodů do systému

- Při modelování příchodů zadáváme:
  - Střední dobu mezi příchody (obvykle používáme exponenciální rozložení)
  - Počet příchodů za jednotku času (obvykle Poissonovo rozložení)
    Pojem: Intenzita příchodů požadavků

Fronty čekajících požadavků

Vytvoří se vždy, když požadavek chce být obsloužen již obsazeným zařízením. Pro fronty je charakteristické:

- řazení požadavků ve frontě (např. FIFO)
- způsob výběru požadavků z fronty
- největší možná délka fronty

Frontové řády : FIFO, LIFO, SIRO (Service in Random Order)

Nulová fronta : požadavek nemůže vstoupit do fronty, jde o systém se ztrátami

Fronta konečná : omezení kapacity fronty

Fronta s netrpělivými požadavky : netrpělivý požadavek opouští systém, překročí-li doba čekání určitou mez (*time-out*)

Prioritní fronty, priorita obsluhy

- Přicházející požadavky nejsou rovnocenné – požadavek na obsluhu může mít zvláštní prioritu.
- Prioritních úrovní může být více.
- U jedné obslužné linky lze vytvářet i několik front s různými prioritami.
- Vstupem požadavku s vyšší prioritou nastane jedna ze čtyř možností pro právě probíhající obsluhu požadavku s nižší prioritou – viz dále.

Prioritní obsluha

1. Započatá obsluha se normálně ukončí (slabá priorita).
2. Obsluha se přeruší a začne obsluha požadavku s vyšší prioritou obsluhy (silná priorita). Požadavek, jehož obsluha byla přerušena:
   - odchází ze systému neobsloužen
   - nebo se vrací znovu do fronty a když je později znovu obsluhován, tak:
     - obsluha pokračuje od přerušeného místa,
     - nebo začíná znovu od začátku.
3. Jsou-li všechny linky obsazeny a u každé je fronta, požadavek se sám rozhodne, do které fronty se zařadí.
4. Vytvářejí-li požadavky jednu společnou frontu, požadavek vstupuje do té obslužné linky, která se nejdříve uvolní.

Obslužná síť

Vznikne spojením několika obslužných linek.

Otevřená obslužná síť – výměna požadavků mezi sítí a okolím.

Uzavřená obslužná síť – nedochází k výměně požadavků mezi sítí a okolím.

Smíšená obslužná síť – pro některé typy požadavků je síť otevřená, pro jiné uzavřená.

Obslužná síť 2

Statické vlastnosti sítě jsou definovány:

- počtem a charakteristikou obslužných linek,
- topologií obslužné sítě.

Dynamické vlastnosti obslužné sítě jsou definovány:

- charakteristikou procesu příchodu požadavků
- charakteristikou procesu obsluhy požadavků
- charakteristikou procesu přechodu požadavků mezi obslužnými linkami
- strategií obsluhy požadavků v obslužných linkách sítě.

Kendallova klasifikace SHO

Standard stručného a přehledného vyjádření typu SHO (zavedl ji D. G. Kendall) – používá tři hlavní hlediska:

- **X** – typ stochastického procesu popisujícího příchod požadavků k obsluze
- **Y** – zákon rozložení délky obsluhy
- **c** – počet dostupných obslužných linek

Specifikace má tvar **X/Y/c**, kde:

- **X, Y** ... velká písmena M, D, G, E_k, K_n, GI – viz dále
- **c** ... přirozené číslo, včetně ∞

Příklad:
systém M/M/1

Kendallova klasifikace SHO

Symbol	X	Y
M	Poissonův proces příchodů tj. exponenciální rozložení vzájemně nezávislých intervalů mezi příchody	exponenciální rozložení doby obsluhy
E_k	Erlangovo rozložení intervalů mezi příchody s parametry λa k	Erlangovo rozložení doby obsluhy s parametry λ a k
K_n	rozložení χ^2 intervalů mezi příchody, $n$stupňů volnosti	rozložení χ^2 doby obsluhy
D	pravidelné deterministické příchody	konstantní doba obsluhy
G	žádné předpoklady o procesu příchodu	jakékoliv rozložení doby obsluhy
GI	rekurentní proces příchodů	

Modelování SHO

Při modelování SHO popisujeme:

- Procesy (transakce) v systému (příchod procesu do systému, jeho činnost, odchod)
- Stav obslužných linek a front u zařízení
- Průběh obsluhy transakcí v zařízeních

Poznámka
Aproximace trvání doby obsluhy exponenciálním rozložením pravděpodobnosti přináší podstatné zjednodušení.
Předpokládáme, že pravděpodobnost ukončení obsluhy v průběhu krátkého časového intervalu je konstantní a nezávisí na tom, jak dlouho již obsluha probíhala.

Typy obslužných linek

Podle kapacity rozlišujeme:

$kapacita = 1$	Zařízení (*Facility*)
$kapacita > 1$	Sklad (*Store*)

Modelujeme-li více zařízení stejného typu, pak:

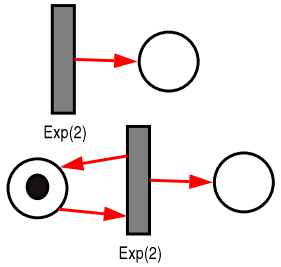
- každé zařízení má vlastní frontu → pole zařízení
- k zařízením vede jediná fronta → sklad nebo pole zařízení se sdílenou frontou

Příklad: Samoobsluha

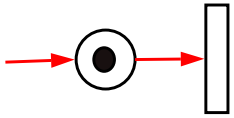
- vozíky – sklad *x* vozíků (jedna fronta)
- dva prodavači – např. dvě zařízení se sdílenou frontou
- pět pokladen – pět samostatných zařízení (ke každé je zvláštní fronta)

Příchod a odchod transakce

Generování příchodu transakcí (procesů) do systému:



Transakce opouští systém:

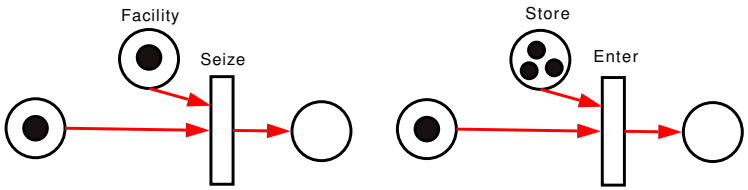


Obsazení zařízení

Obslužná linka s kapacitou 1 (Zařízení, Facility) je volná nebo obsazená.

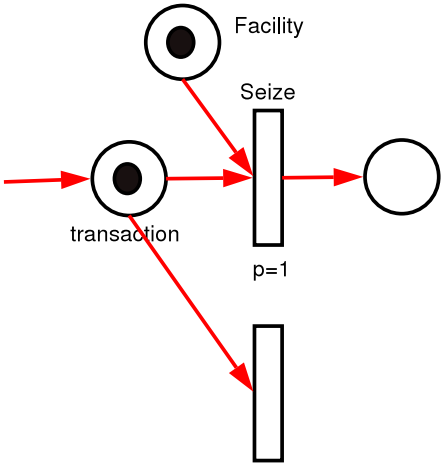
Obslužná linka s kapacitou $N > 1$ (Sklad, Store) má obsazeno 0 až N míst.

Příklad: Obsazení zařízení (Seize) a skladu (Enter)



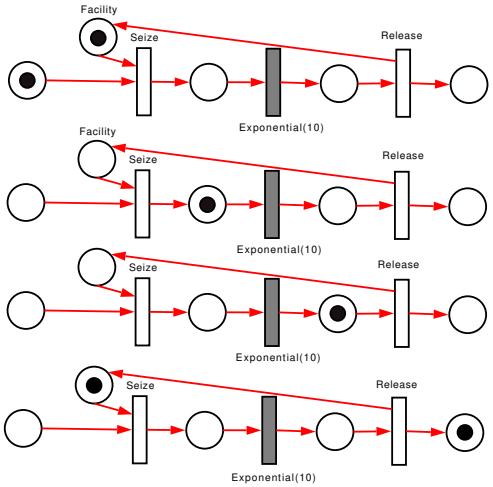
Neblokující obsazení zařízení

Transakce přistupuje k zařízení, ale nechce čekat ve frontě:



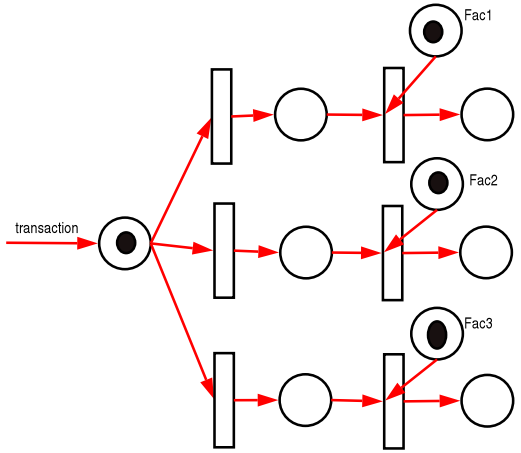
Příklad: Přehled základních operací

Obsazení linky, vykonání obsluhy a uvolnění linky



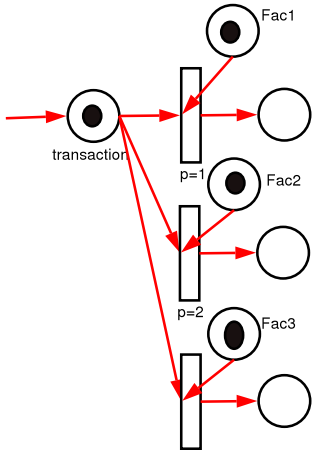
Náhodný výběr zařízení

Transakce náhodně vybírá jedno ze zařízení



Výběr s prioritou zařízení

Transakce přistupuje prioritně k jednomu ze zařízení



Příklad I – Zadání

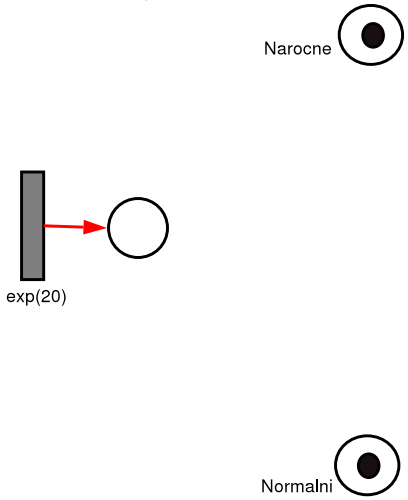
Do opravářské dílny přicházejí zákazníci v intervalech daných exponenciálním rozložením pravděpodobnosti se střední hodnotou 20 minut.

V dílně jsou dva opraváři: jeden zpracovává normální zakázky a druhý náročné zakázky. Každá třetí zakázka je náročná. Vyřízení normální zakázky trvá 15 minut s exp. rozložením pravděpodobnosti, vyřízení náročné zakázky zabere 45 minut exp. Zákazník čeká na vyřízení své zakázky a pak systém opouští.

Modelujte systém pomocí stochastické Petriho sítě.

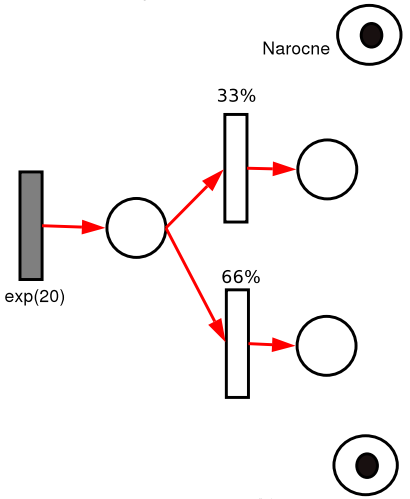
Příklad I – pokračování

Struktura systému:



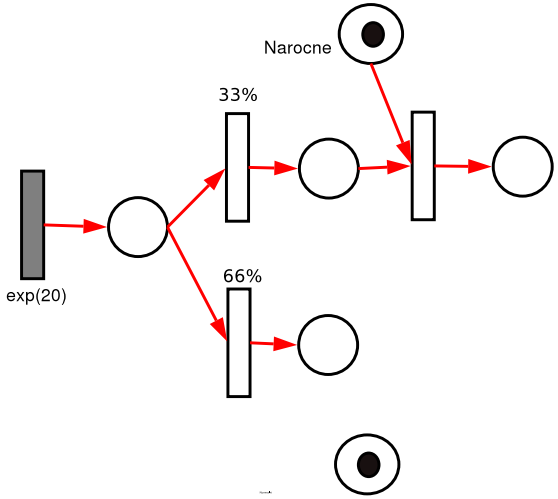
Příklad I – pokračování

Struktura systému:



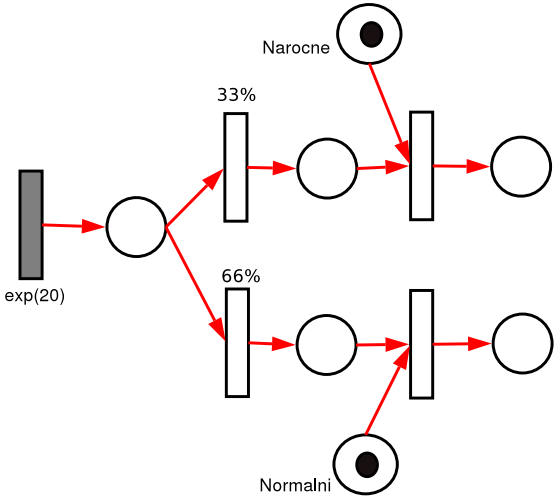
Příklad I – pokračování

Struktura systému:



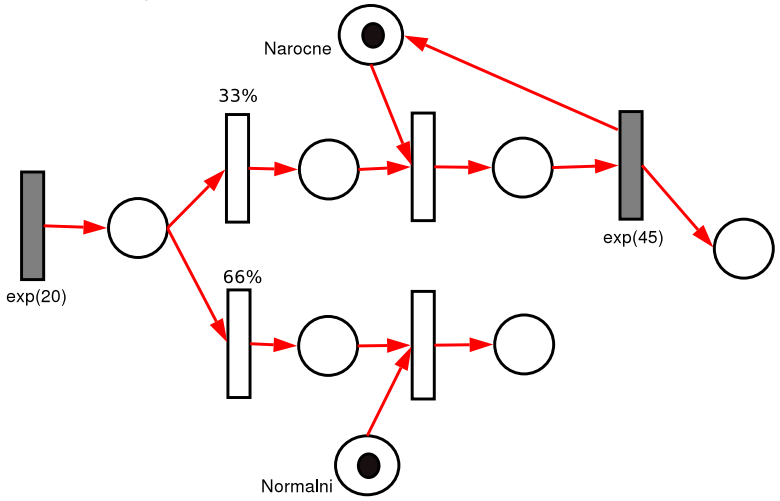
Příklad I – pokračování

Struktura systému:



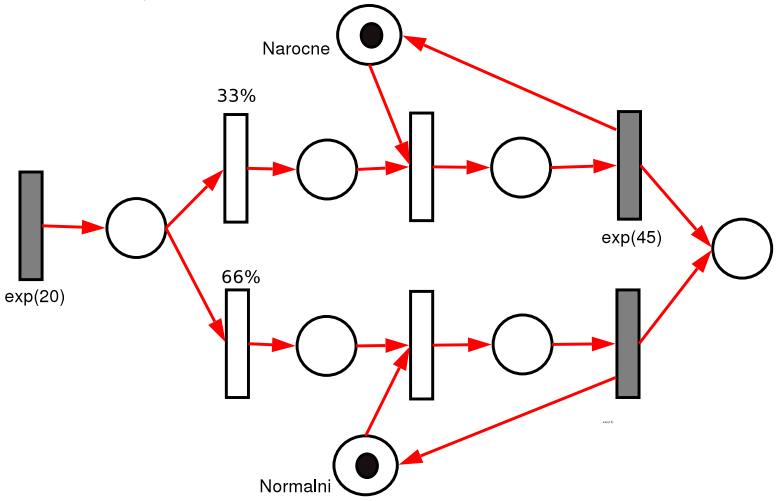
Příklad I – pokračování

Struktura systému:



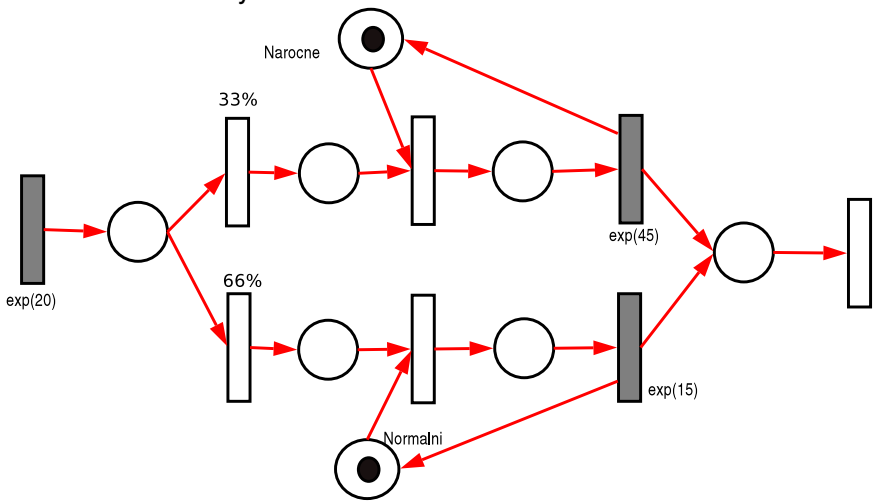
Příklad I – pokračování

Struktura systému:



Příklad I – pokračování

Model zadaného systému ve formě stochastické Petriho sítě:



Příklad I – model v SIMLIB

```
Facility narocne("Narocne");
Facility normalni("Normalni");

class Zakaznik : public Process {
   void Behavior() {
     if (Uniform(0,100) <= 33) {
        Seize(narocne);        // obsazení zařízení
        Wait(Exponential(45));
        Release(narocne);      // uvolnění
     } else {
        ...
     }
   }
};
```

Příklad I – model v SIMLIB

```
class Generator : public Event {
   void Behavior() {
      (new Zakaznik)->Activate();
      Activate(Time + Exponential(20));
   }
};

int main()          // popis experimentu
{
   Init(0, 1000);  // doba simulace
   (new Generator)->Activate();
   Run();          // start simulace
}
```


Přehled: diskrétní část SIMLIB

Prostředky pro diskrétní modelování:

- Process – báze pro modelování procesů
- Event – báze pro modely událostí
- Facility – obslužná linka – výlučný přístup
- Store – obslužná linka s kapacitou
- Queue – fronta
- Statistiky – sada tříd pro sběr a uchování statistik

Poznámka: Podrobnosti viz WWW dokumentace

Obecná struktura modelu

```
#include "simlib.h"

<deklarace zařízení>

<deklarace tříd - procesy, události>

<popis simulačního experimentu>
```

Simulační model v SIMLIB/C++ je program v jazyce C++. Všechny konstrukce/knihovny jazyka C++ jsou tedy použitelné.

Popis simulačního experimentu

```
int main() {
  <příkazy1>   // základní inicializace
               // například SetOutput("soubor");
  Init(<počáteční čas>, <koncový čas>);
               // inicializace simulátoru a m. času
  <příkazy2>   // inicializace modelu
               // například vytvoření objektů
  Run();       // běh simulace
  <příkazy3>   // zpracování výsledků
               // například tisk statistik
}
```

Sekvenci `Init(t0,t1); ...; Run(); ...;` lze libovolně opakovat.

Modelový čas

Modelový čas je reprezentován proměnnou:

```
double Time;
```

Do proměnné `Time` nelze zapisovat přiřazovacím příkazem. Zápis:

```
Time = 10;
```

vyvolá chybu při překladu.

Posun času řídí výhradně jádro simulátoru.

`Init(t0,t1);` nastaví počáteční čas na `t0`.

Generátory pseudonáhodných čísel

```
double Random();
-- rovnoměrné rozložení, R(0,1)

double Uniform(double L, double H);
-- rovnoměrné rozložení, R(L,H)

double Exponential(double E);
-- exponenciální rozložení se středem E

double Normal(double M, double S);
-- normální rozložení se středem M a rozptylem S

...
```


Použití objektů

OOP – třídy a instance (objekty)

- OOP vzniklo pro účely modelování a simulace (Simula 67)
- Abstrakce, hierarchie, zapouzdření, modularita; paralelnost, typování, perzistence a souvislosti
  (více v přednášce o simulačních jazycích)

Popis události

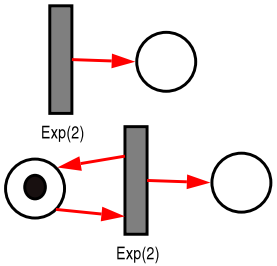
Událost je jednorázová (nepřerušitelná) akce provedená v určitém modelovém čase. V SIMLIB je vždy odvozena od abstraktní třídy `Event` (musíme definovat metodu `Behavior()`).

Často jsou nutné periodické události — událost naplánuje sama sebe:

```
class Udalost : public Event {
   void Behavior() {
      // ... příkazy události
      Activate(Time + e); // periodicky aktivovat
   }
};
// Plánování události:
(new Udalost)->Activate();  // plánuje na čas Time
(new Udalost)->Activate(t); // čas t (pozor na t<Time)
```

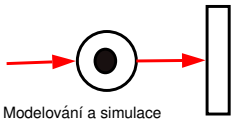
Příchod a odchod transakce

Generování transakcí (procesů):




```
class Gener : public Event {
   void Behavior() {
      (new Proc)->Activate();
      Activate(Time+Exponential(2));
   }
};
int main() {
  Init(t0, t1);
  (new Gener)->Activate();
}
```

Transakce opouští systém:



```
class Proc : public Process {
   void Behavior() {
      ...
   } // implicitně opouští systém
}
```


Popis procesu

Procesy (transakce) jsou odvozeny z abstraktní třídy `Process`.

```
class Transakce : public Process {
  public:
    Transakce( parametry ) {  // konstruktor
       // nepovinný popis inicializace procesu
    }
    void Behavior() {
       // popis chování procesu
    }
};
```

Po aktivaci procesu se volá metoda `Behavior` (chování). Provádění metody je přerušeno při čekání:

- ve frontě u zařízení (v rámci `Seize, Enter`)
- při explicitním `Wait(dt);` (abstrakce nějaké činnosti trvající *dt*)

Plánování procesu

Proces se provádí jako posloupnost událostí – např.:

```
void Behavior() {
  ...
  Wait(3);
  ... // pokračování
}
```

Proces čeká 3 časové jednotky.

Při simulaci to znamená, že se naplánuje další jeho pokračování na čas *Time* + 3 (příkazem `Activate(Time+3)`).

Aktivační záznam této události je uložen do kalendáře a proces je přerušen (a spustí se první plánovaná akce v kalendáři).

Poznámka: `Passivate()` — pozastaví na neurčito.

Kalendář událostí a algoritmus řízení simulace

Kalendář je uspořádaná datová struktura uchovávající aktivační záznamy budoucích událostí.

- Každá naplánovaná budoucí událost (”next event”) má v kalendáři záznam $[(acttime_i, priority_i, event_i), ...]$
- Kalendář umožňuje výběr prvního záznamu s nejmenším aktivačním časem a vkládání/rušení aktivačních záznamů.

Algoritmus řízení diskrétní simulace typu ”next-event”

```
Inicializace času, kalendáře, modelu, ...
while( Kalendář je neprázdný ) {
   Vyjmi první záznam z kalendáře
   if ( Aktivační čas události > T_END )
       Konec simulace
   Nastav čas na aktivační čas události
   Proveď popis chování události
}
```

Kvaziparalelismus a diskrétní simulace

Při simulaci v jednom okamžiku běží jen jeden proces (`Process::Behavior()`). Ostatní jsou pozastaveny — čekají ve frontách nebo jsou registrovány v kalendáři (*Pending Event Set, PES*).

Proto nemůže být aktivní proces nedobrovolně přerušen a v době svého běhu má teoreticky neomezený přístup ke všem zdrojům (proměnným programu).

Provádění procesu je přerušeno až na jeho vlastní žádost (viz tzv. kooperativní multitasking).

Poznámka:
Implementace přepínání procesů v SIMLIB/C++.

Vytvoření, registrování a zrušení procesu

Vytvoření instance třídy:

```
Transakce *t = new Transakce;
```

Plánování (re)aktivace procesu do kalendáře:

```
t->Activate(tm);
```

Aktivuje se v čase *tm* (implicitně je to $tm = Time$, tj. okamžitě).

Zrušení procesu i jeho registrace ve všech strukturách (fronty, kalendář):

```
t->Cancel();  // také lze použít  delete t;
```

Suspendování běžícího procesu:

```
Passivate();
```

Pro události lze použít pouze `Activate` a `Cancel`.

Příklad: Timeout – přerušení čekání ve frontě

```
class Timeout : public Event {
    Process *Id;
  public:
    Timeout(Process *p, double dt): Id(p) {
        Activate(Time+dt); // kdy bude
    }
    void Behavior() {
      Id->Cancel(); // zrušení procesu ...
      Cancel();     // a zrušení této události
    }
};
class MProc : public Process {
    void Behavior() {
      Timeout *t = new Timeout(this, 10);
      Seize(F);    // možné čekání ve frontě
      delete t;    // jen když nebyl timeout
      ...
```


Čekání procesu

Explicitní: pozastavení procesu příkazem `Wait(expr)` — do kalendáře naplánuje událost reaktivace procesu na čas $Time + expr$.

Implicitní: proces může čekat ve frontě po dobu neurčitou (např. při přístupu k zařízením typu `Facility` a `Store`):

```
Facility F("F");
Store S("S",100);       // kapacita 100 míst

  Seize(F);     // před obsazením může čekat ve frontě
  Wait(5);      // F "pracuje" 5 čas. jednotek
  Release(F);   // uvolní zařízení

  Enter(S, 3);  // zabere 3 místa ve skladu nebo čeká
  Wait(50);     // ...
  Leave(S, 1);  // uvolní 1 místo
```

Priorita procesu

Proces má atribut `Priority`, který ovlivňuje jeho řazení do front.

```
class MProc : public Process {
  // ...
public:
  MProc() : Process( PRIORITA1 ) { };
  void Behavior() {
    Priority = 3; // změna priority
    Seize(F);
    Priority = 0; // = implicitní priorita
  }
};
```

Poznámka:
Neplést s prioritou obsluhy při obsazování zařízení!

Fronty — třída *Queue*

```
Queue q;
 ...
 void Behavior() { // popis chování procesu
   q.Insert(this); // vloží se do fronty
   Passivate();    // suspenduje se
   ...
 }
```

Jiný proces (nebo událost) může z fronty vybírat:

```
...
if (!q.Empty()) {
  Process *tmp = q.GetFirst();
  tmp->Activate(); // aktivace
}
```


Zařízení (*Facility*)

Zařízení je obsaditelné procesem (výlučný přístup).

Zařízení obsahuje dvě fronty požadavků:

- (vnější) fronta čekajících požadavků
- (vnitřní) fronta přerušených požadavků

```
Fac.Seize(Proces);  // priorita obsluhy = 0
Fac.Seize(Proces, PrioritaObsluhy);
```

Je třeba rozlišovat dva typy priority v SIMLIB:

priorita procesu (řazení do front, `Priority`)

priorita obsluhy v zařízení (2. parametr metody `Seize`)

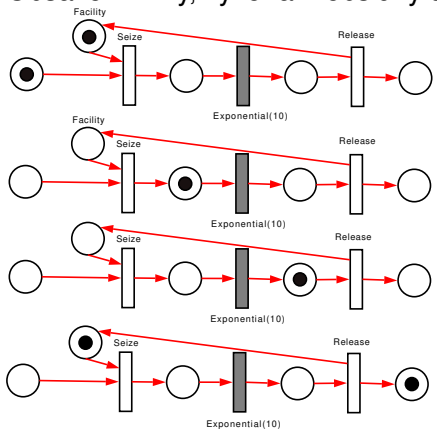
Zařízení — inicializace

```
Facility Fac2("Jmeno");
Facility Fac4("Jmeno", &moje_fronta);
Facility Fac5[10];
```

1. Jméno se tiskne ve statistikách
2. Možnost vnucení jiné fronty (např. společné s jiným zařízením)
3. Je možné kdykoli změnit (u fronty pozor na obsah):
   - `Fac5[i].SetName("Jmeno")`
   - `Fac5[i].SetQueue(moje_fronta)`

Příklad — obsazení zařízení

Obsazení linky, vykonání obsluhy a uvolnění linky




```
Facility F("Fac");
...
class P : Process {
  void Behavior() {
    ...
    Seize(F);
    Wait(Exponential(10));
    Release(F);
    ...
  }
};
```


Zařízení — priorita obsluhy

Používá se pro modelování poruch.

Jde o jiný typ priority, než je priorita procesu.

Zařízení má druhou, vnitřní frontu přerušených procesů.

```
...
Seize(Fac);
```

V obsluze je proces A se standardní prioritou obsluhy (0).

```
...
Seize(Fac, 1);
```

Jiný proces B žádá o obsluhu s vyšší prioritou obsluhy. Proces A je odstaven do vnitřní fronty a do obsluhy se dostává B.

Při uvolnění zařízení procesem B se vrátí k rozpracované obsluze proces z vnitřní fronty s nejvyšší prioritou obsluhy a dokončí se jeho obsluha.

Sklad (*Store*)

Sklad umožňuje simultánní přístup ke zdroji s určitou kapacitou (parkoviště, paměť počítače, místa v autobuse).

```
Store Voziky("Voziky", 50);
```

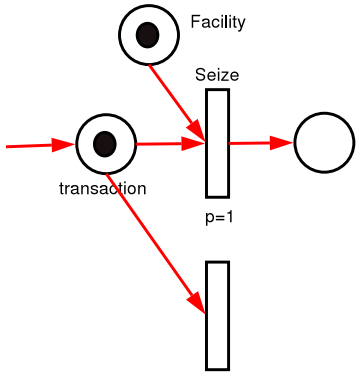
Proces přistupuje ke skladu s požadavkem na obsazení kapacity *c*. Je-li dostupná kapacita volná, přidělí se (zmenší se množství dostupné kapacity). Není-li, proces čeká ve frontě.
(Sklad nemá prioritu obsluhy.)
Proces typicky provádí operace:

```
Enter(Voziky, 1);
Leave(Voziky, 1);
```

Obdržená kapacita nesouvisí s procesem – vrátit ji může libovolný jiný proces. Při vracení se uvolní kapacita a prochází se fronta čekajících. První čekající s uspokojitelným požadavkem je obsloužen (nemusí být první ve frontě).

Zařízení — neblokující obsazení linky

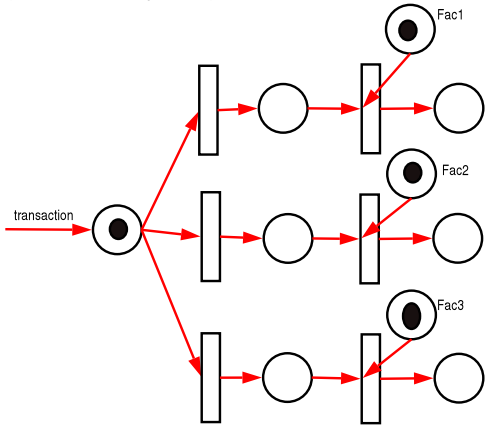
Transakce přistupuje k zařízení, ale nechce čekat ve frontě




```
Facility F("Fac");
class Proc : Process {
   void Behavior() {
      ...
      if (!F.Busy())
         Seize(F);
      else
         ...
   }
}
```

Náhodný výběr z N zařízení

Transakce přistupuje (se staví do fronty) k jednomu ze tří zařízení (náhodně vybírá)



Náhodný výběr z N zařízení

Nedeterminismus je třeba modelovat rovnoměrným rozložením.

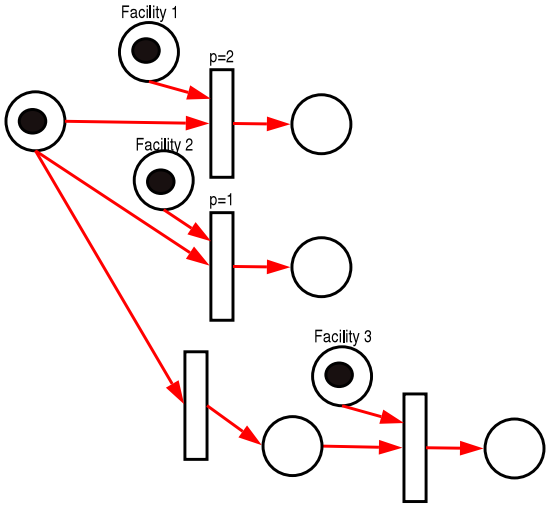
```
const int N = 3;
Facility F[N];

class Proc : Process {
    void Behavior() {
      ...
      int idx = int( N * Random() );
      Seize(F[idx]);
      ...
      Release(F[idx]);
      ...
    }
};
```


Výběr s prioritou

Transakce přistupuje k jednomu z N zařízení — vybírá první volné podle priority dané implicitně pořadím prohledávání pole (a pokud není volné žádné, vybere poslední):

```
const int N = 3;
Facility F[N];
...
    int idx;
    for(idx=0; idx < N-1; idx++)
        if(!F[idx].Busy())
            break; // první neobsazené
    Seize(F[idx]);
    ...
```


Výběr s prioritou — Petriho síť



Výběr podle délky fronty

Transakce přistupuje k zařízení s nejkratší frontou (a pokud je stejně dlouhá u více zařízení, vybere první podle pořadí prohledávání):

```
const int N = 10;
Facility F[N];

    int idx=0;
    for (int a=1; a < N; a++)
      if (F[a].QueueLen() < F[idx].QueueLen())
          idx=a;
    Seize(F[idx]);
    ...
```


Příklad: Samoobsluha

Do samoobsluhy přicházejí zákazníci v intervalech daných exponenciálním rozložením se středem 8 minut.
Každý zákazník si nejprve opatří vozík. Vozíky se koncentrují na seřadišti a je jich celkem 50. Zákazník vstoupí do prodejny a 30% jde okamžitě k pultíku s lahůdkami, kde obsluhují dvě prodavačky. Obsloužení zákazníka zde trvá 2 minuty (exponenciálně) a pak zákazník pokračuje běžným nákupem. Běžný nákup trvá 10-15 minut rovnoměrně. Nakonec přistupuje k jedné z pěti pokladen. Vybírá si pokladnu podle nejkratší fronty. Doba obsluhy u pokladny se řídí exponenciálním rozložením se středem 3 minuty. Při odchodu ze systému zákazník vrací vozík.

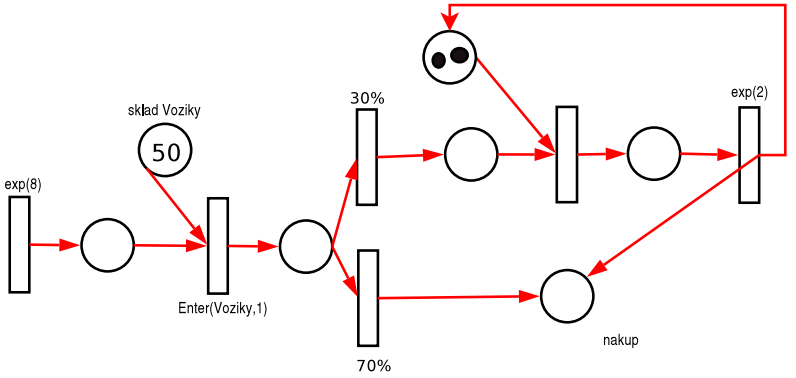
Zadání: analýza problému, model ve formě SPN, model ve formě SIMLIB

Příklad: Samoobsluha — analýza

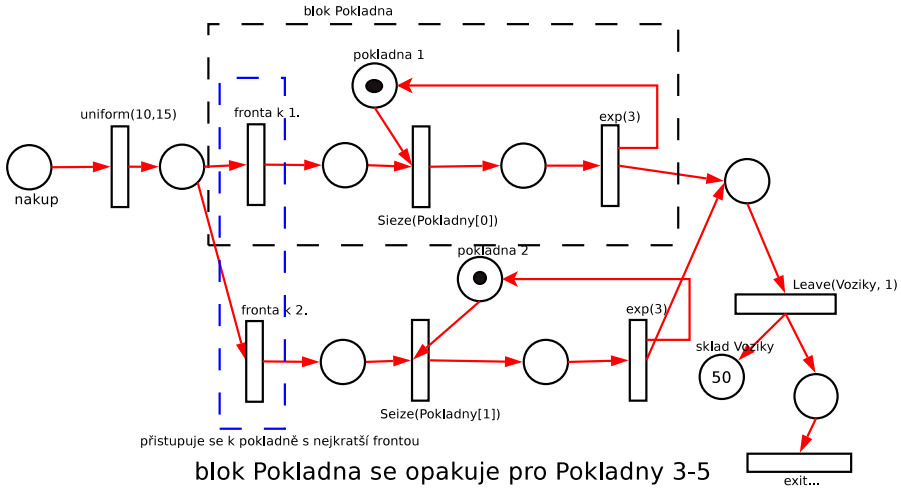
Konceptuální model:

- příchody - řídí se exponenciálním rozložením, střední hodnota je 8 minut
- proces provádí: (1) zabrat vozík, (2) 30% k lahůdkám, (3) nákup, (4) placení, (5) vrácení vozíků
- seřadiště vozíků - 50 kusů, jedna fronta, sklad
- lahůdky - jedna fronta ke dvěma prodavačkám, sklad
- pokladny - 5 pokladen, ke každé stojí zvláštní fronta

Petriho síť — první část



Petriho síť — druhá část



blok Pokladna se opakuje pro Pokladny 3-5

Modelování SHO: Statistiky

Statistiky sbíráme pro zjištění:

- vytížení zařízení (procenta doby)
- délky front, doby čekání ve frontách
- využití kapacity skladů
- celková doba, kterou transakce existuje v systému (a poměr doby užitečné činnosti/čekání ve frontě)

Statistiky:

- minimum
- maximum
- střední hodnota
- rozptyl a směrodatná odchylka

Statistiky v SIMLIB/C++

Třídy:

- `Stat`
- `TStat`
- `Histogram`

Společné operace:

- `s.Clear()` — inicializace
- `s.Output()` — tisk
- `s(x)` — záznam hodnoty `x`

Třída Stat

Objekty třídy Stat uchovávají tyto hodnoty:

- součet vstupních hodnot s_x
- součet čtverců vstupních hodnot s_x^2
- minimální vstupní hodnotu
- maximální vstupní hodnotu
- počet zaznamenaných hodnot n

Metoda `Output` tiskne některé tyto hodnoty a navíc průměrnou hodnotu a směrodatnou odchylku:

$$\sqrt{\frac{1}{n-1}(s_x^2 - n\mu^2)}$$

Třída *Stat* — příklad

```
int main() {
    Stat p;
    for (int a=0; a<1000; a++)
        p(Uniform(0, 100));
    p.Output();
}
```

```
+-----------------------------------------------+
| STAT                                          |
+-----------------------------------------------+
|  Min = 0.403416              Max = 99.9598    |
|  Number of records = 1000                     |
|  Average value = 49.8424                      |
|  Standard deviation = 28.8042                 |
+-----------------------------------------------+
```


Třída *TStat*

Objekty třídy `TStat` sledují časový průběh vstupní veličiny. Používají se k výpočtu průměrné hodnoty vstupu (např. délky fronty) za určitý časový interval.
Objekty třídy TStat uchovávají tyto hodnoty:

- sumu součinu vstupní hodnoty a časového intervalu
- sumu součinu čtverce vstupní hodnoty a časového intervalu
- minimální vstupní hodnotu
- maximální vstupní hodnotu
- počet vstupních hodnot
- počáteční čas

Metoda Output tiskne kromě vybraných uložených hodnot také průměrnou hodnotu vstupu za čas od inicializace statistiky (`Clear`) do okamžiku volání metody `Output`.

Příklad histogramu

```
//Histogram("Jméno pro tisk", OdHodnoty, Krok, PocetTrid);
Histogram expo("Expo", 0, 1, 15);
  ...
  for (int a=0; a<1000; a++)
     expo(Exponential(3));
```

```
+-----------------------------------------------+
| HISTOGRAM Expo                                |
+-----------------------------------------------+
| STATISTIC Expo                                |
+-----------------------------------------------+
|  Min = 0.00037629            Max = 24.8161    |
|  Number of records = 10000                    |
|  Average value = 2.94477                      |
|  Standard deviation = 2.91307                 |
+-----------------------------------------------+
```


Příklad histogramu — pokračování

from	to	n	rel	sum
0.000	1.000	2856	0.285600	0.285600
1.000	2.000	2042	0.204200	0.489800
2.000	3.000	1480	0.148000	0.637800
3.000	4.000	1022	0.102200	0.740000
4.000	5.000	771	0.077100	0.817100
5.000	6.000	527	0.052700	0.869800
6.000	7.000	386	0.038600	0.908400
7.000	8.000	273	0.027300	0.935700
8.000	9.000	184	0.018400	0.954100
9.000	10.000	129	0.012900	0.967000
10.000	11.000	105	0.010500	0.977500
11.000	12.000	55	0.005500	0.983000
12.000	13.000	47	0.004700	0.987700
13.000	14.000	47	0.004700	0.992400
14.000	15.000	17	0.001700	0.994100

Příklad: Samoobsluha v SIMLIB

```
#include "simlib.h"

const int POC_POKLADEN = 5;

// zařízení:
Facility Pokladny[POC_POKLADEN];
Store   Lahudky("Oddělení lahůdek", 2);
Store   Voziky("Seřadiště vozíků", 50);

Histogram celk("Celková doba v systému", 0, 5, 20);
```


Příklad: Samoobsluha — pokračování

```
class Zakaznik : public Process {
  void Behavior() {
    double prichod = Time;      // záznam času příchodu
    Enter(Voziky, 1);
    if ( Random() < 0.30 ) {    // 30% pravděpodobnost
       Enter(Lahudky, 1);
       Wait(Exponential(2));    // extra obsluha
       Leave(Lahudky, 1);
    }
    Wait(Uniform(10, 15));      // běžný nákup
    // výběr pokladny podle délky fronty:
    int i = 0;
    for (int a=1; a < POC_POKLADEN; a++)
       if (Pokladny[a].QueueLen() < Pokladny[i].QueueLen())
           i=a;
    // pokračování...
```


Příklad: Samoobsluha — pokračování

```
    // ...pokračování
    Seize(Pokladny[i]);         // u pokladny
    Wait( Exponential(3) );
    Release(Pokladny[i]);
    Leave(Voziky, 1);
    celk(Time-prichod);         // záznam času
  } // Behavior
}; // Zakaznik

class Prichody : public Event {
  void Behavior() {
    (new Zakaznik)->Activate();
    Activate( Time + Exponential(8) );
  }
};
```


Příklad: Samoobsluha — dokončení

```
int main()                      // popis experimentu
{
   SetOutput("samoo.dat");
   Init(0, 1000);
   (new Prichody)->Activate();  // start generátoru
   Run();                       // běh simulace

   // tisk statistik:
   celk.Output();
   Lahudky.Output();
   Voziky.Output();
   for (int a=0; a < POC_POKLADEN; a++)
       Pokladny[a].Output();
}
```

Diskrétní simulační jazyky

Základní přehled:

- Simula67 – procesy
- Simscript – popis událostmi, ...
- SIMAN/Cinema, Arena – kombinované, bloky
- GPSS – procesy, bloky
- ...

Příklady: viz WWW

Poznámky:
SIMLIB/C++, SimPack, SimPy, ...
ns-3, OMNeT++

Shrnutí

- použití diskrétní simulace
- popis modelu (události, procesy)
- generování pseudonáhodných čísel
- systémy hromadné obsluhy
- diskrétní simulační jazyky
- implementace: fronty, kalendář událostí
  algoritmus řízení simulace ”next-event”

Poznámky:
Paralelní a distribuovaná simulace
Speciální typy diskrétní simulace (číslicové systémy, ...)

Celulární automaty (CA) – úvod

- Historie: J. von Neumann, J. Conway, S. Wolfram, ...
- Princip CA
- Varianty CA: diskrétní, spojité, stochastické
- Použití:
  - Simulace prostorových dynamických sytémů v oblastech: doprava, šíření epidemie/požáru, chemie, růst krystalů, koroze, šíření vln/trhlin, sypání písku/sněhu, proudění tekutin, ...
  - Modely umělého života, evoluce
  - Grafika: generování textur, fraktálů
  - Výpočty: některé CA jsou *Turing-complete*
- Souvislosti: teorie chaosu, složitost, fraktály, přírodní CA, kryptografie, ...

Definice CA

CA je typicky diskrétní systém:

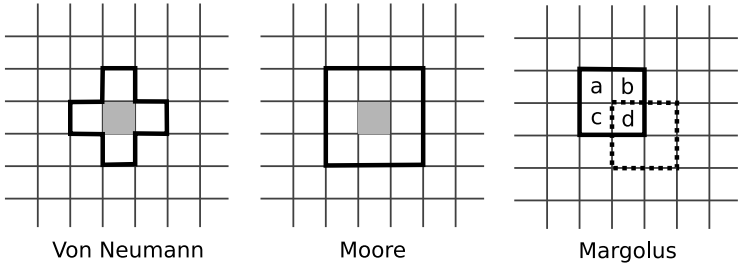
- Buňka (*Cell*): základní element, může být v jednom z konečného počtu stavů (například $\{0, 1\}$).
- Pole buněk (*Lattice*): n-rozměrné, obvykle 1D nebo 2D,
  – rovnoměrné rozdělení prostoru,
  – může být konečné nebo nekonečné.
- Okolí (*Neighbourhood*): Různé typy – liší se počtem a pozicí okolních buněk se kterými se pracuje.
- Pravidla (*Rules*): Funkce stavu buňky a jejího okolí definující nový stav buňky v čase:

$$s(t+1) = f(s(t), N_s(t))$$

Typy okolí

Závisí na rozměru prostoru a tvaru buněk.
Příklady pro 2D a čtvercové buňky:

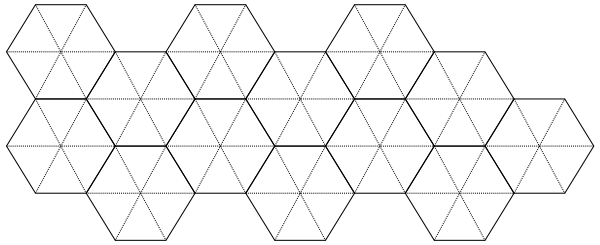
- Von-Neumann
- Moore, Extended Moore
- Margolus



Poznámka: Existuje celá řada jiných typů okolí

Typy okolí – pokračování

- Šestiúhelníkové okolí

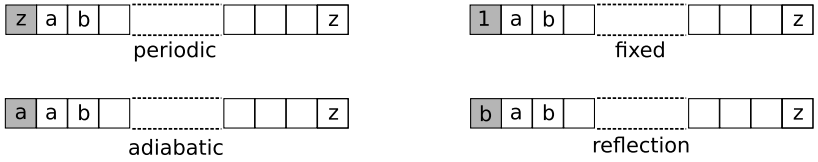


Poznámka:
Implementace: převod šestiúhelníková → čtvercová struktura

Použití: např. růst krystalů, šíření vln (FHP,...)

Okrajové podmínky

- Periodické
- Pevné (*Fixed*): konstantní hodnota
- *Adiabatic*: hodnota vedlejší buňky (= nulový gradient)
- *Reflection*: hodnota předposlední buňky



Implementace CA

Implementace uložení buněk a pravidel

- Přímá: každá buňka uložena zvlášť v poli
- Vyhledávací tabulka: jen „nenulové“ buňky
- SIMD styl: více buněk v jednom int + bitové operace
- *Hash life*: cache, quad-tree, (*memoized algorithm*)
- ...

Poznámka: Snadno paralelizovatelné

Příklad1: hra Life

Hra *Life*: CA, který nastavíme na počáteční stav a spustíme.

Definice automatu pro hru Life

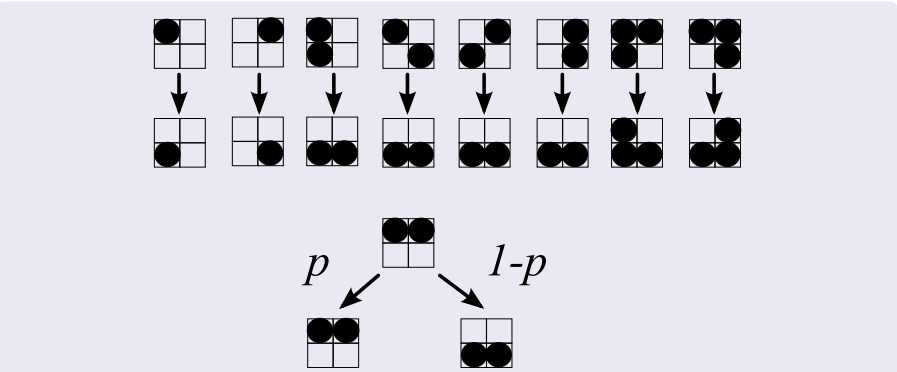
- Buňka: stavy ’0’ nebo ’1’
- Pole buněk: dvourozměrné (2D)
- Okolí (typu *Moore*): 8 okolních buněk
- Pravidla: závislost na počtu ’1’ v okolí:
  - buňka ’1’ zůstane ve stavu ’1’, když má 2–3 sousedy ’1’
  - buňka ’0’ se změní na ’1’, když má právě 3 sousedy ’1’
  - jinak bude nový stav buňky ’0’

I takto jednoduchý CA vykazuje velmi zajímavé chování – viz příklady na WWW

Příklad2: sypání písku

Sypání písku (*sand rule, sandpile* model)

- Okolí typu Margolus
- Pravidla:



Příklad3: *Ant rule*

Hypotetický mravenec (*Langton’s ant*):

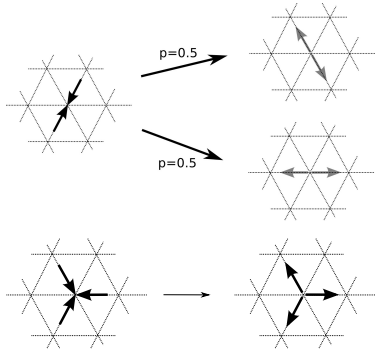
- Čtvercové pole buněk
- Buňky jsou bílé nebo šedé
- Pravidla:
  - Při příchodu na bílou buňku
    změní směr o 90 stupňů doleva a obarví ji na šedou
  - Při příchodu na šedou buňku
    změní směr o 90 stupňů doprava a obarví ji na bílou
- Vykazuje překvapivě zajímavé a složité chování

Poznámka: viz demo

Příklad4: FHP

Např. model pohybu tekutiny:

- Šestiúhelníkové okolí
- Buňky obsahují částice a jejich směr pohybu
- Pravidla viz obrázky + volný průlet v ostatních případech



Příklad5: doprava – model provozu na komunikacích

Nagel-Schreckenberg model

- Silnice je rozdělena na úseky (cca 7m)
- Úsek je buď prázdný nebo je v něm auto
- Stav auta j: rychlost ($v_j = 0, 1, ..., v_{max}$)
- Pravidla provádíme v pevném pořadí:
  - R1: Akcelerace – rychlost v_j zvýšíme o 1, max na v_{max}
  - R2: Brzdění podle vzdálenosti d_j buněk od předchozího auta $v_j = min(d_j, v_j)$
  - R3: Náhodná změna rychlosti na $max(v_j - 1, 0)$ s pravděpodobností p
  - R4: Posun auta o $v_j(t+1)$ buněk

Poznámka: pouze minimální model, existují různé varianty.

Pravidla – obecně

Musí popisovat změnu stavu pro všechny možnosti.

$$s(t+1) = f(s(t), N_s(t))$$

- Typy pravidel:
  - "legal" – z nulového vstupního stavu nesmí vzniknout nenulový stav
  - "totalistic" – rozhoduje *součet* vstupních stavů
- Počet možných pravidel závisí na počtu stavů a velikosti okolí. Například pro jednorozměrné okolí, na vstupu 3 prvky se stavy 0/1 (tzv. elementární automat) existuje celkem $2^3 = 8$ možností vstupu a tedy $2^8 = 256$ všech možných funkcí/pravidel.

Reverzibilní automaty

Reverzibilní automat je systém, který neztrácí informaci při svém vývoji v čase. Proto je v každém okamžiku možno otočit běh času nazpátek a vracet se k předchozím stavům.

Například pokud definujeme nový stav buňky takto:

$$s(t+1) = f(s(t), N_s(t)) - s(t-1)$$

je možné pro libovolné f počítat předchozí stav:

$$s(t-1) = f(s(t), N_s(t)) - s(t+1)$$

Obecné vlastnosti CA

- Konfigurace CA je definována jako stav všech buněk
- Stav CA se vyvíjí v čase a prostoru podle zadaných pravidel
- Čas i prostor jsou diskretizovány
- Počet stavů buňky je konečný
- Buňky jsou identické
- Následující stav buňky závisí pouze na aktuálním stavu

Klasifikace CA

Celulární automaty můžeme rozdělit podle jejich dynamického chování do 4 kategorií:

Třídy CA

- třída 1: Po konečném počtu kroků dosáhnou jednoho konkrétního ustáleného stavu
- třída 2: Dosáhnou periodického opakování (s krátkou periodou) nebo zůstanou stabilní.
- třída 3: Chaotické chování (výsledné posloupnosti konfigurací tvoří speciální fraktální útvary).
- třída 4: Kombinace běžného a chaotického chování (například Life), nejsou reverzibilní.

Zdroj: Wolfram S.: *New Kind of Science*, Wolfram Media, 2002

Přehled implementací CA

- Možné problémy: nekonečné pole buněk, vizualizace, ...
- Existuje řada volně dostupných nástrojů.

Příklady simulátorů CA

- Golly (HashLife)
- různé Java applety – viz WWW,
- SimCell (dynamické CA),
- Xtoys (jednoduché, C, xlib),
- cage (Python),
- ...

Spojitá simulace

Obsah:

- Typické aplikace spojité simulace
- Formy popisu spojitých modelů
- Převod rovnic na blokové schéma
- Numerické metody
- Spojité simulační jazyky
- Příklady

Aplikace spojité simulace

- Elektrické a elektronické obvody
- Řízení (automatizace)
- Fyzika
- Chemie
- Astronomie (pohyb planet)
- Biologie (model srdce)
- Ekologie (rozptyl znečištění)
- ...

Poznámka: Konkrétní příklady viz WWW

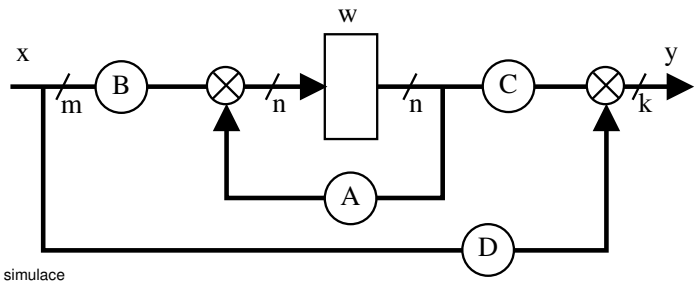
Popis spojitých systémů

- Soustavy obyč. diferenciálních rovnic (ODE)
- Soustavy algebraických rovnic
- Algebraicko-diferenciální rovnice (DAE)
- Bloková schémata
- Parciální diferenciální rovnice (PDE)
- Elektrická schémata
- ...
- Grafy signálových toků
- Kompartmentové systémy
- Systémová dynamika
- ”Bond-graphs”

Soustavy dif. rovnic: maticový popis

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\vec{w}(t) &= \mathbf{A}(t)\vec{w}(t) + \mathbf{B}(t)\vec{x}(t) \\ \vec{y}(t) &= \mathbf{C}(t)\vec{w}(t) + \mathbf{D}(t)\vec{x}(t) \end{aligned}$$

kde $\vec{x}$ je vektor m vstupů, $\vec{w}$ vektor n stavových proměnných, $\vec{y}$ vektor k výstupů a $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ matice koeficientů



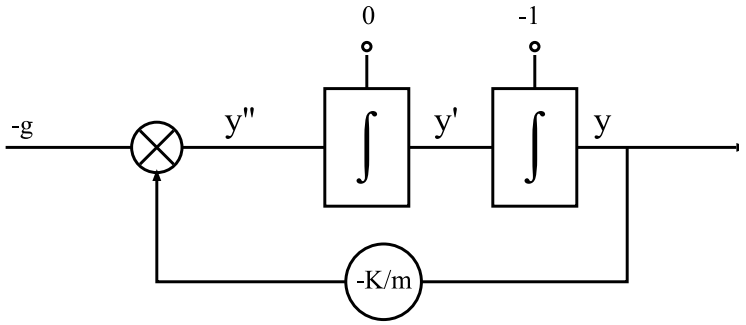
Typy dif. rovnic

Koeficienty (prvky matic $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$) mohou být:

- nezávislé na čase (stacionární systémy),
- časově proměnné,
- konstanty (lineární systémy),
- nelineární funkce (nelineární systémy).

Poznámka: Problémy při analytickém řešení

Grafový popis – bloky



Poznámka: Souvislost s analogovými počítači

Typy bloků

Funkční bloky (Bezpaměťové):

- konstanty
- T (modelový čas)
- Sin, Cos, Log, ...
- $+,\ -,\ *,\ /$
- Uživatelem definované funkce

Stavové bloky (Paměťové; mají počáteční podmínky):

- integrátory
- zpoždění
- ...

Poznámka: Hierarchie: složené bloky (i kombinované)

Převod rovnic vyššího řádu

Rovnice vyšších řádů musíme převést na soustavu rovnic prvního řádu, pro které máme vhodné numerické metody.

Metody převodu:

- Snižování řádu derivace
- Postupná integrace
- Jiné speciální metody

Poznámky:
Pozor na podmínky pro převod
Existují i num. metody pro řešení rovnic vyššího řádu

Metoda snižování řádu derivace

1. Osamostatnit nejvyšší řád derivace (viz příklad)
2. Zapojit všechny integrátory za sebe a ke vstupu prvního připojit pravou stranu z (1)

Podmínka: nesmí být derivace vstupů (x', x'', ...)

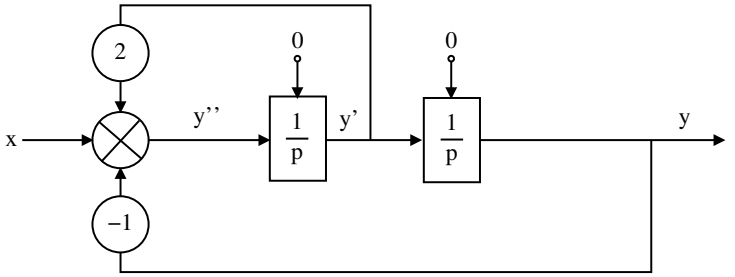
Příklad: rovnice $y'' - 2y' + y = x$

$$\begin{aligned} y'' &= 2y' - y + x \\ y' &= \int y'' \\ y &= \int y' \end{aligned}$$

Poznámky:

- Typický tvar blokového schématu
- Pozor na počáteční podmínky

Příklad: Blokové schéma



Metoda postupné integrace

Vhodná pro rovnice s derivacemi vstupů na pravé straně

1. Osamostatnit nejvyšší řád derivace
2. Postupná integrace rovnice a zavádění nových stavových proměnných
3. Výpočet nových počátečních podmínek

Podmínka: konstantní koeficienty

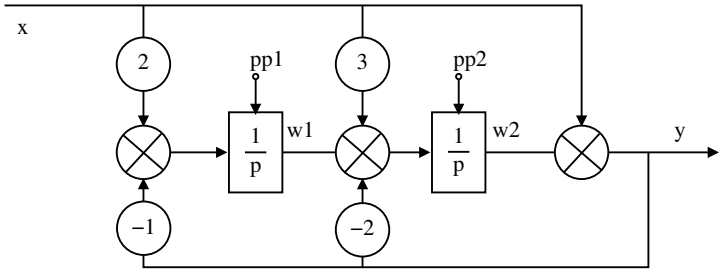
Příklad: rovnice $p^2y + 2py + y = p^2x + 3px + 2x$

$$p^2y = p^2x + p(3x - 2y) + (2x - y)$$
$$py = px + (3x - 2y) + \frac{1}{p}(2x - y), \text{ proměnná } w_1 = \frac{1}{p}(2x - y)$$
$$py = px + (3x - 2y) + w_1$$
$$y = x + \frac{1}{p}(3x - 2y + w_1), \text{ proměnná } w_2 = \frac{1}{p}(3x - 2y + w_1)$$
$$y = x + w_2$$

Metoda postupné integrace – příklad

Výsledná soustava rovnic:

$$w_1 = \frac{1}{p}(2x - y), \qquad w_1(0) = y'(0) - x'(0) - 3x(0) + 2y(0)$$
$$w_2 = \frac{1}{p}(3x - 2y + w_1), \qquad w_2(0) = y(0) - x(0)$$
$$y = x + w_2$$



Numerické metody

Při spojité simulaci potřebujeme metody pro:

- řešení ODR 1. řádu (*Initial Value Problem*)
- řešení algebraických rovnic (hledání kořenů – řešení tzv. rychlých smyček)
- (také řešení PDR atd., ale ne v tomto předmětu)

Poznámky:

- Existuje celá řada metod (viz např *Netlib*)
- Je nutné znát vlastnosti numerických metod

Metody pro řešení ODR 1.řádu

Hledáme řešení rovnice

$$y' = f(t, y)$$

které má tvar:

$$y(T) = y_0 + \int_0^T f(t, y)dt$$

Na počítači je řešení aproximováno v bodech $t_0, t_1, t_2, ...t_n$

Integrační krok: $h_i = t_{i+1} - t_i$

Poznámka: Integrační krok nemusí být konstantní

Princip, klasifikace

Obecný princip metody *N*-tého řádu:

1. Aproximace $y(T)$ polynomem N-tého stupně (Taylorův rozvoj)
2. Extrapolace – výpočet $y(t+h)$

Klasifikace metod:

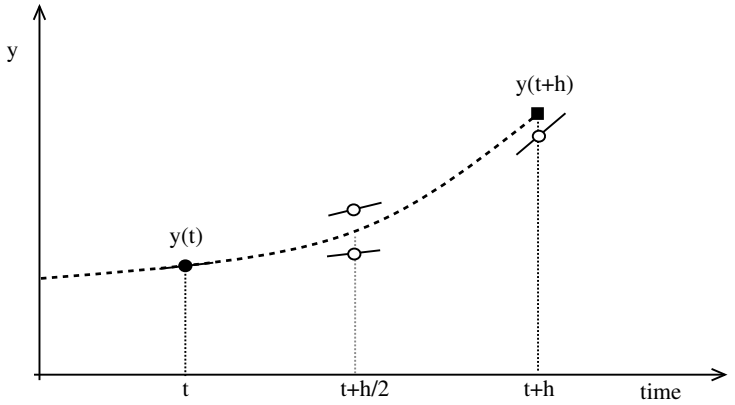
- Jednokrokové – vychází jen z aktuálního stavu
- Vícekrokové – používají historii stavů/vstupů

Další možné dělení:

- Explicitní – výsledek získáme dosazením do vzorce
- Implicitní – vyžadují řešení algebraických rovnic v každém kroku

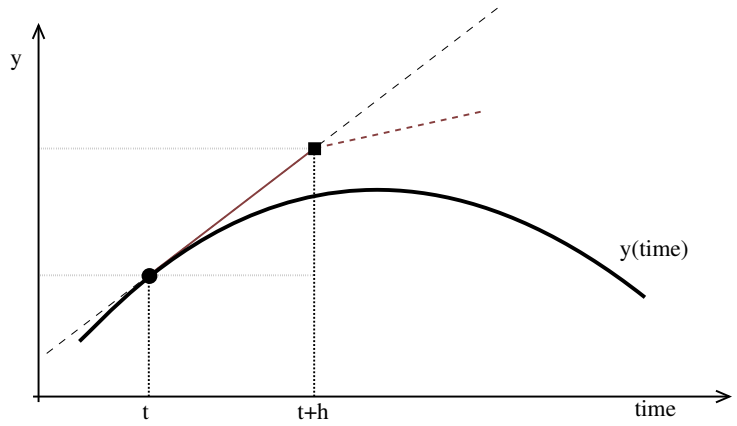
Jednokrokové metody

Princip jednokrokových metod (RK4):



Eulerova metoda — princip

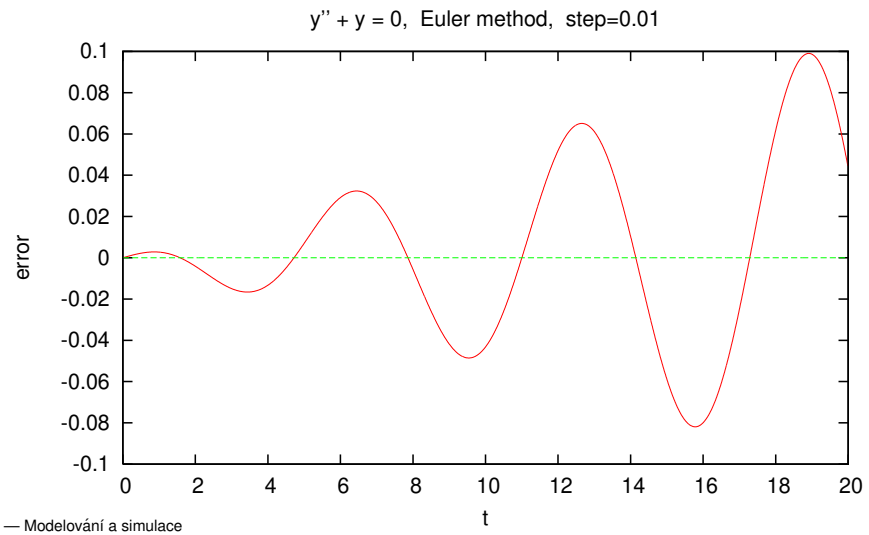
$$y(t+h) = y(t) + hf(t, y(t))$$



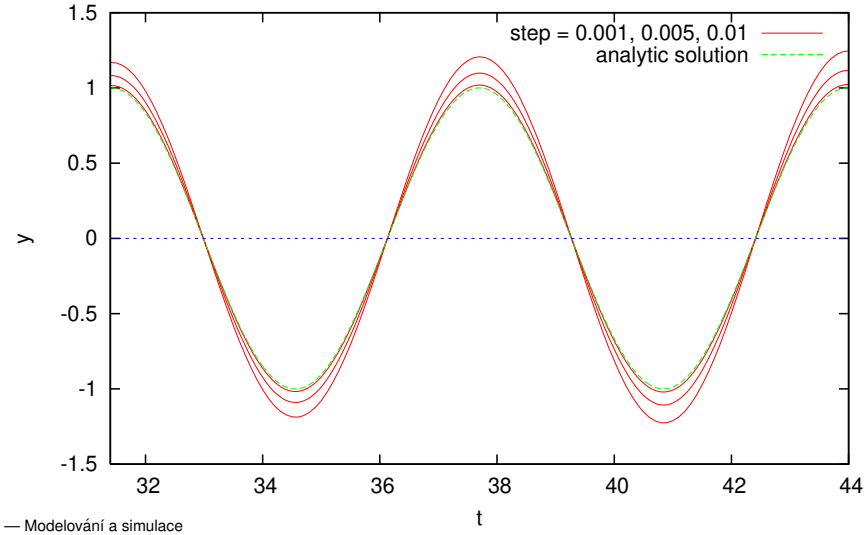
Eulerova metoda — implementace a příklad

```
double  yin[2],  y[2] = { 0.0, 1.0 },  time = 0,  h = 0.001;
void Dynamic() {          // f(t,y): výpočet vstupů integrátorů
    yin[0] = y[1];        // y'
    yin[1] = -y[0];       // y''
}
void Euler_step() {       // výpočet jednoho kroku integrace
    Dynamic();            // vyhodnocení vstupů integrátorů
    for (int i = 0; i < 2; i++)  // pro každý integrátor
        y[i] += h * yin[i];      // vypočteme nový stav
    time += h;            // posun modelového času
}
int main() { // Experiment: kruhový test, čas 0..20
    while (time < 20) {
        printf("%10f %10f\n", time, y[0]);
        Euler_step();
    }
}
```

Příklad: Absolutní chyba Eulerovy metody



Příklad: vliv velikosti kroku



Metody Runge-Kutta

Skupina metod: RK1=Euler, RK2, RK4, RK8, ...

RK2: 2. řád

$k_1 = hf(t, y(t))$
$k_2 = hf(t + \frac{h}{2}, y(t) + \frac{k_1}{2})$
$y(t + h) = y(t) + k_2$

RK4: 4. řád

$k_1 = hf(t, y(t))$
$k_2 = hf(t + \frac{h}{2}, y(t) + \frac{k_1}{2})$
$k_3 = hf(t + \frac{h}{2}, y(t) + \frac{k_2}{2})$
$k_4 = hf(t + h, y(t) + k_3)$
$y(t + h) = y(t) + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6}$

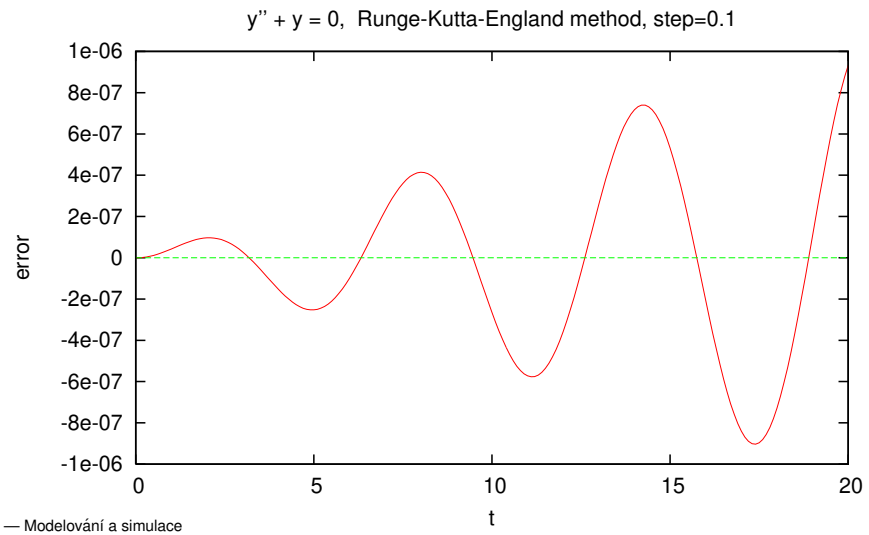
Metody Runge-Kutta — pokračování

Často používané metody — každý spojitý simulační systém obsahuje alespoň jednu RK metodu

Poznámky:

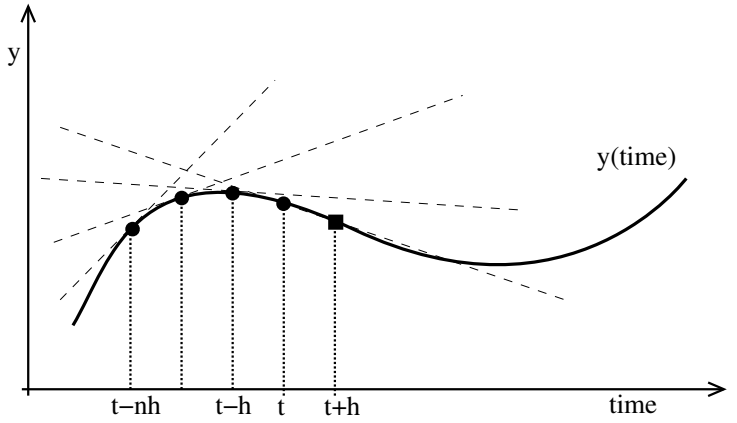
- Implementace — viz WWW
- Různé další varianty (např. Dormand-Prince 45)
- Specifikace metody tabulkou: *Butcher tableau*
- Odhad chyby
- Změna kroku na základě odhadu chyby
- Existují také implicitní metody RK — viz WWW

Přesnost metody Runge-Kutta — příklad



Vícekrokové metody – princip

Používají hodnoty zapamatované z předchozích kroků



Vícekrokové metody

Adams-Bashforth:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3})$$

Metody typu *prediktor/korektor* zpřesňují výsledek:

Adams-Bashforth-Moulton:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2})$$

Poznámky:
Problém startu metody (řešení: např. použití jednokrokové metody pro první kroky).
Existují i samostartující vícekrokové metody.

Vlastnosti integračních metod

Chyba metody:

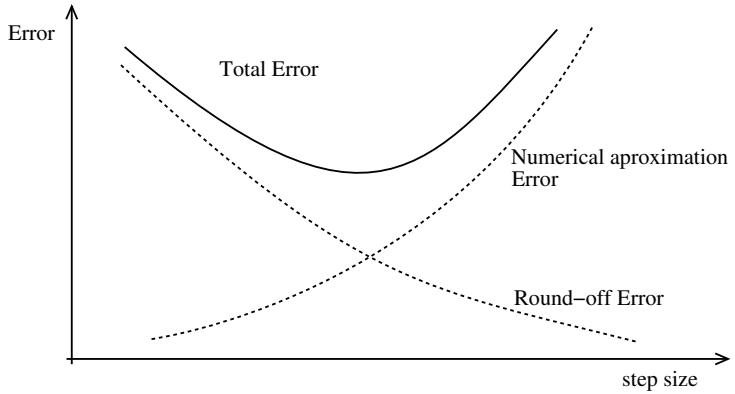
- Lokální chyba (v jednom kroku)
  - Chyba zaokrouhlovací (*round-off error*)
  - Chyba aproximace (*truncation error*)
- Akumulovaná (globální) chyba – maximum odchylky od přesného řešení.

Stabilita metody:

- Stabilita numerického řešení
- Vliv velikosti integračního kroku na stabilitu

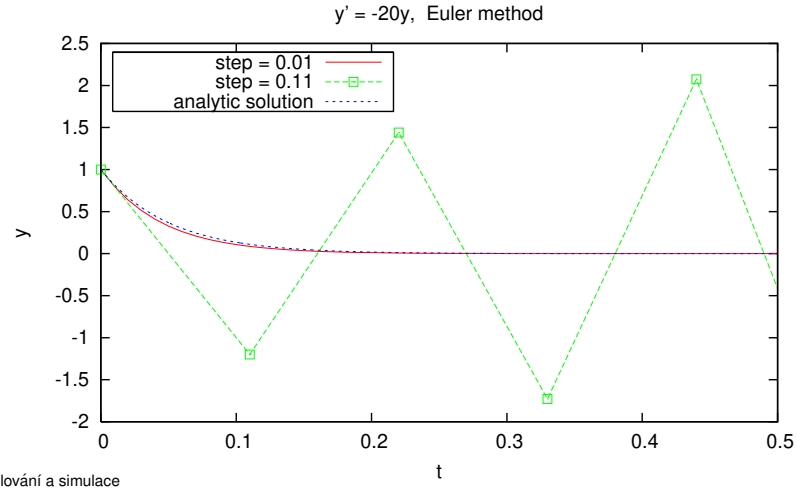
Poznámka: Příklady nestability/nepřesnosti

Lokální chyba numerické metody



Stabilita numerické metody — příklad

Rovnice: $y' = -20y$, počáteční podmínka: $y(0) = 1$



Tuhé systémy (stiff systems)

Problém: velmi rozdílné časové konstanty

Příklad tuhého systému/rovnice:

$$y'' + 101y' + 100y = 0$$

Řešení:

- Použití speciálních integračních metod (implicitních)
- Zkrácení kroku – často nelze (akumulace chyb, malá efektivita výpočtu)

Poznámky: Koeficient tuhosti, explicitní/implicitní metody, oblast stability, A-stabilita, atd. (Podrobnosti viz literatura.)

Výběr integrační metody

Neexistuje univerzální (nejlepší) metoda.

- Obvykle vyhovuje některá varianta metody Runge-Kutta 4. řádu.
- Nespojitosti ve funkci $f(t, y)$ snižují efektivitu vícekrokových metod (časté startování).
- Tuhé systémy vyžadují speciální implicitní metody.
- Pro ověření přesnosti výsledků je třeba vyzkoušet různé integrační metody nebo různé velikosti kroku.
- Existují meze velikosti kroku (viz stabilita, přesnost).
- Některé metody umí tzv. "*dense output*" (interpolaci výsledného průběhu uvnitř kroku).

Příklad: Systém dravec–kořist

Rovnice systému dravec-kořist (*Lotka-Volterra*):

$$\frac{dx}{dt} = k_1 x - k_2 xy$$
$$\frac{dy}{dt} = k_2 xy - k_3 y$$

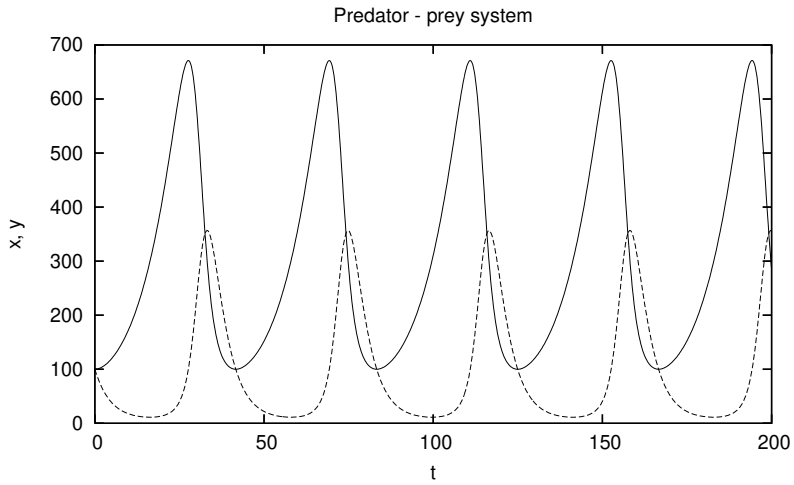
kde:

- x množství kořisti
- y množství dravců

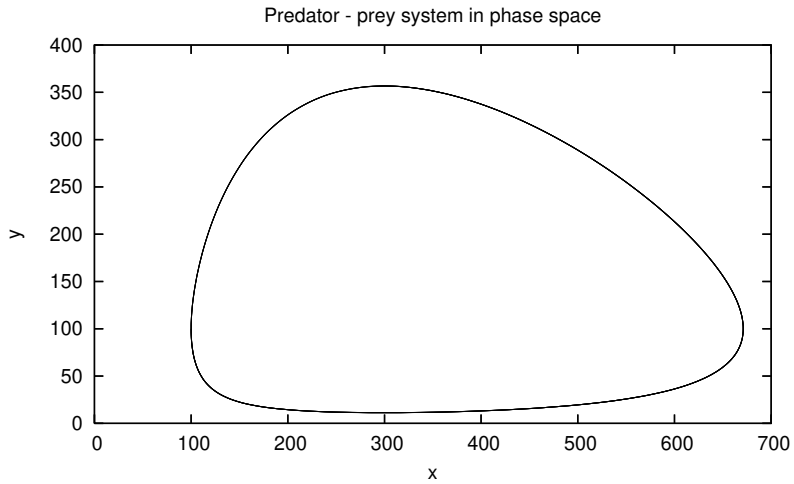
Zobrazení výsledků:

- v čase
- ve fázové rovině (*phase space*)

Příklad: dravec–kořist, zobrazení v čase



Příklad: dravec–kořist, fázová rovina



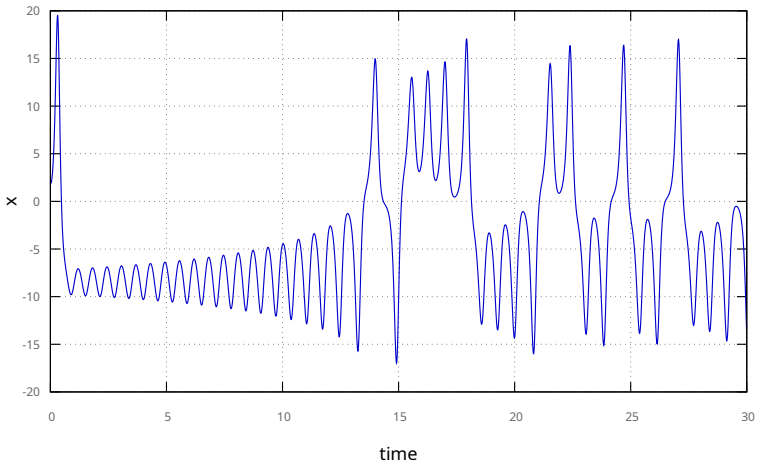
Příklad: chaos (*Lorenz equations*)

- Nelineární diferenciální rovnice

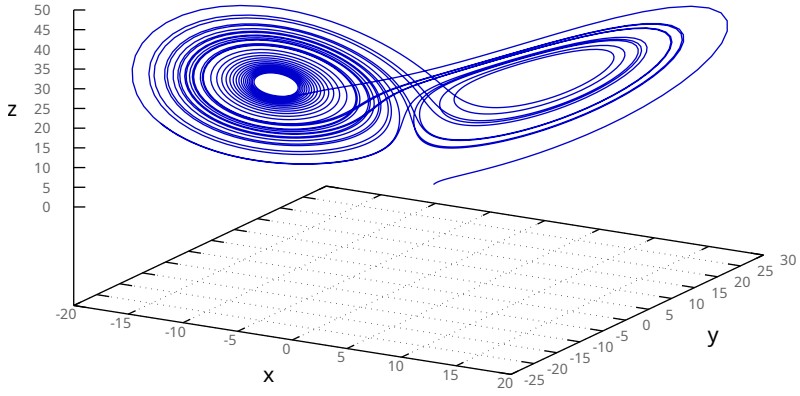
$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x)$$
$$\frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y$$
$$\frac{dz}{dt} = xy - \beta * z$$

- Parametery: $\sigma = 10 \quad \rho = 28 \quad \beta = 8/3$
- Chaotické chování
- Příklad $x(0) = 2 \quad y(0) = 1 \quad z(0) = 1$

Příklad: chaos – výsledky



Příklad: chaos – výsledky 3D



Spojité simulační jazyky

Nástroje na popis modelu + popis experimentů

Algoritmus řízení spojité simulace:

1. Inicializace (nastavit počáteční stav)
2. Cyklus dokud není konec simulace:
   1. Pokud je vhodný čas provedeme výstup (tisk)
   2. Vyhodnocení derivací a výpočet nového stavu
   3. Posun modelového času
3. Ukončení, výstup

Poznámky: Pořadí vyhodnocování. Přesné dokročení na koncový čas.

Problém uspořádání funkčních bloků

Výpočet závisí na pořadí vyhodnocování *funkčních* bloků

Příklad:

```
a = fa(1,b)   # b ještě není vypočítáno = chyba
b = fb(a)
c = fc(a,b)
...
```

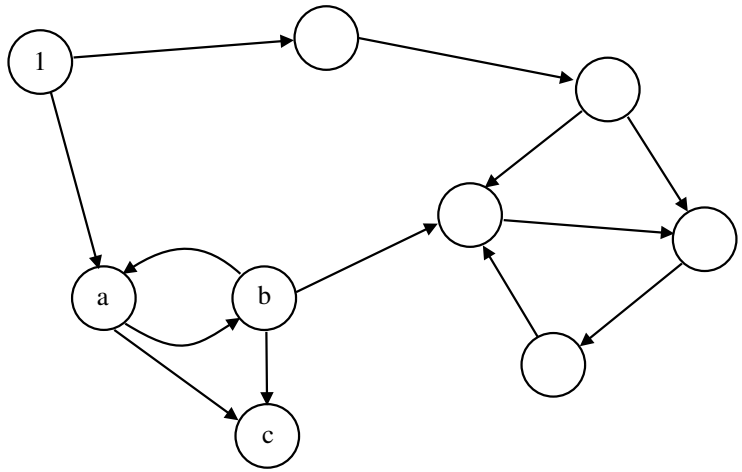
Řešení:

- Seřazení funkčních bloků (*topological sort*)
- Vyhodnocování na žádost (viz SIMLIB/C++)

Poznámka: Paměťové bloky (integrátory) mají oddělený vstup a výstup, proto jsou nezávislé na pořadí vyhodnocování.

Řazení funkčních bloků

Princip algoritmu (hledání silných komponent grafu):



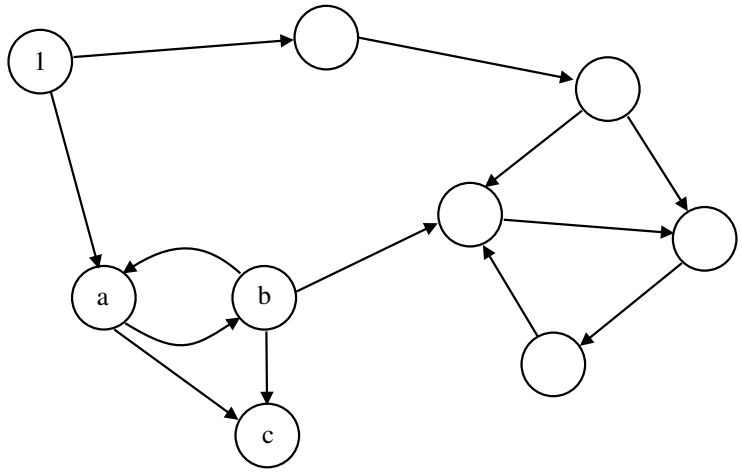
Rychlé smyčky

Problém: cyklus v grafu závislostí funkčních bloků
(způsobeno například příliš vysokou úrovní abstrakce)

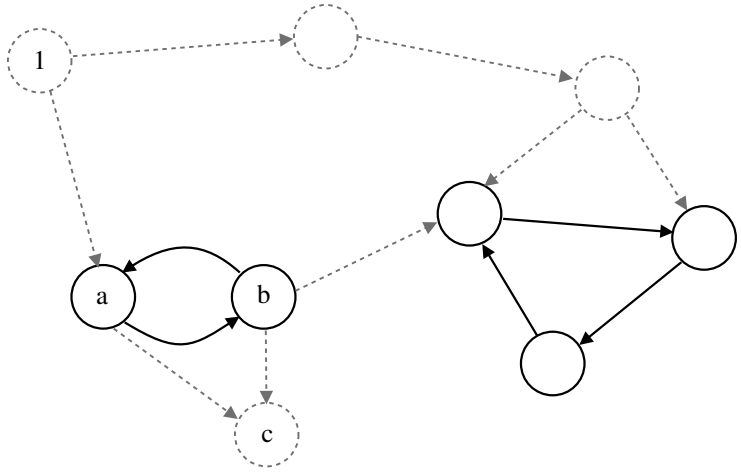
Řešení:

- Rozpojení cyklu speciálním blokem, který (například iteračně) řeší algebraické rovnice.
  Metody: půlení intervalu, Regula-falsi, Newtonova, ...
- Přepracování modelu na model bez smyček,
  například zpřesnění modelu (vložení integrátoru).

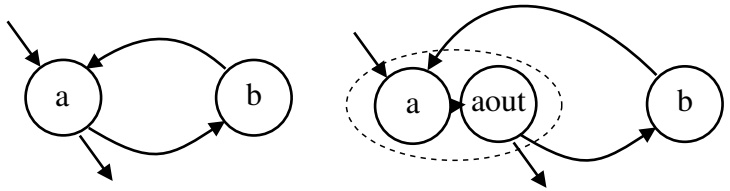
Rychlé smyčky — obrázek 1



Rychlé smyčky — obrázek 2



Rychlé smyčky — možné řešení



Parciální diferenciální rovnice (PDR, *PDE*)

Obsahují derivace podle *více proměnných* (např. prostorových souřadnic)

Řešení: diskretizace v prostoru = nahrazení prostorových derivací diferencemi (metoda přímek)

Příklad: kmitající struna — řešení wiz WWW

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Počáteční podmínky: $y(x,0) = -\frac{4}{l^2}x^2 + \frac{4}{l}x$ a $y'(x,0) = 0$
Okrajové podmínky: $y(0,t) = y(l,t) = 0$
Diskretizace:

$$\left.\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right|_{x_i} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta x^2}$$

Shrnutí

- Oblasti použití spojité simulace
- Popis modelu
- Numerické metody a jejich základní vlastnosti
- Jazyky, implementace, problémy
- Nároky na výkon počítače

Poznámky: Paralelní simulace, superpočítače

Spojité simulační nástroje – přehled

- Matlab/Simulink (R), SciLab, GNU Octave
- Modelica: Dymola (R), OpenModelica
- ...
- SIMLIB/C++
- SciPy
- GNU Scientific Library
- více viz odkazy na WWW

Poznámka: Netlib, SUNDIALS, ...

SIMLIB/C++

C++ knihovna pro spojitou i diskrétní simulaci

Přehled prostředků pro spojitou simulaci:

- Globální proměnné (typicky jsou pouze pro čtení):
  `StepSize`, `MinStep`, `MaxStep`, ...
- Bloky: `Integrator`, `Constant`, ...
- Blok reprezentující modelový čas: `T`
- Odkaz na blokový výraz: `Input` (a blok `Expression`)

Doplňky: kombinovaná simulace, 2D, 3D, fuzzy, optimalizace

SIMLIB – typy bloků

Třídy definované v SIMLIB/C++:

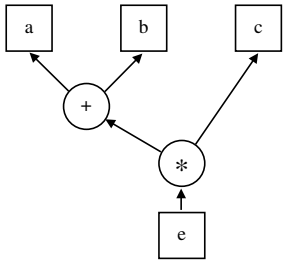
- Konstanty, parametry, proměnné:
  `Constant`, `Parameter`, `Variable`
- Funkční bloky:
  `Function`, `Sin`, `Exp`, `Max`, `Sqrt`, `Abs`, ...
  `Lim`, `DeadZone`, `Frict`, ...
  pro blokové výrazy: `_Add`, `_Mul`, ...
- Stavové bloky:
  - `Integrator`
  - Nelinearity se stavem: `Hysteresis`, `Relay`, `Blash`

Poznámka: `Relay` přesně detekuje okamžik přepnutí

Blokové výrazy v SIMLIB/C++

- Automatická konstrukce výrazových stromů (používá přetěžování operátorů v C++)
- Metoda bloku `double Value()` vyhodnotí vstupy voláním jejich metody `Value` a vrátí výsledek

Příklad: `Expression e = (a + b) * c`



Poznámka: Pozor: Blok `T` reprezentuje modelový čas, protože proměnnou `Time` nelze použít.

SIMLIB – popis experimentu

Sledování stavu modelu:

- třída `Sampler` – periodické volání funkce
- funkce `SetOutput(filename)` – přesměrování výstupu
- funkce `Print(fmt,...)` – tisk typu `printf`

Nastavení parametrů simulace:

- krok – `SetStep(minstep,maxstep)`
- požadovaná přesnost – `SetAccuracy(abs,rel)`
- integrační metoda – `SetMethod(name)`
  (Metody: ”abm4”, ”euler”, ”rke”(default), ”rkf3”, ”rkf5”, ”rkf8”)

Řízení simulace:

- `Init(t0,t1)`, `Run()`
- `Stop()` – ukončení aktuálního experimentu (běhu)
- `Abort()` – ukončení programu

SIMLIB – příklad

```
// kmitání kola (verze 2 - několik experimentů)
// popis systému: y'' = ( F - D * y' - k * y ) / M
//                nulové počáteční podmínky
#include "simlib.h"
struct Kolo {                    // popis systému
   Parameter M, D, k;
   Integrator v, y;
   Kolo(Input F, double _M, double _D, double _k):
      M(_M), D(_D), k(_k),       // parametry systému
      v( (F - D*v - k*y) / M ),  // rychlost
      y( v )  {}                 // výchylka
      void PrintParameters() {
         Print("# hmotnost = %g kg \n", M.Value());
      }
};
```


SIMLIB – příklad

```
// Parametry:
double _m=5, _d=500, _k=5e4; // implicitní hodnoty

// Objekty modelu:
Constant F(100);             // síla působící na kolo
Kolo k(F, _m, _d, _k);       // instance modelu kola

// Sledování stavu modelu:
void Sample() {
  Print("%f %g %g\n", T.Value(),k.y.Value(),k.v.Value());
}
Sampler S(Sample, 0.001);
```


SIMLIB – příklad

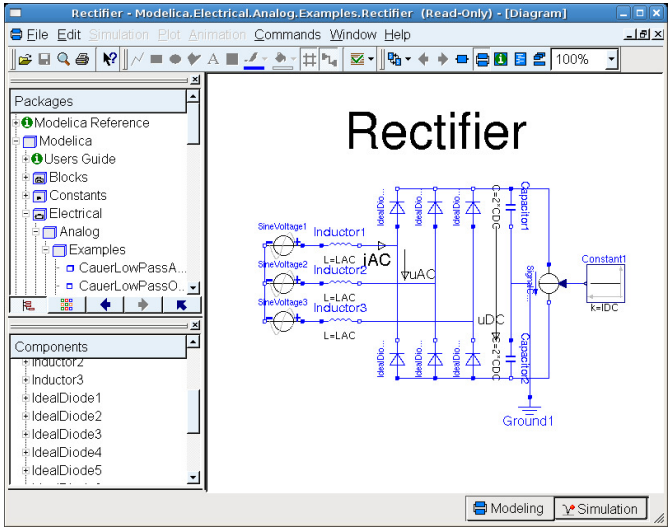
```
int main() {                 // Popis experimentů ...
 SetOutput("kolo2.dat");
 _Print("# KOLO2 - model kola (více experimentů)\n");
 for(double m=_m/2; m<=_m*5; m*=1.2) {
   k.M = m;     // parametr M
   k.D = _d;    // parametr D
   k.k = _k;    // parametr k
   k.PrintParameters();
   Print("# Time  y  v \n");
   Init(0, 0.3);             // inicializace experimentu
   SetAccuracy(1e-6, 0.001); // max. chyba integrace
   Run();                    // simulace
   Print("\n");  // oddělí výstupy experimentů (GnuPlot)
 }
}
```


Dymola, OpenModelica

- Integrované prostředí
  Modelica + GUI + knihovny
- Modelica – simulační jazyk
- Modelica library – std. knihovna
- Nástroj pro modelování fyzikálních systémů
- OpenModelica (open source)
- Dymola (komerční program, demo verze je volně k dispozici)

Poznámka: Existují i další alternativy.

Grafické rozhraní



Přehled vlastností

- Překlad Modelica → C, závislost na překladači C
- Výstupní formát kompatibilní s MatLab
- Snadné skládání modelů z komponent (knihovny)
- Snadno rozšiřitelné
- Symbolické řešení některých rovnic (algebraické smyčky, soustavy algebraických rovnic, ...) redukuje náročnost numerického řešení modelu
- Efektivní (umožňuje *real-time hardware-in-the-loop* simulaci)

Jazyk Modelica

- Simulační jazyk vyvíjený od roku 1996
- Vznikla oddělením od Dymoly
- Nezisková organizace: *Modelica Association*
- Objektově orientovaný jazyk
- Popis rovnicemi: diferenciální, algebraické, diskrétní
- Může kontrolovat fyzikální jednotky
- Multimodely pro různé fyzikální systémy
- Existuje standardní knihovna komponent
- Použití: průmysl, výzkum, ...

Modely v Modelice

- Různé knihovny komponent (modelů):
  - Mechanické: např. převodovky, motory, roboty
  - Elektrické a elektronické obvody: RLC, diody
  - Hydraulické: čerpadla, potrubí
  - Tepelné: chladiče, vedení tepla
  - ...
- Vytváření nových komponent/knihoven
- Modely řídicích systémů, ...

Příklad: elektrický obvod – RC článek

```
model rc "Model obvodu RC"
  Resistor     R(R=1000);
  Capacitor    C(C=0.001);
  SineVoltage  U(offset=5, V=0.5, freqHz=1);
  Ground       ground;
equation
  connect(U.n, C.n);    // propojovací rovnice
  connect(U.p, R.p);
  connect(R.n, C.p);
  connect(U.n, ground.p);
end rc;
```


Definice základních komponent obvodu

```
connector Pin
  Voltage      v;
  flow Current i;  // flow => součet=0
end;

partial model OnePort "abstraktní bázová třída"
  Pin p, n;
  Voltage v;   // napětí
  Current i;   // proud
equation
  v = p.v - n.v;
  0 = p.i + n.i;
  i = p.i;
end OnePort;
```


Ideální rezistor a kondenzátor

```
model Resistor "ideální rezistor"
  extends OnePort;
  parameter Real R(unit="Ohm") "odpor";
equation
  R*i = v;          // Ohmův zákon
end Resistor;


model Capacitor "ideální kondenzátor"
  extends OnePort;
  parameter Real C(unit="F") "kapacita";
equation
  C * der(v) = i;  // diferenciální rovnice
end Capacitor;
```


Modelica – shrnutí

- V praxi používané systémy (Dymola, OpenModelica)
- Otevřený jazyk Modelica + std. knihovna
- Numerické metody (DASSL, ...)
- Výhody
- Nevýhody
- Dymola (zastaralá verze, grant FRVŠ)
- Doporučení: použijte OMEdit – viz www.openmodelica.org

Kombinovaná (hybridní) simulace

= spojitá simulace + diskrétní simulace + jejich propojení

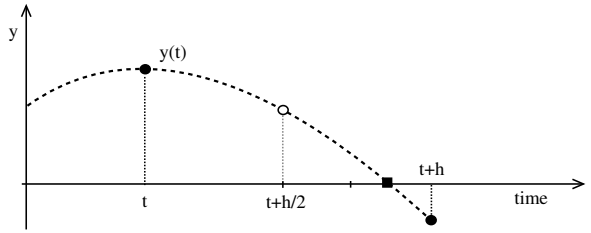
- Problém kombinace událostí a numerické integrace
- *Stavové podmínky* a detekce jejich změn
- Změna stavové podmínky způsobí *stavovou událost*
- Problém zkracování kroku (”dokročení” na stavovou událost)
- Skokové změny spojitého stavu a jejich vliv na použitou numerickou metodu
- ...

Stavové podmínky (*State Conditions*)

Problém:

Stavová událost nastane po dosažení zadané hodnoty spojité veličiny (tj. při změně stavové podmínky) – nelze ji naplánovat.

Příklad: Detekce dopadu míčku na zem
Hledáme řešení algebraické rovnice $y(t) = 0$



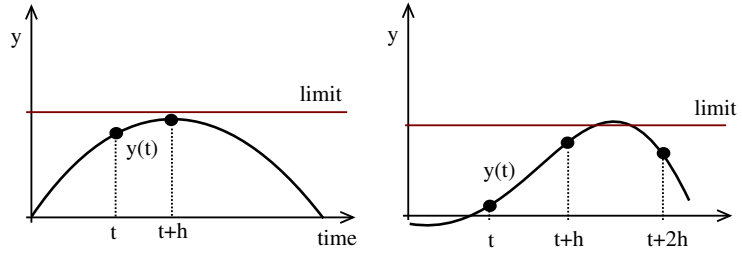
Metody: půlení intervalu, Regula-falsi, Newtonova, ...

Problémy detekce změn stavových podmínek

Problém: nedetekování stavové události způsobené

- nepřesností výpočtu
- příliš dlouhým krokem (překročení dvou změn)

Příklady:



Stavové podmínky v SIMLIB/C++

Speciální bloky – abstraktní třídy:

`Condition` (detekce jakékoli změny),
`ConditionUp` (změna false $\rightarrow$ true),
`ConditionDown` (změna true $\rightarrow$ false)

Odvozené třídy musí definovat metodu `void Action()` s popisem stavové události.

Podmínka je vždy ve tvaru `(vstup >= 0)`

Poznámka: SIMLIB používá metodu půlení intervalu při které zkracuje krok až k `MinStep`

Algoritmus řízení simulace – pseudokód

```
Inicializace stavu a podmínek
while ( čas < koncový_čas) {
    Uložení stavu a času                ***
    Krok numerické integrace a posun času
    Vyhodnocení podmínek
    if ( podmínka změněna )
        if ( krok <= minimální_krok)
            Potvrzení změn podmínek
            Stavová událost             ===
            krok = běžná_velikost_kroku
        else
            Obnova stavu a času         ***
            krok = krok/2
            if (krok < minimální_krok)
                krok = minimální_krok
}
```


Algoritmus řízení simulace – poznámky

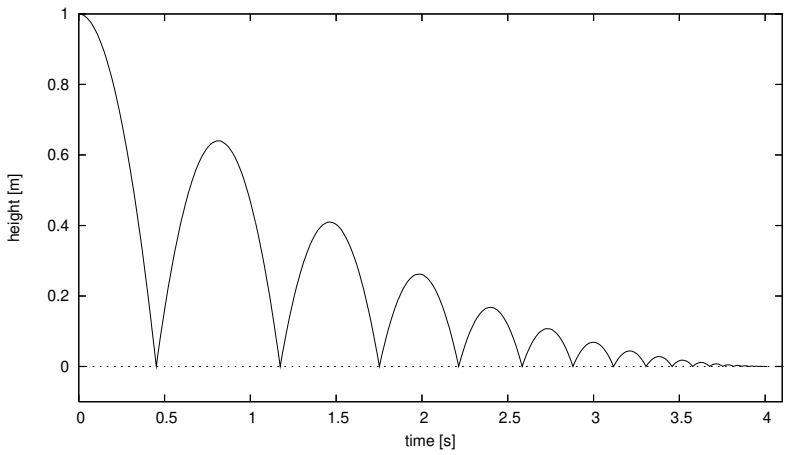
- Jde pouze o část algoritmu řízení kombinované simulace
- Pseudokód patří do algoritmu *next-event* místo:
  `Time = čas příští události`
- `koncový_čas` je čas příští události nebo čas konce simulace
- Stavová událost může plánovat událost (a tím změnit `koncový_čas`).
- `Krok numerické integrace` – délka posledního kroku před koncovým časem musí být vhodně upravena – tzv ”dokročení”, ale může nastat problém s minimální délkou kroku, proto je dobré použít následující kód:

```
if (Time + krok*1.01 > koncový_čas)
    krok = koncový_čas - Time;
```

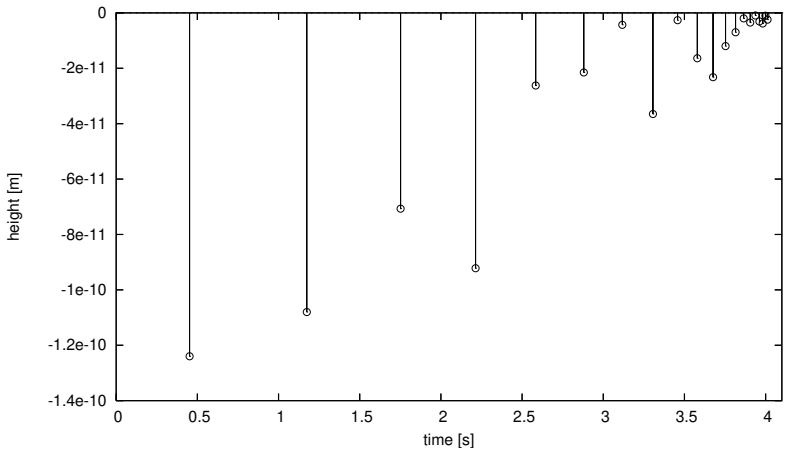

Příklad: skákající míček (SIMLIB)

```
struct Micek : ConditionDown {  // skákající míček
  Integrator v,y;               // stavové proměnné
  unsigned count;
  void Action() {
      v = -0.8 * v.Value();     // ztráta energie...
      y = 0;                    // eliminace nepřesnosti
      if(count>=20)             // max 20 dopadů
        Stop();                 // konec experimentu
  }
  Micek(double initialposition) :
    ConditionDown(y),  // (y>=0) změna TRUE --> FALSE
    v(-g),                      // y' = INTG( -g )
    y(v, initialposition),      // y  = INTG( y' )
    count(0) {}  // inicializace počtu dopadů/odrazů
};
Micek m1(1.0);                  // instance modelu
```


Příklad: skákající míček – výsledek



Příklad: míček – chyba detekce (Minstep= 10^{-9})



Simulace číslicových systémů – přehled

Úrovně popisu:

- Elektrická – tranzistory, rezistory, kondenzátory (spojité modely)
- Logická – hradla, klopné obvody (diskrétní modely)
- Meziregistrové přenosy – čítače, řadiče, ALU (diskrétní modely)
- Systémová – procesory, paměti, periferie (diskrétní modely, hromadná obsluha, výkonnost)

Používají se specializované nástroje a techniky:

- SPICE: elektrická úroveň
- VHDL: logická, RTL
- ...

Modely signálů

Modely signálu

- Dvojhodnotové: jen 0 a 1 (málo používané, rychlé)
- Trojhodnotové: + neurčitá úroveň X
- 5-hodnotové: 0, 1, X, R (Rise=růst) a F (Fall=sestup)
  výhoda: přesnější popis, odhalí více hazardů
  nevýhoda: pomalé
- VHDL používá 9 hodnot (”UX01ZWLH-”)

Další možné hodnoty:

- Stav Z (vysoká impedance), různá ”síla” signálu (u CMOS)
  Statický (_/_) a dynamický (_/\/~) hazard, ...

Modely zpoždění

Zpoždění logických členů:

- 0 — nulové (jen pro ověření log. funkce)
- 1 — jednotkové (většinou nevhodné)
- t_d — přiřaditelné (zvlášť pro 0→1 a 1→0)
- $\langle t_1, t_2 \rangle$ — přesné (rozsah od–do)

Poznámky:
Zpoždění na spojích
Kontrola časování (např. dodržení předstihu a přesahu u klopných obvodů)

Simulační algoritmus

Řízení událostmi ⇒ problém velkého množství událostí v kalendáři (existují i další metody – např. s pevným krokem)

Selektivní sledování: vyhodnocování jen u prvků které jsou ovlivněny změnou na vstupu.

Implementace popisu modelu:

- řízení tabulkami (interpretace)
- kompilovaný model (provádění kódu)

Poznámky:
problém zpětných vazeb u sekvenčních obvodů (možné je např. iterační řešení),
problém inicializace (počáteční hodnoty signálů)

Algoritmus řízení simulace číslicových obvodů

Dvoufázový algoritmus (selektivní sledování):

```
inicializace, plánování události pro nový vstup
while (je plánována událost) {
   nastavit hodnotu modelového času na T
   for (u in všechny plánované události na čas T) {
      výběr záznamu události u z kalendáře
      aktualizace hodnoty signálu
      přidat všechny připojené prvky do množiny M
   }
   for (p in množina prvků M) {
      vyhodnocení prvku p
      if (změna jeho výstupu)
         plánování nové události
   }
}
```


Simulace poruch

Typy poruch:

- trvalá 0
- trvalá 1
- zkrat mezi funkčními vodiči

Činnost:

- Specifikace poruch – které poruchy budou modelovány
- Injekce poruch – převod modelu na model s poruchou
- Šíření poruch modelem
- Detekce poruch – projeví se porucha?
- Zpracování výsledků – vytvoření podkladů pro testy

Poznámka: Ověřování úplnosti diagnostického systému (vše opakovat pro každou poruchu) je časově náročné

Jazyky pro popis číslicových systémů

VHDL: vhodné pro složité systémy

Úrovně popisu (lze kombinovat):

- Popis struktury – propojení hradel
- Popis chování
  - algoritmem – proces
  - data flow – RTL (Register Transfer Level)
    např. `o <= transport i1 + i2 after 10 ns;`

Knihovny prvků

Poznámka: Příklady viz WWW — Například
`http://www.cs.ucr.edu/content/esd/labs/tutorial/`

VHDL – příklad

```
-- AND hradlo (ESD book figure 2.3)
-- převzato z
-- http://www.cs.ucr.edu/content/esd/labs/tutorial/

library ieee;
use ieee.std_logic_1164.all;

entity AND_ent is
    port(
        x: in  std_logic;
        y: in  std_logic;
        F: out std_logic
    );
end AND_ent;
```


VHDL – příklad

```
architecture behav1 of AND_ent is
begin
    process(x, y)
    begin -- popis chování
        if ((x='1') and (y='1')) then
            F <= '1';
        else
            F <= '0';
        end if;
    end process;
end behav1;
-- varianta 2
architecture behav2 of AND_ent is
begin
    F <= x and y;
end behav2;
```


Heterogenní modely

= Použití více různých forem popisu pro různé části modelu

Příklad heterogenního modelu řídicího systému:

- spojitá část (spojitý popis)
- A/D převod (vzorkování spojitého stavu)
- číslicový řídicí systém (např. Petriho síť)
- nebo použití fuzzy logiky (popis neurčitosti)
- případně použití neuronových sítí (učení)
- D/A převod (kombinace spojitý/diskrétní)
- ...

Poznámka: Jsou nutné odpovídající nástroje

SIMLIB – některá rozšíření

- Vektorové bloky a blokové výrazy
  - 2D vektorové diferenciální rovnice
  - 3D vektorové diferenciální rovnice
- *Fuzzy* popis modelů s neurčitostí
  - fuzzy množiny
  - fuzzy bloky – fuzzification, inference, defuzzification
  - editor fuzzy množin (Java)
- Optimalizační metody
- + další doplňky...

Poznámka:
Jde o prototypy = ne zcela úplné, používat opatrně

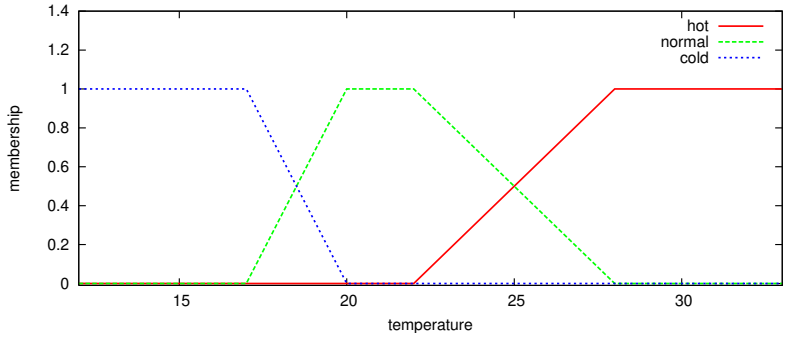
Fuzzy logika – základy

- Jde o popis jednoho typu neurčitosti – ”vágnost”
  (co znamená, že něco je ”malé” nebo ”velké” ?)
- Rozšíření Booleovské logiky (1965, Lofti Zadeh)
- Vyjádření míry určité vlastnosti – pravdivostní hodnota, stupeň příslušnosti (Pozor – vůbec nesouvisí s pravděpodobností.)
- Pojmy: fuzzy množina, funkce příslušnosti
- Použití fuzzy logiky: řízení, expertní systémy, ...

Poznámka: Podrobnosti viz např. PDF na WWW:
Navara M., Olšák P.: *Základy fuzzy množin*, ČVUT, Praha, 2002

Fuzzy množina, funkce příslušnosti

Př: teplota v místnosti, 3 fuzzy množiny a jejich funkce příslušnosti:
malá – střední – velká (”cold” – ”normal” – ”hot”)



Fuzzifikace: převod ”ostré” hodnoty na míru příslušnosti
(Příklad: 18 °C → cold:0.5, normal:0.5, hot:0)

Operace

Fuzzy

negace: $\neg_s \alpha = 1 - \alpha$

konjunkce: $\alpha \bigwedge_s \beta = min(\alpha, \beta)$

disjunkce: $\alpha \bigvee_s \beta = max(\alpha, \beta)$

Poznámka: Existují i jiné definice operací

Fuzzy blok

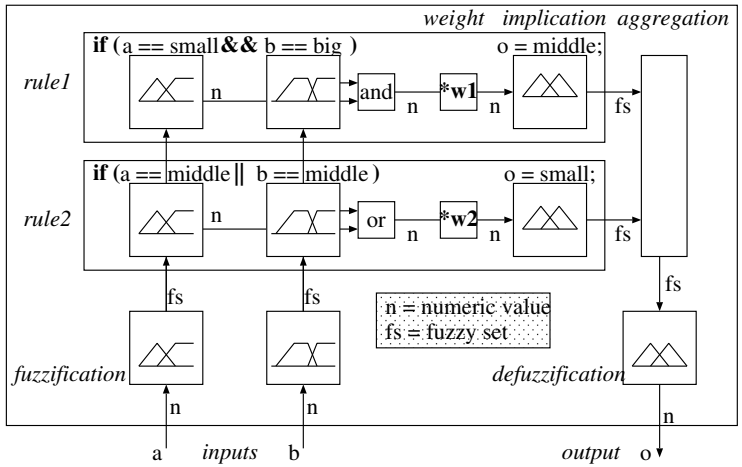
Postup vyhodnocování:

- převod vstupu na míru příslušnosti (*fuzzification*)
- aplikace pravidel (*if-then rules*)
  Příklad pravidel:

```
IF teplota IS malá       THEN topit=hodně
IF teplota IS střední    THEN topit=málo
IF teplota IS velká      THEN topit=chladit
```

- spojení výstupů pravidel (*aggregation*)
- převod na ”ostré” hodnoty (*defuzzification*)

Fuzzy blok – obrázek



Příklad v SIMLIB – pouze pro ilustraci možností

```
// Fuzzy množiny:
FuzzySet itype("itype", 0, 40,
  FuzzyTrapez("small", 0,0,18,20),
  FuzzyTrapez("medium", 18,20,22,28),
  FuzzyTrapez("big", 22,28,40,40)
);

class MyBlock : public FuzzyBlock {
  FuzzyInput in;
  FuzzyOutput o, o2;
  void Behavior() {     // Pravidla:
    if(in=="small")  weight(0.9), o="big";
    if(in=="big" || in=="medium") o="small", o2="z";
    if(in=="big" || in=="medium") { o="small"; o2="z"; }
  } // ...
};
```


Optimalizace parametrů modelu

Cíl: nalezení optimálních hodnot parametrů modelu

Pojmy: operační výzkum, lineární/nelineární programování

Optimalizační metody:

- gradientní
- simulované žíhání (Simulated Annealing)
- genetické
- ...

Nástroje: Scilab, MATLAB+OptimizationToolbox, ...

Poznámka: Složitost optimalizačních úloh

Optimalizace

Hledáme x pro minimum nebo maximum *cenové* funkce $F(\vec{x})$.

Minimalizace je algoritmus, který počítá:

$$\vec{x} \ : \ F(\vec{x}) = min \ \wedge \ C(\vec{x})$$

kde:

$\vec{x}$ je vektor hodnot parametrů

F je cenová (*Objective*) funkce

C reprezentuje různá omezení (*Constraints*) – například meze hodnot $\vec{x}$.

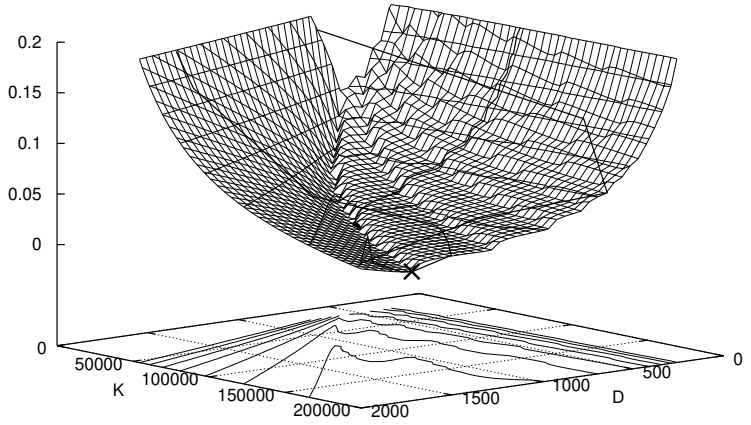
Poznámky:

Maximalizace $\Rightarrow$ použijeme $-F$.

Problém: lokální minima $\Rightarrow$ používáme *globální optimalizační metody*

Optimalizace – příklad

Ukázka hledání minima, 3 různé metody:



Vizualizace výsledků simulace

Vizualizace znamená použití interaktivních vizuálních reprezentací dat pro zlepšení našeho chápání problému.

- interaktivní diagramy
- animace
- 3D zobrazení
- video, ...
- virtuální realita

Nástroje:

- univerzální: Gnuplot, GNU plotutils, ...
- specializované: viz WWW

Poznámka: *client-server*, ...

Virtuální realita a simulace

3D interaktivní vizualizace a simulace

- prostředí, které je simulováno počítačem
- člověk je připojen na speciální rozhraní a vstupuje do simulovaného prostředí
- interakce člověk — stroj

Poznámka: Souvislost s počítačovými hrami

Analytické řešení modelů

Čistě matematické řešení modelu.

- výhody: efektivní, výsledky jsou obecné a přesné
- nevýhody: analytické řešení pro většinu modelů neznáme/neexistuje

Postup:

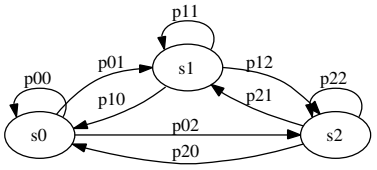
- analýza problému
- formulace matematického modelu
- zjednodušení modelu (linearizace, ...)
- matematické řešení modelu

Poznámka: Porovnat se simulací

Markovovy procesy a řetězce

- Při zkoumání dějů v SHO se často předpokládá, že v nich obsažené náhodné procesy jsou *Markovské*.
- Markovské procesy jsou náhodné procesy, které splňují *Markovovu vlastnost*: následující stav procesu závisí jen na aktuálním stavu (ne na minulosti).
- Náhodný proces $X(t)$ s diskrétním časem a diskrétními stavy, který má Markovovu vlastnost, se nazývá *Markovův řetězec*. Je ekvivalentní konečnému automatu s pravděpodobnostmi přechodů
- Pravděpodobnost stavu s_i v čase $t \in N$ označíme symbolem $\pi_i(t) := p(X(t) = s_i)$.

Markovovy řetězce



- Matice pravděpodobností přechodů: $P = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$

  (součet na řádku musí být 1)
- Aplikace: SHO, náhodná procházka, hry – házení kostkou

Systémy M/M/1

M/M/1 – viz Kendallova klasifikace SHO

- máme jedno zařízení s neomezenou FIFO frontou
- příchody požadavků: exponenciální intervaly s konstantním parametrem $\lambda > 0$, nezávisí na stavu modelu a čase
- obsluha: exponenciální trvání s parametrem $\mu > 0$.

Počet požadavků v systému $X(t)$ je Markovský proces.

Popis:

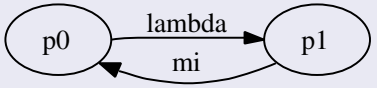
- Vektor pravděpodobností jednotlivých stavů
- Spojitý čas
- Používáme matici *intenzit* přechodů mezi stavy

Příklad 1

Jedno zařízení bez fronty – přijde-li požadavek a nemůže být obsloužen, opouští systém.
Parametry — příchody: 15 za hodinu, obsluha: 5 minut.

Jaká je pravděpodobnost, že požadavek odchází neobsloužen?

$\lambda = 15, \quad \mu = \frac{60}{5} = 12$ za hodinu, (poznámka: stabilita).



$$\begin{bmatrix} p_0 & p_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{a současně} \quad p_0 + p_1 = 1$$

Příklad 1 – ustálený stav

V ustáleném stavu se pravděpodobnosti již nemění, proto intenzita přechodů násobená pravděpodobností stavu musí být v rovnováze.

Pro *ustálený stav* platí:

$-\lambda p_0 + \mu p_1 = 0$, a také $p_0 = 1 - p_1$

Dosadíme a úpravami získáme výsledek:

$-\lambda(1 - p_1) + \mu p_1 = 0$

$-\lambda + \lambda p_1 + \mu p_1 = 0$

$p_1(\lambda + \mu) = \lambda$

$p_1 = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$

Pro naše parametry je pravděpodobnost obsazeného zařízení:

$p_1 = \frac{5}{9}$

Příklad 2

Systém M/M/1 – výdejna obědů.
Přichází 3 požadavky za minutu, výdej 15 sekund.

Jaká je

- pravděpodobnost p_0, že strávník nebude čekat,
- průměrná délka fronty L_w,
- průměrná doba čekání ve frontě T_w a
- průměrná doba strávená v systému T_s ?

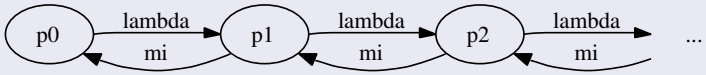
$\lambda = \frac{pocet}{cas} = \frac{3}{1} = 3$ příchody za minutu

$\mu = 4$ dokončené obsluhy za minutu (doba obsluhy $T_o = \frac{1}{\mu}$)

Systém je stabilní ($\lambda < \mu$).

Příklad 2 – rovnice pro ustálený stav

Rovnice: $\vec{\pi}(\infty)A = \vec{0}$



$$-\lambda p_0 + \mu p_1 = 0$$

$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0 = \rho p_0$ kde jsme zavedli $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$

$$\lambda p_0 - \lambda p_1 - \mu p_1 + \mu p_2 = 0$$

$p_2 = -\frac{\lambda}{\mu} p_0 + \frac{\lambda}{\mu}\frac{\lambda}{\mu} p_0 + \frac{\lambda}{\mu} p_0 = \frac{\lambda^2}{\mu^2} p_0 \quad \Rightarrow \quad p_2 = \rho^2 p_0$

...

$p_k = \rho^k p_0$

Příklad 2 – výpočet pravděpodobností

Součet pravděpodobností stavů musí být 1:

$$p_0 + p_1 + p_2 + \ \ldots \ = 1$$

Potom použijeme vzorec pro součet geometrické řady ($S = \frac{a}{1-q}$):

$$p_0 + \rho p_0 + \rho^2 p_0 + \ \ldots \ = \frac{p_0}{1-\rho} = 1$$

a po úpravě dostaneme výsledek: $p_0 = 1 - \rho$

Výsledek
Pravděpodobnost, že nebude čekat: $p_0 = 1 - \rho = \frac{1}{4} = 0.25$

Poznámka: To znamená, že s pravděpodobností p_0 zařízení nepracuje (průměrné využití zařízení je: $1 - p_0 = \rho = \frac{3}{4}$).

Příklad 2 – délka fronty

Průměrná délka fronty v ustáleném stavu je suma součinů (délka fronty * pravděpodobnost stavu s touto délkou fronty) pro všechny možné délky fronty:

$$L_w = \sum_{k=1}^{\infty} k.\pi_{k+1}(\infty) = \sum_{k=1}^{\infty} k.\rho^{k+1}(1-\rho) =$$
$$= (1-\rho)\rho^2 + 2(1-\rho)\rho^3 + 3(1-\rho)\rho^4 + \ ... \ =$$
$$= \rho^2 - \rho^3 + 2\rho^3 - 2\rho^4 + 3\rho^4 + \ ... \ =$$
$$= \rho^2 + \rho^3 + \rho^4 + ... = \frac{\rho^2}{1-\rho} \qquad \text{// součet řady}$$

Výsledek
V našem příkladu je průměrná délka fronty:

$$L_w = \frac{\rho^2}{1-\rho} = 2.25$$

Příklad 2 – doba čekání ve frontě

Doba čekání ve frontě T_w je úměrná počtu transakcí N v systému:

$$T_w = T_o.N = T_o \sum_{k=1}^{\infty} k.\pi_k(\infty) = \frac{1}{\mu}\sum k.\rho^k(1-\rho)$$
$$= \frac{1}{\mu}\frac{1}{\rho}(\sum k.\rho^{k+1}(1-\rho)) = \qquad \text{// obsah závorky již známe}$$
$$= \frac{1}{\mu}\frac{1}{\rho}\frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{1}{\mu}\frac{\rho}{1-\rho} =$$
$$= \frac{1}{\mu}\frac{\rho}{1-\frac{\lambda}{\mu}} = \frac{\rho}{\mu-\lambda} = 45s$$
$$T_s = T_w + T_o = \frac{\rho}{\mu-\lambda} + \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda+\mu-\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{1}{\mu-\lambda} = 60s$$

Pro náš příklad je průměrná doba čekání ve frontě $45s$ a průměrná doba strávená v systému je $60s$.

Příklad 2 – simulační řešení

Pro srovnání provedeme simulační experimenty v SIMLIB/C++:

Výsledky pro různou dobu simulace (od 1000 do 10^7 sekund):

čas [s]	p_0 (=nečeká)	L_w	T_w [s]	T_s [s]
1000	0.207	1.378	24.38	38.51
5000	0.226	1.646	30.32	44.31
10000	0.168	2.862	54.79	70.32
100000	0.248	2.153	42.35	57.05
1e+06	0.254	2.116	42.49	57.46
1e+07	0.250	2.255	45.16	60.16
analytické	0.25	2.25	45	60

Výsledky se blíží přesným hodnotám získaným analyticky.

Modely spolehlivosti

Spolehlivost = schopnost plnit požadované funkce podle stanovených podmínek

Pojem *spolehlivost* může zahrnovat:

- bezporuchovost
- životnost
- ...

Poznámky:

- Kvalita, ISO9000
- Modely spolehlivosti: kombinatorické, markovské, ...
- *Fail-safe* systémy

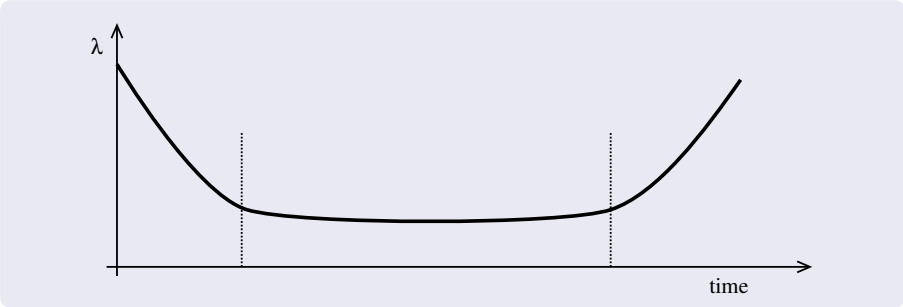
Ukazatele spolehlivosti

- Pravděpodobnost bezporuchové činnosti $R(t)$ v intervalu $\langle 0, t \rangle$: $R(t) = e^{-\lambda t}$
- Pohotovost (*availability*) $a(t)$ = pravděpodobnost, že v čase t bude systém v provozuschopném stavu. (Vlivy: četnost výpadků, rychlost oprav)
- Střední doba bezporuchové činnosti: $T_s = \int_0^\infty R(t)dt$ Anglicky: MTBF (Mean Time Between Failures)
- Intenzita poruch $\lambda(t) = \frac{1}{T_s}$

Poznámka:
Odolné systémy tolerují poruchy, pojem "*high-availability*".

Intenzita poruch

Typický průběh intenzity poruch $\lambda(t)$ – vanová křivka



Poznámka: Rané poruchy — provoz — stáří.

Kombinatorické modely spolehlivosti

- Sériové spolehlivostní zapojení:

$$R(t) = \prod_{i=1}^{n} R_i(t)$$

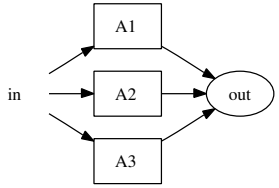
- Paralelní spolehlivostní zapojení:

$$R(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - R_i(t))$$

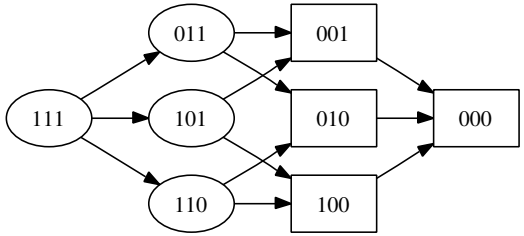
- Nevýhody: Komplikované sestavování schémat, ...

Markovské spolehlivostní modely

Příklad systému — tři prvky paralelně:



Stavový graf (1=funguje, 0=porucha, pořadí A1 A2 A3):



Shrnutí

- Markovské procesy a řetězce
- Princip analytického řešení
- Výhody/nevýhody
- Aplikace

Poznámka:
Analyticky lze řešit i jiné typy modelů (nejen výše uvedené)

Závěr

Shrnutí:

- Principy modelování a simulace
- Klasifikace systémů a modelů
- Používané metody a algoritmy
- Základy implementace simulačních nástrojů
- Aplikace simulace a souvislosti s různými obory

Poznámky:

- Co jsme vynechali
- Co se zkouší — cílové znalosti