# Modelování a simulace

Petr Peringer
peringer AT fit.vutbr.cz
Martin Hrubý
hrubym AT fit.vutbr.cz

Vysoké učení technické v Brně,
Fakulta informačních technologií,
Božetěchova 2/1,
612 00 Brno

(Verze: 12. září 2024)





## Úvod

Text je určen pro studenty FIT. Obsahuje základní přehled problematiky modelování a simulace vhodný pro studenty bakalářského studia. Předpokládají se základní znalosti programování (C, C++, ...) a matematiky (relace, derivace, integrály, dif. rovnice).

Obsah slajdů je velmi stručný, podrobnější informace jsou součástí výkladu.

Na slajdech spolupracovali:

- Martin Hrubý – Petriho sítě, náhodné procesy





## Pravidla

- Přednášky
- Minimálně 2 demo-cvičení (+doplňky)
- Samostatná práce: projekt
- Konzultace

**Hodnocení celkem 100b:**

- 10b půlsemestrální test
- 20b projekt
- Zápočet: alespoň 10 z výše uvedených bodů
- 70b zkouška (požadováno min. 30 bodů)





## Zdroje informací

- Literatura
- WWW odkazy
- Oficiální stránka:
  `https://www.fit.vut.cz/study/course/IMS/`
- Aktuální informace pro studenty:
  `https://www.fit.vut.cz/person/peringer/public/IMS/`
- Vlastní uvažování a (simulační) experimenty
- ...





## Literatura

- Fishwick P.: *Simulation Model Design and Execution: Building Digital Worlds*, Prentice-Hall, 1995
- Law A., Kelton D.: *Simulation Modelling & Analysis*, second edition, McGraw-Hill, 1991
- Rábová a kol.: *Modelování a simulace*, skriptum VUT, Brno, 1992
- Ross S.: *Simulation*, 3rd edition, Academic Press, 2002
- (Zeigler B., Muzzy A., Kofman E.: *Theory of Modelling and Simulation*, 3rd edition, Academic Press, 2019)
- ...

**Poznámky:**
Studijní opora — viz IS
(Poznámka: Informace k zadání Bc práce — témata.)





## Modelování systémů na počítačích

**Přehled**

- Základní pojmy a princip
- Souvislosti a aplikace
- Výhody a nevýhody
- Alternativy
- Úvod do teorie systémů
- Typy simulace
- Velmi stručný přehled simulačních nástrojů





## Základní pojmy (systém, model)

**Systém =**
soubor elementárních částí (prvků systému), které mají mezi sebou určité vazby.

Rozlišujeme (mimo jiné)

- reálné systémy
- nereálné systémy (fiktivní, ještě neexistující)

**Model =**
napodobenina systému jiným systémem.

- Model = reprezentace znalostí.
- Klasifikace: fyzikální modely, matematické modely, ...
- Přírodní zákony jsou matematické modely
  (Příklad: Ohmův zákon $u = Ri$).





## Základní pojmy (modelování, simulace)

**Modelování =**
vytváření modelů systémů.

- Modelování je velmi používaná metoda
- Modelovat lze jen to, co známe a umíme popsat

**Simulace =**
získávání nových znalostí o systému experimentováním s jeho modelem.

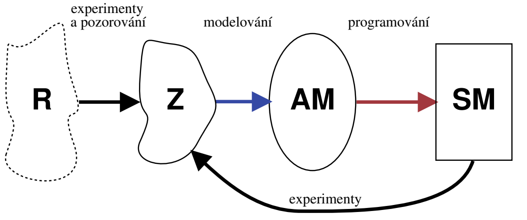
- Budeme se zabývat pouze simulací na číslicových počítačích.





## Princip modelování a simulace

Realita → Znalosti → Abstraktní model → Simulační model




Cílem je získat nové znalosti o modelovaném systému.

## Základní etapy modelování a simulace

1. *Vytvoření abstraktního modelu*: Formování zjednodušeného popisu zkoumaného systému.
2. *Vytvoření simulačního modelu*: Zápis abstraktního modelu formou programu.
3. *Verifikace a validace*: Ověřování správnosti modelu.
4. *Simulace*: Experimentování se *simulačním* modelem.
5. *Analýza a interpretace výsledků*: Získání nových znalostí o zkoumaném systému.





## Souvislosti

- pozorování a reálné experimenty
- *Computational Science*
- učení, hry — "co se stane když"
- programování (simulační model je program)
- algoritmy, datové struktury
- numerická matematika (integrační metody, ...)
- počítačová grafika (vizualizace výsledků)
- technické vybavení: superpočítače, ...
- teorie systémů (stabilita, citlivost, chaos, ...)
- pravděpodobnost a statistika
- + obory související s modelovaným systémem





## Příklady použití simulace v praxi

- **Věda:** biologie, lékařství, ekologie, chemie, jaderná fyzika, astronomie, sociologie, ...
  (Např. předpověď počasí, zemětřesení, šíření epidemií, ...)
- **Technika:** strojírenství, stavebnictví, doprava, elektro, ...
  (Dynamika konstrukcí, simulace mikroprocesorů, optimalizace motoru, ... )
- **Ekonomika** (Vývoj cen na burze, ...)
- **Výuka** (Různé demonstrační modely)
- **Film** (Vizuální efekty všeho druhu)
- **Hry** (Simulátor letadla, ...)
- ...





## Výhody simulačních metod

- Cena (např. "crash" testy automobilů)
- Rychlost (růst rostlin, vznik krystalů, pohyb planet)
- Bezpečnost (jaderné reakce, šíření epidemií)
- ...
- Někdy jediný způsob (srážky galaxií)
- Možnost modelovat velmi složité systémy (mikroprocesory, různé biologické systémy, počasí)

Velmi často je výhodnější experimentovat s modely, než s originálními systémy.





## Problémy simulačních metod

- Problém validity (platnosti) modelu.
- Někdy velmi vysoká náročnost vytváření modelů.
- Náročnost na výkon počítačů.
- Získáváme konkrétní numerické výsledky (například změna parametru vyžaduje celou simulaci opakovat).
- Nepřesnost numerického řešení.
- Problém stability numerických metod.





## Alternativní přístup

**Analytické řešení modelů**

- Popis chování systému matematickými vztahy a jeho *matematické řešení*.
- Vhodné pro jednoduché systémy nebo zjednodušené popisy složitých systémů.
- Výsledky jsou ve formě funkčních vztahů, ve kterých se jako proměnné vyskytují parametry modelu.
- Dosazením konkrétních hodnot získáme řešení.

Shrnutí: Hlavní předností analytického řešení je přesnost a menší časová náročnost výpočtu řešení matematického modelu. Řešit ale umíme jen modely jednoduché nebo podstatně zjednodušené.

**Příklad:** Model volného pádu ve vakuu





## Kdy použít simulační metody

Simulaci je vhodné použít když:

- neexistuje *úplná* matematická formulace problému nebo nejsou známé analytické metody řešení matematického modelu;
- analytické metody vyžadují tak zjednodušující předpoklady, že je nelze pro daný model přijmout;
- analytické metody jsou dostupné pouze teoreticky, jejich použití by bylo obtížné a simulační řešení je jednodušší;
- modelování na počítači je jedinou možností získání výsledků v důsledku obtížnosti provádění experimentů ve skutečném prostředí;
- potřebujeme měnit časové měřítko (simulace např. umožní vypočítat řešení rychleji než by proběhl příslušný děj v reálném systému).





## Úvod do teorie systémů

*(Systems Theory, Systems Science)*

**Přehled:**

- Definice základních pojmů:
  - Systém
  - Prvek systému
  - Časová množina
  - Chování systému
  - Okolí systému
- Homomorfní a izomorfní systémy
- Klasifikace prvků systému a systémů





## Formální definice systému

Systém $S$ je dvojice

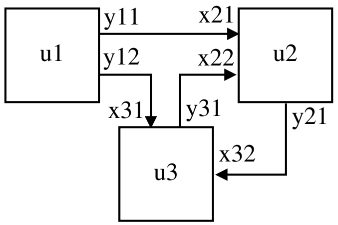
$$S = (U, R)$$

kde:

- Univerzum $U$ je konečná množina prvků systému: $U = \{u_1, u_2, ..., u_N\}$
- Prvek systému: $u = (X, Y)$ kde
  - $X$ je množina všech vstupních proměnných
  - $Y$ je množina všech výstupních proměnných
- Charakteristika systému $R$ je množina všech propojení: $R = \bigcup_{i,j=1}^{N} R_{ij}$
- Propojení prvku $u_i$ s prvkem $u_j$: $R_{ij} \subseteq Y_i \times X_j$

## Příklad definice jednoduchého systému

$U = \{u_1, u_2, u_3\}$
$R = \{(y_{11}, x_{21}), (y_{12}, x_{31}), (y_{31}, x_{22}), (y_{21}, x_{32})\}$

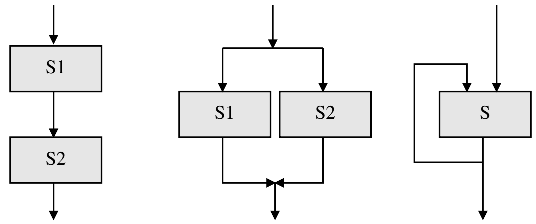







## Vazby mezi prvky systému

sériová, paralelní, zpětná vazba








## Čas

Budeme rozlišovat tři základní pojmy:

*Reálný čas* ve kterém probíhá skutečný děj v reálném systému (viz fyzikální definice času).

*Modelový čas* je "časová osa" modelu (modeluje reálný čas ze vzorového systému — např. proměnná $t$ v diferenciální rovnici $y'' = -g$). Při simulaci nemusí být synchronní s reálným časem.

*Strojový čas* je čas CPU spotřebovaný na výpočet programu (závisí na složitosti simulačního modelu, počtu procesorů a nesouvisí přímo s modelovým časem).

**Poznámka:** Příkaz `time` (POSIX)





## Časová množina

*(Time base)*

$T$ je množina všech časových okamžiků, ve kterých jsou definovány hodnoty vstupních, stavových a výstupních proměnných prvku systému.

**Příklady časových množin**

- diskrétní: $T_d = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- spojitá: $T_s = \langle 1.0, 5.0 \rangle \quad T_s \subset \mathbf{R}$

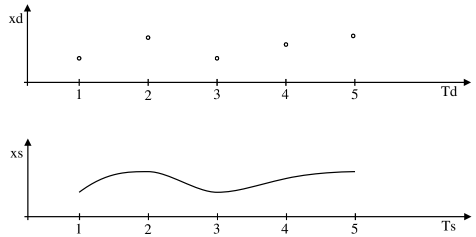
**Poznámka:**
Na číslicovém počítači se spojitá časová množina vždy diskretizuje.





## Časová množina — příklady

Signály s diskrétní ($T_d$) a spojitou ($T_s$) časovou množinou:








## Chování systému

- Každému časovému průběhu vstupních proměnných přiřazuje časový průběh výstupních proměnných.
- Je dáno vzájemnými interakcemi mezi prvky systému.

Chování systému $S$ můžeme definovat jako zobrazení $\chi$:

$$\chi : [\sigma_i(S)]^T \to [\sigma_o(S)]^T$$

kde:

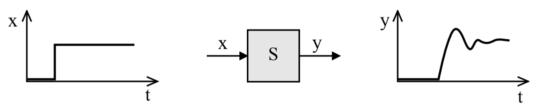
- $[A]^T$ je množina všech zobrazení $T$ do množiny $A$,
- $\sigma_i(S)$ je vstupním prostorem systému S,
- $\sigma_o(S)$ je výstupním prostorem systému S.





## Chování systému — příklad

- Spojitý systém S, odezva na jednotkový skok:



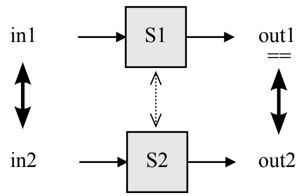





## Ekvivalence chování systémů

Systémy $S_1$ a $S_2$ považujeme za systémy se stejným chováním, vyvolají-li stejné podněty u obou systémů stejné reakce.

Stejnými podněty/reakcemi rozumíme ty dvojice podnětů/reakcí, které jsou spolu vzájemně přiřazeny definovaným vstupním/výstupním zobrazením.








## Izomorfní systémy

Systémy $S_1 = (U_1, R_1)$ a $S_2 = (U_2, R_2)$ jsou izomorfní, když a jen když:

1. Prvky univerza $U_1$ lze vzájemně jednoznačně (1:1) přiřadit prvkům univerza $U_2$.
2. Prvky charakteristiky $R_1$ lze vzájemně jednoznačně přiřadit prvkům charakteristiky $R_2$, a to tak, že prvku charakteristiky $R_1$, vyjadřujícímu orientovaný vztah mezi dvěma prvky univerza $U_1$, je vždy přiřazen právě ten prvek charakteristiky $R_2$, který vyjadřuje stejně orientovaný vztah mezi odpovídající dvojicí prvků univerza $U_2$ a naopak.

**Poznámka:** Zjednodušeno (nezahrnuje chování).

## Homomorfní systémy

Systém $S_1 = (U_1, R_1)$ je homomorfní se systémem $S_2 = (U_2, R_2)$ právě když:

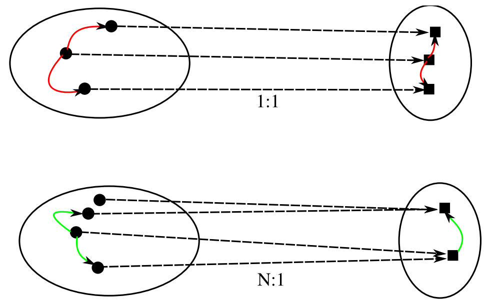
1. Prvkům univerza $U_1$ je možno přiřadit jednoznačně prvky univerza $U_2$ (opačně tomu tak být nemusí, N:1).
2. Prvkům charakteristiky $R_1$ je možno jednoznačně přiřadit prvky charakteristiky $R_2$, a to tak, že prvku charakteristiky $R_1$ vyjadřujícímu orientovaný vztah mezi dvěma prvky univerza $U_1$ je vždy přiřazen právě ten prvek charakteristiky $R_2$, který vyjadřuje stejně orientovaný vztah mezi odpovídající dvojicí prvků univerza $U_2$ ve smyslu bodu 1.

**Poznámka:** Vytváření homomorfních systémů je základním principem modelování.





## Jednoduché příklady izomorfismu a homomorfismu








## Okolí systému

Podstatné okolí systému zahrnuje vše co má vliv na chování systému a není jeho součástí.

- Uzavřený systém — nekomunikuje s okolím (často jen zanedbáváme vliv okolí)
- Otevřený systém — komunikuje s okolím (typicky má definován vstup i výstup)





## Klasifikace prvků systému

**Klasifikace 1:**
- Prvky se spojitým chováním
- Prvky s diskrétním chováním

**Klasifikace 2:**
- Prvky s deterministickým chováním
- Prvky s nedeterministickým chováním

**Příklady:**
Šumová dioda = spojitý prvek, stochastické chování
Rezistor = spojitý prvek, deterministické chování
FIFO Fronta = diskrétní prvek, deterministické chování





## Klasifikace systémů

Typ systému závisí na typu jeho prvků.

**Systémy:**
- spojité: *všechny* prvky mají spojité chování
- diskrétní: *všechny* prvky mají diskrétní chování
- kombinované: obsahuje spojité i diskrétní prvky

**Systémy:**
- deterministické: všechny prvky deterministické
- nedeterministické: obsahuje alespoň jeden prvek s nedeterministickým chováním





## Simulace

= experimentování s reprezentací simulačního modelu.

**Cíl simulace:**
získání nových informací o chování systému v závislosti na vstupních veličinách a na hodnotách parametrů.

**Postup:**
opakované řešení modelu (provádění simulačních běhů),
1. nastavení hodnot parametrů a počátečního stavu modelu,
2. zadávání vstupních podnětů z okolí při simulaci,
3. vyhodnocení výstupních dat (informací o chování systému)

Simulační běhy opakujeme tak dlouho, dokud nezískáme dostatek informací o chování systému nebo pokud nenalezneme takové hodnoty parametrů, pro které má systém žádané chování.





## Typy simulace

**Podle použitého popisu modelu:**
- Spojitá / diskrétní / kombinovaná
- Kvalitativní / kvantitativní
- ...

**Podle simulátoru:**
- Na analogovém / číslicovém počítači, fyzikální
- "Real-Time" simulace
- Paralelní a distribuovaná simulace

Další možnosti:
- Vnořená simulace (simulace v simulaci)
- *"Reality in the loop"*
- Interaktivní simulace, virtuální realita





## Zpracování výsledků simulace

Postup:
- Záznam průběhu simulace
- Vizualizace výsledků, animace

Analýza získaných výsledků:
- Intuitivní vyhodnocení, heuristiky, ...
- Statistické zpracování
- Automatické vyhodnocení (např. pro optimalizaci)
- Porovnávání s naměřenými daty
- ...





## Verifikace modelu

Verifikací ověřujeme korespondenci *abstraktního* a *simulačního* modelu, tj. izomorfní vztah mezi AM a SM.

- Předchází vlastní etapě simulace.
- Analogicky s programy v běžných programovacích jazycích představuje verifikace simulačního modelu jeho ladění.

**Poznámka:**
Abstraktní model je formální specifikací pro program (simulační model).

## Validace modelu

Ověřování validity (platnosti) simulačního modelu je proces, v němž se snažíme dokázat, že skutečně pracujeme s modelem adekvátním modelovanému systému.

- Jeden z nejobtížnějších problémů modelování.
- Vyžaduje neustálou konfrontaci informací, které o modelovaném systému máme a které simulací získáváme.
- Nelze absolutně dokázat přesnost modelu.
  (Validitu modelu chápeme jako míru použitelnosti/správnosti získaných výsledků.)
- Pokud chování modelu neodpovídá předpokládanému chování originálu, musíme model modifikovat.





## Simulační nástroje

Simulační systémy usnadňují vytváření modelů, provádění experimentů a analýzu výsledků.

Tyto nástroje jsou použitelné pro:

- práci s abstraktními modely (báze znalostí, ...),
- programování simulačních modelů (simulační jazyky a knihovny modelů),
- experimentování se simulačními modely (simulátory),
- vizualizaci a vyhodnocování výsledků.

**Poznámka:** V rámci předmětu IMS použijeme SIMLIB/C++, systémy Dymola/OpenModelica a případně SciLab/Octave/Matlab - viz odkazy na WWW IMS





## Shrnutí úvodní části

- Metoda simulace
- Použití simulace v různých oborech
- Výhody a problémy
- Základní teoretické souvislosti
- Problém verifikace a validace modelů
- Stručná charakteristika simulačních nástrojů





## Modely a modelování

Přehled:

- Modelování – proces vytváření modelů
  - abstraktní model
  - simulační model
- Klasifikace modelů
- Popis modelů
- Příklady jednoduchých modelů





## Příklady abstraktních modelů

Způsoby matematického popisu modelů:

- Konečný automat
- Petriho síť
- Turingův stroj
- Algebraické rovnice
- Diferenciální rovnice (obyč. i parciální)
- Diferenční rovnice
- Markovské procesy
- ...

**Poznámka:** Klasifikace abstraktních modelů





## Vytvoření abstraktního modelu I

Formulace zjednodušeného popisu systému abstrahujícího od všech nedůležitých skutečností vzhledem k *cíli a účelu* modelu.

- Nedovedeme postihnout reálný svět v celé komplikovanosti
- Zajímáme se jen o ohraničené části
- Identifikace vhodných složek systému
- Systém nemusí být definován pouze na reálném objektu — potom vycházíme ze znalostí analogických systémů.

Z hlediska teorie systémů předpokládáme mezi modelovaným systémem a abstraktním modelem *homomorfní* vztah.





## Vytvoření abstraktního modelu II

Specifické cíle a účely modelů:

- *Studium chování systému* pro určitá specifická kritéria, zkoumání povahy závislostí mezi parametry a odezvou systému.
- *Predikce* — vyhodnocení chování systému za určitých podmínek.
- *Analýza citlivosti* — určení faktorů (parametrů), které jsou pro činnost systému nejvýznamnější.
- *Optimalizace* — nalezení takové kombinace parametrů, která vede k nejlepší odezvě systému.

Vymezení účelu modelu má významný dopad na celý proces budování abstraktního modelu i na vlastní experimentování se simulačním modelem.





## Vytvoření simulačního modelu

simulační model = abstraktní model zapsaný formou programu

Vztahy mezi modely

**homomorfní vztah:** *modelovaný systém — abstraktní model*
**izomorfní vztah:** *abstraktní model — simulační model*

**Poznámky:**

- Izomorfní vztah představuje silnější vztah ekvivalence mezi abstraktními systémy — shodnost struktur a chování prvků uvažovaných systémů.
- Konkrétní implementace simulačního modelu závisí na typu modelu a na použitém simulačním nástroji.





## Klasifikace modelů 1

Tradiční rozdělení:

- spojité modely
- diskrétní modely
- kombinované modely

**Poznámka:**
Odpovídající varianty DEVS formalismu: DEVS, DESS, DEVS&DESS

## Klasifikace modelů 2

**Klasifikace podle [Fishwick]:**

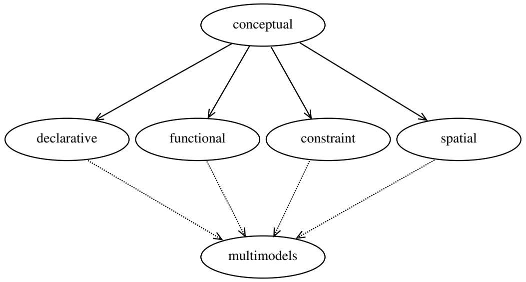
- Konceptuální modely
- Deklarativní modely
- Funkcionální modely
- Modely popsané rovnicemi (*constraint*)
- Prostorové (*spatial*) modely
- Multimodely

**Poznámka:** Multimodel je složen z modelů různého typu.





## Klasifikace modelů 2 — obrázek








## Konceptuální modely

- Modely, jejichž komponenty (prozatím) nebyly přesně popsány ve smyslu teorie systémů.
- Obvykle se používají v počáteční fázi modelování pro ujasnění souvislostí a komunikaci v týmu.
- Mají formu textu nebo obrázků.





## Deklarativní modely

- Popis přechodů mezi stavy systému.
- Model je definován *stavy* a *událostmi*, které způsobí přechod z jednoho stavu do druhého za jistých podmínek.
- Vhodné především pro diskrétní modely.
- Obvykle zapouzdřeny do objektů (hierarchická struktura).

Příklady:

- Konečné automaty (deterministické i nedeterministické, Markovovy modely)
- Petriho sítě
- Událostmi řízené systémy s kalendářem





## Funkcionální modely

- Grafy zobrazující *funkce* a *proměnné*.
- Jsou možné 2 modifikace: uzel grafu je funkce nebo proměnná

Příklady:

- Systémy hromadné obsluhy se zařízeními a frontami (*"Queuing systems"*)
- Bloková schemata (spojitá simulace, ...)
- Kompartmentové systémy
- Grafy signálových toků
- Systémová dynamika





## Modely popsané rovnicemi (constraint)

- Rovnice (algebraické, diferenciální, diferenční)
- Neorientované grafy (elektrická schemata, *"Bond-graphs"*)

Příklady:

- Diferenciální rovnice systému dravec-kořist:

$$\frac{dx_k}{dt} = k_1 x_k - k_2 x_k x_d$$
$$\frac{dx_d}{dt} = k_2 x_k x_d - k_3 x_d$$

- Balistika, kyvadlo, RC článek, ...
- Chaos (například *"Lorenz equation"*)
- Logistická rovnice $x \leftarrow ax(1-x)$





## Prostorové (spatial) modely

Rozdělují systém na prostorově menší ohraničené podsystémy.

Příklady:

- Parciální diferenciální rovnice (difůze, proudění, ...)
- Celulární automaty (hra *"Life"*)
- L-systémy
- *N-body problem*: mechanické modely těles + kolize





## Multimodely

Modely složené z různých typů modelů, které jsou obvykle heterogenní (popsané různým způsobem).

Příklady:

- Kombinované modely (např. spojité + diskrétní)
- Modely s neurčitostí (např. spojité + fuzzy)
- Modely na různé úrovni abstrakce (kvalitativní + kvantitativní)
- Spojování modelů (FMI, *"co-simulation"*, HLA, ...)
- ...

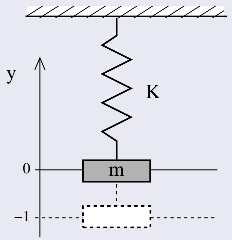
**Poznámka:**
Většina netriviálních modelů spadá do této kategorie.





## Příklad1: Závaží na pružině (spojitý)

**Obrázek = konceptuální model**



## Příklad1 — pokračování

**Diferenciální rovnice = abstraktní model (constraint)**

$$y'' = -g - \frac{K}{m}y$$

**Počáteční podmínky**

$$y(0) = -1$$
$$y'(0) = 0$$

**Poznámky:**

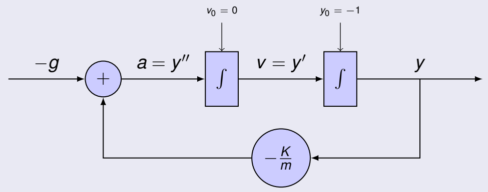
- Počáteční podmínky jsou nutné pro jednoznačnost řešení
- Pozor na shodné jednotky (např. délka: metry / stopy ?)





## Příklad1 — pokračování

**Blokové schema = abstraktní model (funkcionální)**








## Příklad1 — pokračování

**program = simulační model**

```
// popis modelu v SIMLIB/C++
struct Model {
    Integrator v, y;
    Model(double m, double K, double y0) :
        v(-g - K/m * y, 0),
        y(v, y0)  {}
};

Model s(1, 1e3, -1);   // instance modelu s parametry

// vynechán popis simulačního experimentu
```





## Příklad1 — pokračování

Výsledky simulace: tabulka (pozor na přesnost tisku)

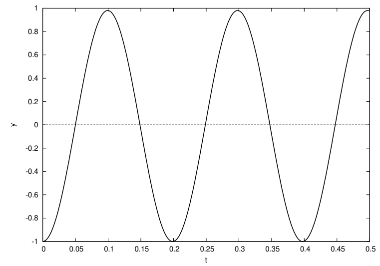
```
# čas   y       v
 0.000 -1       0
 0.001 -0.9995 0.99
 0.002 -0.998   1.979
 0.003 -0.9955 2.966
 0.004 -0.9921 3.95
 0.005 -0.9876 4.93
 0.006 -0.9822 5.906
 0.007 -0.9758 6.875
 0.008 -0.9685 7.837
 0.009 -0.9602 8.792
 0.010 -0.9509 9.738
 ...
```





## Příklad1 — pokračování

Výsledky simulace: graf (vytvořen programem Gnuplot)

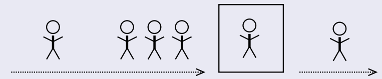







## Příklad2: Zákazníci v obchodě (diskrétní)

**Obrázek = konceptuální model**



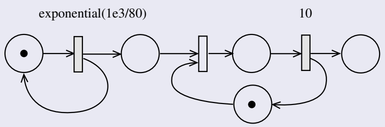
- Zákazníci přicházejí s určitým rozložením pravděpodobnosti,
- jsou obsluhováni zařízením po určitou dobu,
- vytváří se fronta zákazníků.



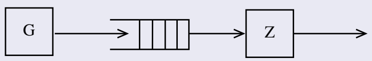


## Příklad2 — pokračování

**Petriho síť = abstraktní model (deklarativní)**




**Blokové schema = abstraktní model (funkcionální)**








## Příklad2 — pokračování

**program = simulační model:**

```
Facility  Linka("Linka");
class Zakaznik : public Process { // třída zákazníků
  void Behavior() {              // --- popis chování
    Seize(Linka);                // obsazení zařízení
    Wait(10);                    // obsluha
    Release(Linka);              // uvolnění zařízení
  }
};
class Generator : public Event {  // generátor zák.
  void Behavior() {              // --- popis chování
    (new Zakaznik)->Activate();   // nový zákazník
    Activate(Time+Exponential(1e3/80)); // interval
  }
}; // ... vynechán popis experimentu a sběr statistik
```





## Příklad2 — pokračování

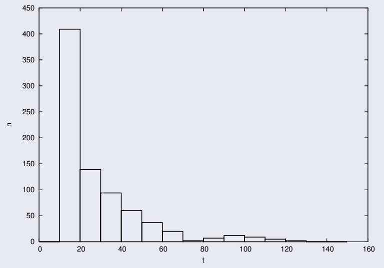
**Výsledky simulace: statistiky**

```
FACILITY Linka
 Time interval = 0 - 10000
 Number of requests = 797
 Average utilization = 0.796405

Input queue 'Linka.Q1'
 Maximal length = 12
 Average length = 1.37766
 Minimal time = 0.00798347
 Maximal time = 112.171
 Average time = 22.1489
 Standard deviation = 31.087
```

## Příklad2 — pokračování

**Výsledky simulace: histogram – čas strávený v systému**








## Shrnutí

- Modely různých typů a úrovní abstrakce
- Jsou možné různé popisy stejného systému
- Často nutné kombinovat = multimodely
- Je výhodné použít objekty (OOP)
- Použití hotových modelů jako komponent
- ...

Vše se odrazí v implementaci nástrojů pro simulaci.





## Simulační nástroje — přehled

Možnosti:

- použití obecných jazyků (C, C++, Java, Python, ...)
- simulační knihovny pro obecné jazyky (SIMLIB/C++, SimPy, ...)
- simulační jazyky (Simula67, Modelica, ACSL, ...)
- simulační systémy (OpenModelica, Dymola, ANSYS, PowerDEVS, ...)
- propojování různých nástrojů (HLA, FMI, ...)

**Poznámky:**
HLA = *High Level Architecture*, standard pro distribuovanou simulaci
FMI = *Functional Mockup Interface*





## Simulační jazyky

= speciální programovací jazyky

Poskytují prostředky usnadňující efektivní popis:

- struktury modelů (propojení komponent)
- chování modelů (rovnice, algoritmy)
- simulačních experimentů

Výhody:

- jednodušší popis modelu (snadnější verifikace)
- možnost automatické kontroly popisu modelu

Nevýhody:

- další jazyk = překladač, výuka, údržba
- relativně málo používáno = problémy (cena, chyby)





## Typy simulačních jazyků

Klasifikace podle typu modelů:

- diskrétní
- spojité
- kombinované
- ...

Příklady:

- Simula67,
- Simscript,
- ACSL (Advanced Continuous Simulation Language),
- Modelica,
- ...





## Dostupné simulační nástroje

V rámci výuky budeme používat:

- SIMLIB/C++: OO knihovna pro C++ (LGPL)
- DYMOLA/Modelica: komerční program
  OpenModelica: volně dostupné
- (Octave nebo SciLab: integrované prostředí, jazyk pro numerické výpočty, knihovny, různé specializované nadstavby – "toolkity")

Podpůrné nástroje:

- Vizualizace: Gnuplot
- Statistika: GNU R, "diehard" testy
- ...





## Přehled některých dalších programů

- Matlab/Simulink
- Sage
- GNU Octave (a OctaveForge)
- Simula67 (cim)
- SciPy, NumPy — Python
- SPICE — elektrické obvody
- GSL = *GNU Scientific Library* — knihovna, ISO C
- ... (další viz WWW)





## Shrnutí

- Nástrojů pro podporu modelování a simulace existuje velmi mnoho.
- Některé nástroje vyžadují speciální vybavení (superpočítače).
- Většina nástrojů je zaměřena na konkrétní problém/oblast.
- Podrobnější informace o používaných nástrojích budou uvedeny později.

Reklama: Předmět *Simulační nástroje a techniky* v magisterském studiu bude zahrnovat podrobnosti o efektivní implementaci simulačních systémů a pokročilých metodách modelování a simulace.





## Modelování náhodných procesů

Obsah:

- Pravděpodobnost, náhodné proměnné, ...
- Rozložení náhodných čísel
- Generování pseudonáhodných čísel
- Transformace rozložení pseudonáhodných čísel
- Testování pseudonáhodných čísel
- Metoda *Monte Carlo*

**Poznámka:**
Předpokládáme základní znalosti z teorie pravděpodobnosti.

## Pravděpodobnost a statistika

- Co je náhodnost? (nedeterminismus, pseudonáhodnost)
- Některé části reality neumíme popsat jinak ⇒ používáme náhodné jevy/procesy
- Každý proces má jiný charakter (a odpovídající rozložení)
- Jde o jeden ze způsobů popisu neurčitosti
- Příklady: příchody zákazníků, doba obsluhy, ...
- Postup:
  1. Změříme vzorek procesu v realitě (získáme soubor dat),
  2. ten aproximujeme analytickým vyjádřením (typicky pomocí existujícího rozložení),
  3. a nakonec náhodný proces modelujeme generátorem pseudonáhodných čísel (s odpovídajícím rozložením a parametry).





## Terminologie (opakování)

- Jev
- Pravděpodobnost jevu
- Náhodná proměnná
- Rozložení pravděpodobnosti
- Distribuční funkce (*CDF*),
- Funkce hustoty pravděpodobnosti (*PDF*)
- Střední hodnota (*Mean*)
- Rozptyl (*Variance*)
- Zákon velkých čísel
- Centrální limitní věta
- ...





## Náhodné proměnné

Náhodná proměnná je taková veličina, která jako výsledek pokusů může nabýt nějakou hodnotu, přičemž předem nevíme jakou konkrétně.

Náhodné proměnné rozdělujeme na:

diskrétní: nabývají jen konečně nebo spočetně mnoha různých hodnot
(Příklad: co padne při hodu kostkou)

spojité: hodnoty spojitě vyplňují určitý interval
(Příklad: čas mezi příchody zákazníků)

**Poznámka:**
Náhodné proměnné označujeme velkými písmeny, např. $X$, a jejich možné hodnoty odpovídajícími malými písmeny, např. $x_1$, $x_2$.





## Náhodné proměnné – pokračování

Náhodné veličiny můžeme zadat:

- distribuční funkcí
- rozdělením pravděpodobnosti (např. funkce hustoty)

Existuje celá řada různých používaných rozložení, viz literatura. Například:

McLaughlin M.: *A Compendium of Common Probability Distributions*, 2016

`https://www.causascientia.org/math_stat/Dists/Compendium.pdf`





## Diskrétní rozdělení pravděpodobnosti

určuje vztah mezi možnými hodnotami náhodné veličiny $x_i$ a jim příslušejícími pravděpodobnostmi $p_i = P(X = x_i)$.

Obecně platí: $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1$

Lze definovat například tabulkou pravděpodobností pro všechny možné hodnoty náhodné proměnné:

| $x_i$ | $x_1$ | $x_2$ | ... | $x_N$ |
|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | $p_1$ | $p_2$ | ... | $p_N$ |

Musí platit: $\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$

kde $N$ je počet možných hodnot





## Diskrétní distribuční funkce

Distribuční funkce náhodné veličiny $X$ je funkce

$$F(x) = P(X \leq x)$$

kde $P(X \leq x)$ je pravděpodobnost toho, že náhodná veličina $X$ nabude hodnoty menší nebo rovnu zvolenému reálnému číslu $x$.

Platí: $F(x) = \sum_{x_i \leq x} p_i$

**Příklad:** Hod kostkou

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $F(x_i)$ | $1/6$ | $2/6$ | $3/6$ | $4/6$ | $5/6$ | 1 |

**Poznámka:** Graf distribuční funkce diskrétní náhodné proměnné je po částech konstantní.





## Spojité náhodné proměnné

- Distribuční funkce: $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)du$
- Funkce hustoty pravděpodobnosti: $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$

Distribuční funkce $F(x)$ má tyto základní vlastnosti:

- $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$
- $F(x_1) \leq F(x_2)$ pro $x_1 < x_2$ (je neklesající)
- $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$
- $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$





## Spojité náhodné proměnné

Hustota pravděpodobnosti $f(x)$ má tyto základní vlastnosti:

- $f(x) \geq 0$
- $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$
- $P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$

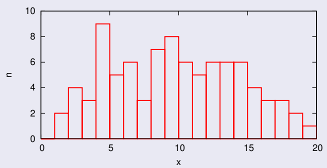




## Histogram

Mějme soubor $N$ výsledků pokusů.
Histogram $H$ roztřídí soubor do $K$ tříd podle vhodně zvolených intervalů. Hodnota $H(i)$ = počet výsledků v $i$–tém intervalu.

**Příklad histogramu pro $K = 20$, $N = 100$**




**Poznámky:** Problém stanovení optimálního počtu intervalů.
(Histogram se blíží funkci hustoty pravděpodobnosti.)

## Charakteristiky náhodných proměnných

Charakteristiky polohy: posunutí vzhledem k počátku (střed, modus, medián, kvantily).

Charakteristiky variability: rozsah kolísání hodnot kolem středu (rozptyl a směrodatná odchylka).

Charakteristiky šikmosti: udává nesymetričnost rozložení.

Charakteristiky špičatosti: porovnává variabilitu rozložení ve středu a na okrajích.

Charakteristiky lze stanovit podle tzv. momentů.





## Obecné momenty

Je-li $X$ náhodná veličina s frekvenční funkcí $p_i$ resp. hustotou pravděpodobnosti $f(x_i)$, pak

**obecný moment $k$-tého řádu je:**

$$m_k(X) = \sum_i x_i^k p_i$$

$$m_k(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx$$

Příklad: Střední hodnota je moment prvního řádu:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

$$E(X) = m_1(X) = \mu$$





## Centrální momenty

Je-li $X$ náhodná veličina s $p_i$ resp. $f(x_i)$, pak

**centrální moment $k$-tého řádu je:**

$$M_k(X) = \sum_i [x_i - E(X)]^k p_i$$

$$M_k(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - E(X)]^k f(x) dx$$

Příklad: Rozptyl je centrální moment 2. řádu:

$$D(X) = \sum_i [x_i - E(X)]^2 p_i$$

$$D(X) = M_2(X)$$





## Koeficient šikmosti a špičatosti

Šikmost:

$$\beta_1 = \frac{M_3(X)}{\sigma(X)^3}$$

kde $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ je směrodatná odchylka

Špičatost:

$$\beta_2 = \frac{M_4(X)}{\sigma(X)^4}$$





## Použití momentů

- Testování náhodných čísel
- Odhady parametrů rozložení
- ...

**Poznámka:**
Konkrétní parametry konkrétního rozložení se projeví v jeho momentech. Z odhadu lze zpětně vyčíslit parametry.





## Některá často používaná rozložení

- Diskrétní:
  - Poissonovo
  - Binomické
  - ...
- Spojitá:
  - rovnoměrné (Uniform)
  - exponenciální (Exponential)
  - normální (Normal, Gauss)
  - Pearsonovo ($\chi^2$)
  - ...





## Poissonovo rozložení

Diskrétní rozložení

$p_i = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}, \quad \lambda > 0, \quad i \in \{0, 1, 2, ...\}$

$E(x) = \lambda, \quad D(x) = \lambda, \quad \beta_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}, \quad \beta_2 = \frac{1}{\lambda} + 3$

Příklady použití:

- Systémy hromadné obsluhy: počet příchodů zákazníků do obchodu za jednotku času.
  Souvisí s exponenciálním rozložením (časový interval mezi příchody — počet příchodů za jednotku času).
- Počet hovorů přes telefonní ústřednu za hodinu.
- Počet alfa částic, které vstoupí za daný časový interval do dané oblasti.
- Počet zmetků ve výrobě za 1 měsíc.





## Rovnoměrné (Uniform) rozložení

Obvykle označujeme $R(a, b)$.

$F(x) = 0 \;$ pro $\; x \leq a, \quad \frac{x-a}{b-a} \;$ pro $\; a \leq x \leq b, \quad$ jinak $\; 1$

$f(x) = \frac{1}{b-a} \;$ pro $\; x \in \langle a, b \rangle, \quad$ jinak 0

V normované formě $R(0, 1)$ je základem pro generování dalších rozložení.

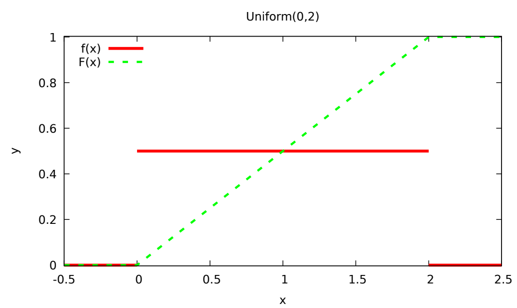
Charakteristiky:

- Střední hodnota: $E(X) = \frac{a+b}{2}$
- Rozptyl: $D(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$





## Příklad: Rovnoměrné rozložení



## Exponenciální rozložení

$f(x) = \frac{1}{A}e^{-\frac{1}{A}(x-x_0)}$ pro $x \geq x_0$, jinak 0

$$F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{1}{A}(x-x_0)} & x \geq x_0 \\ 0 & x < x_0 \end{cases}$$

kde $A$ a $x_0$ jsou parametry.

Často se používá normované rozložení s $x_0 = 0$.

- Střední hodnota: $E(X) = x_0 + A$
- Rozptyl: $D(X) = A^2$

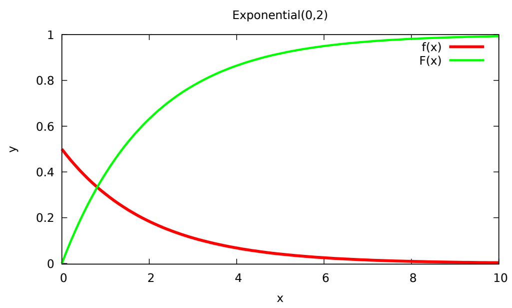
**Poznámka:**
V literatuře se často používá jako parametr $\lambda = \frac{1}{A}$ ("rate").

Použití: rozložení dob obsluhy, časové intervaly mezi poruchami nebo mezi příchody požadavků.





## Příklad: Exponenciální rozložení








## Normální (Gaussovo) rozložení

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Parametry:

- Střední hodnota: $\mu$
- Rozptyl: $\sigma^2$ (směrodatná odchylka: $\sigma$)

Pravidlo tří sigma:

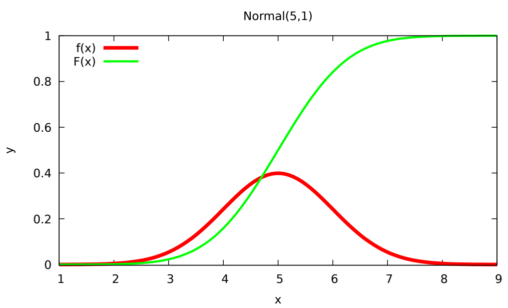
$$P(X \in \langle \mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma \rangle) \geq 0.99$$

Použití: Odpovídá jevům s vlivem většího počtu nezávislých faktorů.





## Příklad: Normální rozložení








## Pearsonovo rozložení $\chi_k^2$

Založeno na normálním rozložení s parametry $\mu = 0, \sigma = 1$.

$$\chi_k^2 = \sum_{i=1}^{k} X_i^2, \quad X \text{ je z } \; N(0,1)$$

$k$ - počet stupňů volnosti (nemělo by přesáhnout 50, protože pak výsledek konverguje k 1).

$$f(x) = (x)^{\frac{k}{2}-1} \exp(-\frac{x}{2})\, 2^{-\frac{k}{2}} \frac{1}{\Gamma(\frac{k}{2})}$$

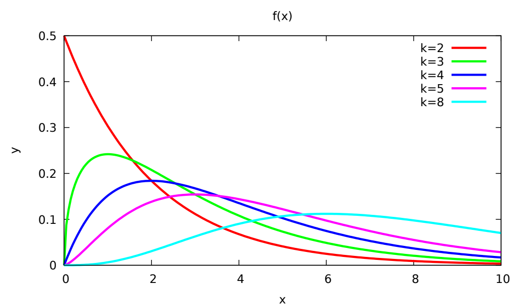
Charakteristiky: $E(\chi_k^2) = k$, $D(\chi_k^2) = 2k$

Použití: Testování statistických hypotéz.





## Příklady: Pearsonovo rozložení $\chi_k^2$








## Generování pseudonáhodných čísel

- základem je kvalitní generátor rovnoměrného rozložení
- transformací (rovnoměrného rozložení) získáme soubor čísel jiného rozložení

**Problém:**
Náhodná × Pseudonáhodná čísla

Generátory:

- Fyzikální zdroje náhodnosti: opravdu náhodné (nedeterministické), generují jen málo bitů za sekundu
- Algoritmické generátory: pseudonáhodné (deterministické), generují řádově miliardy bitů za sekundu





## Kongruentní generátory

$$x_{n+1} = (ax_n + b) \mathit{mod}\; m$$

kde konstantní parametry $a$, $b$ a $m$ (multiplikační, aditivní, modul) musí mít vhodné hodnoty

- Generují *rovnoměrné rozložení* $\langle 0, m)$
- Rozsah $\langle 0, m)$ se převádí na normovaný $\langle 0, 1)$
- Generují periodicky se opakující posloupnost čísel. *Perioda generátoru* je maximálně $m$ a závisí na parametrech.
- Dvě po sobě generovaná čísla nejsou statisticky nezávislá.





## Příklad: Kongruentní generátor v C

**Jednoduchý generátor (32 bitů), rozsah $\langle 0, 1)$**

```
static uint32_t ix = SEED; // počáteční hodnota, 32b
double Random(void) {
    ix = ix * 69069u + 1u; // mod 2^32 je implicitní
    return ix / ((double)UINT32_MAX + 1.0);
}
```

**Poznámky:** Nepříliš kvalitní (závislost dvojic, krátká perioda). Pro generování malých čísel nikdy nepoužívejte operaci modulo (např. `1 + (ix % 6)` pro hody kostkou je nevhodné, vždy použijte `1 + (int)(Random()*6)`).

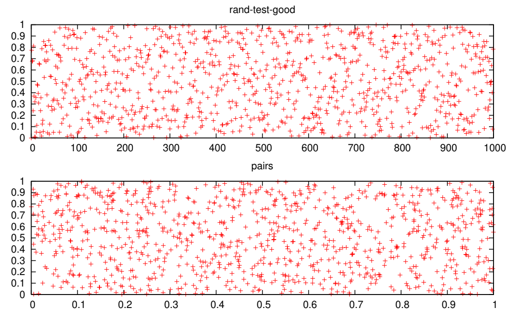
## Příklad: Kongruentní generátor v C++

```
class Kongr {
    unsigned ix;        // stav generátoru
public:
    Kongr(unsigned seed = SEED) : ix(seed) {}
    // základní generátor <0,UINT_MAX)
    unsigned next() {
        ix = ix * A + B; // implicitně modulo
        return ix;
    }
    // mapováno na rozsah <0,1)
    double nextDouble() {
        return  next()/(UINT_MAX+1.0);
    }
} generator1;   // použití: generator1.next()
```





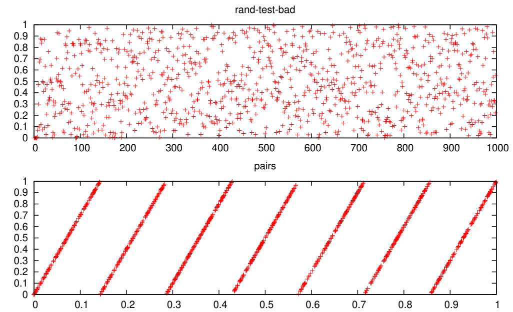
## Příklad: $a = 69069$, $b = 1$, $m = 2^{32}$








## Příklad: $a = 7$, $b = 1$, $m = 2^{32}$ (Nevhodné parametry!)








## Další metody generování

- Mersenne twister (perioda $2^{19937} - 1$)
- Xorshift
- různé další varianty LCG (Linear Congruential Generator)
- bitové operace, carry — LFSR (Linear Feedback Shift Register)
- ...

Požadavky na generátory:

- rovnoměrnost rozložení
- statistická nezávislost generované posloupnosti
- co nejdelší perioda
- rychlost





## Příklad: Xorshift generátor v C

```
// Zdroj: Marsaglia: "Xorshift RNGs"
// stav musí být inicializován (SEED!=0)
uint64_t xorshift64(uint64_t *state)
{
    uint64_t x = *state;
    x ^= x << 13;
    x ^= x >> 7;
    x ^= x << 17;
    return (*state = x);
}
```

**Poznámky:** Dovoluje použít více různých stavů, například pro vlákna. Existují varianty pro 32, 64, 128 i více bitů ve stavu.





## Transformace na jiná rozložení

Metody:

- Inverzní transformace — používá inverzní distribuční funkci cílového rozložení. Pro některá rozložení nelze použít (např. když distribuční funkci nelze vyjádřit elementárními funkcemi).
- Vylučovací — sérií pokusů hledáme číslo, které vyhovuje funkci hustoty cílového rozložení. Nevhodná pro neomezená rozložení.
- Kompoziční — složitou funkci hustoty rozložíme na několik jednodušších (intervaly, na každý lze použít jinou metodu).
- Jiná, specificky vytvořená pro dané rozložení.

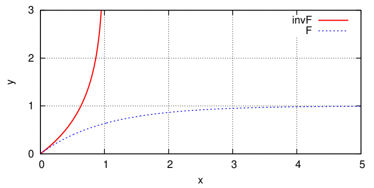




## Metoda inverzní transformace

1. Inverze distribuční funkce: $F^{-1}$
2. Generování $x = Uniform(0, 1)$
3. Výsledek: $y = F^{-1}(x)$

**Příklad:** Exponenciální rozložení $F(x) = 1 - e^{-\frac{x - x_0}{A}}$
$y = x_0 - A * \ln(1 - x)$ viz. obrázek pro $x_0 = 0$, $A = 1$





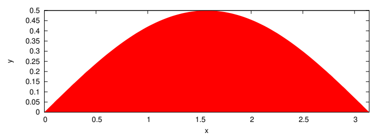



## Vylučovací metoda

Náhodnou veličinu $\xi$ s funkcí hustoty $f(x), x \in \langle x_1, x_2 \rangle$, $f(x) \in \langle 0, M)$ (kde $M$ je max. hodnota $f(x)$) generujeme takto:

1. $x = Uniform(x_1, x_2)$
2. $y = Uniform(0, M)$
3. je-li $y < f(x)$, pak $x$ prohlásíme za hodnotu náhodné veličiny $\xi$ jinak goto 1

Efektivita generátoru souvisí s poměrem ploch $(x_1, x_2) \times (0, M)$ a $\int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$

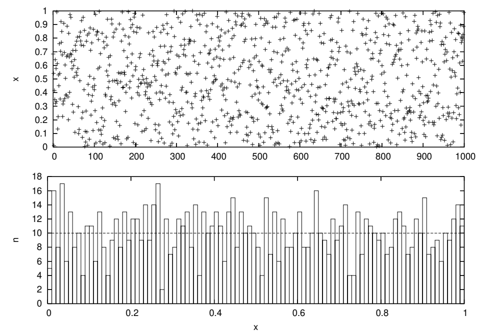



**Poznámka:** Nehodí se na neomezená rozložení.

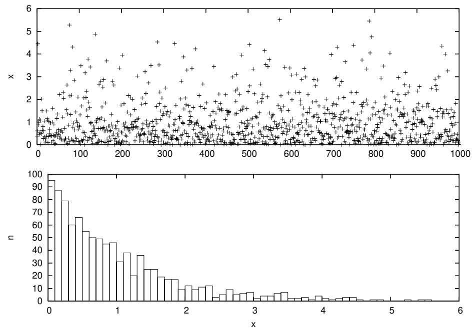




## Vzorek čísel z generátoru Uniform(0,1)



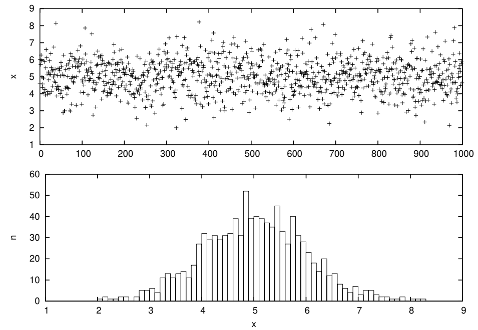
## Vzorek z generátoru Exponential(0,1)








## Vzorek z Normal(5,1)








## Testování generátorů náhodných čísel

Máme soubor (pseudo)náhodných čísel a chceme:

- Potvrdit hypotézu jeho příslušnosti k danému rozložení.
- Nalézt jeho rozložení (případně nejvíce podobné).
- Nalézt takové parametry rozložení, aby vzorek odpovídal danému rozložení s těmito parametry.

Existuje mnoho statistických testů a nástrojů pro testování náhodných čísel (např. programy *diehard*, *dieharder*)

**Poznámka:** náročné, problém interpretace výsledků





## Test dobré shody $\chi^2$

Příklad testování generátoru náhodné veličiny:

1. Vygenerujeme soubor $n$ vzorků (např. $n = 10000$).
2. Vypočteme histogram souboru $H$ (pro $k$-kategorií).
3. Vypočteme teoretický (analytický) histogram rozložení $h$.
4. Výpočet: $\chi^2_{k-1} = \sum_{j=1}^{k} \frac{(H_j - h_j)^2}{h_j}$,
5. Výsledek testu zhodnotíme na základě tabulky $\chi^2$ :
   - zvolená hladina významnosti $p$ (např. 0.05), $x_p$ je kvantil rozložení pro počet stupňů volnosti $k - 1$
   - je-li $\chi^2_{k-1} > x_p$, pak generátor nevyhovuje

Přesnější popis viz literatura





## Další metody testování

- testy rovnoměrnosti rozložení ($\chi^2$)
- rovnoměrnost dvojic/trojic
- rovnoměrnost maxima z $n$ členů
- testy náhodnosti
- test na intervaly, test sběratele kuponů
- poker test (celočíselný, $0 \leq x_i < d$ )
- Hammingův test
- ...

**Poznámka:** Testování transformovaných rozložení





## Metoda Monte Carlo

Experimentální numerická (simulační) metoda (metody):

- řeší danou úlohu experimentováním se stochastickým modelem
- využívá vzájemného vztahu mezi hledanými veličinami a pravděpodobnostmi, se kterými nastanou určité jevy
- vyžaduje generování (pseudo)náhodných čísel
- není příliš přesná
- existuje řada variant (*Metropolis, Quasi-MC*)

Postup:

1. vytvoříme stochastický model
2. provádíme náhodné experimenty
3. získanou pravděpodobnost nebo průměr použijeme pro výpočet výsledku





## Aplikace metody Monte Carlo

- Historie: Buffonova úloha ($\pi$), projekt *"Manhattan"*
- Výpočet určitých integrálů
  - molekulární simulace (3$N$-rozměrný integrál)
  - počítačová grafika (*Path tracing*)
  - kontrola složení (např. salámu)
- Řešení diferenciálních rovnic (náhodné procházky)
- Finance

Souvislosti: náhodné vzorkování, průzkumy, *oversampling*, některé optimalizační metody (např. *Simulované žíhání*), ...





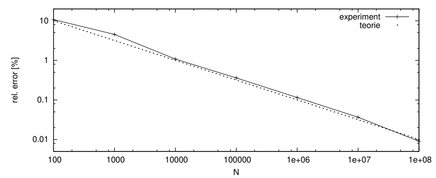
## Přesnost metody Monte Carlo

Přesnost metody není velká — pro relativní chybu platí:

$$err = \frac{1}{\sqrt{N}}$$

kde $N$ je počet provedených experimentů.

**Příklad:** Experiment — závislost chyby na počtu pokusů



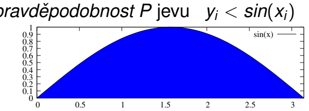





## Příklad1 — výpočet jednoduchého určitého integrálu

$$\int_0^{\pi} sin(x)dx$$

1. Generujeme $N$ náhodných bodů $(x_i, y_i)$ (rovnoměrně v rozsahu souřadnic: $rozsah_x = \langle 0, \pi \rangle$, $rozsah_y = \langle 0, 1 \rangle$)
2. Vypočteme *pravděpodobnost* $P$ jevu $y_i < sin(x_i)$




3. Výsledek je přibližně roven $|rozsah_x| * |rozsah_y| * P$:

$$\int_0^{\pi} sin(x)dx \approx \pi P$$

## Příklad1 — efektivnější metoda

$$\int_0^\pi sin(x)dx$$

Rychlejší a korektnější postup:

1. Generujeme $N$ náhodných hodnot: $x_i \in \langle 0, \pi)$
2. Vypočteme *průměr*: $E = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} sin(x_i)$
3. Výsledek: $\int_0^\pi sin(x)dx \approx \pi E$

Lze dokázat, že pro $N \to \infty$ platí rovnost: $\int_0^\pi sin(x)dx = \pi E$

**Poznámka:** Nemusíme znát obor hodnot funkce.





## Příklad2 — výpočet objemu tělesa

Výpočet objemu koule o poloměru $r$ :

- Generujeme $N$ náhodných bodů $(x_i, y_i, z_i)$.
  Pro zjednodušení použijeme jako těleso kouli a pro všechny osy jen rozsah $\langle 0, r)$, který odpovídá $\frac{1}{8}$ koule.
- Vypočteme pravděpodobnost $P$ jevu $x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 < r^2$
- Výsledek: *objem* $\approx 8Pr^3$

**Poznámka:**
Metoda Monte Carlo je výhodná především pro vícerozměrné integrály, kdy běžné metody nejsou efektivní. Uvedené jednoduché příklady proto považujte pouze za ilustrační.

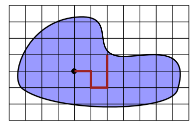




## Příklad3 — Dirichletova úloha (řešení PDR) — princip

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

+ okrajové podmínky na hranici $\Gamma$: $u(Q) = f(Q), \quad Q \in \Gamma$



Postup řešení:

1. Volba čtvercové sítě, aproximace okrajů.
2. Provádíme náhodné procházky z výchozího bodu k okraji.
3. Průměrná hodnota koncových bodů náhodných procházek udává přibližnou hodnotu řešení $u(x, y)$ ve výchozím bodu.





## Monte Carlo — shrnutí

- Velmi používaná metoda v případech, kdy běžné numerické metody jsou neefektivní nebo nepoužitelné (např. N-rozměrné integrály pro velké N).
- Jednoduchá implementace.
- Náročnost na kvalitu generátoru pseudonáhodných čísel.
- Relativně malá přesnost, nízká efektivita.
- Existují různé další varianty MC metod — viz literatura.





## Diskrétní simulace

Agenda:

- Popis diskrétních systémů
- Systémy hromadné obsluhy (*Queuing Systems*)
  - Aktivní entity: procesy, události
  - Pasivní entity: fronty, zařízení, sklady,
- Příklady: Petriho sítě
- Implementace: Algoritmus řízení simulace, kalendář
- *"next-event"* simulace
- Nástroje pro sběr statistik
- Základní popis SIMLIB/C++
- Příklady: SIMLIB/C++





## Formy popisu diskrétních systémů

- Program v (simulačním) programovacím jazyce
- Petriho sítě (C. A. Petri, 1962, existují různé varianty)
- DEVS (*Discrete Event System Specification*)
- Automaty, sítě automatů
- Procesní algebry (CCS, CSP, ...)
- $\pi$-calculus
- CHAM, PRAM
- ...





## Procesy

V diskrétním modelování používáme pojem *proces*:

- Process je posloupnost událostí
- Paralelní procesy — současně prováděné procesy
- Kvaziparalelismus — provádění "paralelních" procesů na jednoprocesorovém počítači

V modelovaných systémech často existuje mnoho paralelně probíhajících a vzájemně komunikujících procesů.

**Poznámky:**
- nepreemptivní implementace (např. *coroutines*)
- zapouzdření, objekty, agenti





## Paralelismus

- Popis jednotlivých procesů sekvencí kroků (program).
- Popis komunikace procesů — zprávy (synchronní, asynchronní).
- Synchronizace při používání sdílených prostředků.





## Petriho sítě

**Definice P/T Petriho sítě:**

$$\Sigma = (P, T, F, W, C, M_0)$$

kde:

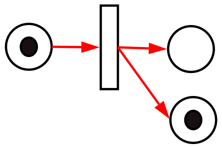
- $P$ je množina míst (stavy)
- $T$ je množina přechodů, $P \cap T = \emptyset$
- Incidenční relace $F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$
- Váhová funkce $W : F \to \{1, 2, ...\}$
- Kapacity míst $C : P \to N$
- Počáteční značení $M_0 : P \to N$
  ($M$ se nazývá *značení* Petriho sítě)

## Graf Petriho sítě

Obvykle zadáváme Petriho síť formou grafu:

- Místa – kružnice
- Přechody – obdélníky
- Incidenční relace – šipky (orientované hrany)
- Váhová funkce – ohodnocení hran

**Příklad:**







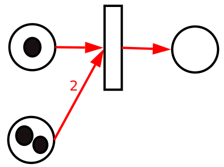
## Chování Petriho sítě

**Proveditelnost přechodu v Petriho síti:**

Přechod je proveditelný při značení *M*, jestliže:

- ve vstupních místech čeká dostatek procesů
- a současně výstupní místa mají dostatečně volnou kapacitu.

**Příklad:**








## Petriho sítě v modelování

Petriho sítě mohou modelovat:

- paralelismus procesů
- komunikaci a synchronizaci procesů
- nedeterminismus

Pro modelování diskrétních systémů zavádíme do klasických P/T Petriho sítí několik rozšíření: priority, pravděpodobnosti a doby přechodů.

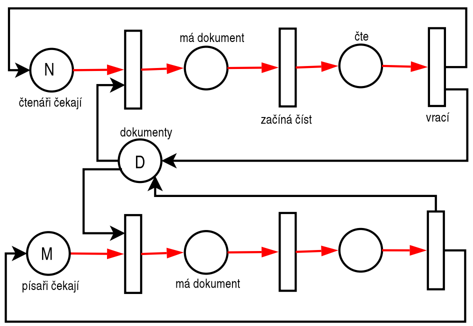
**Další typy Petriho sítí**

- Hierarchické – do sebe vnořené sítě
- Barvené – značky mají datový typ ("barvu")
- Objektově orientované – OOPN, PNtalk
- Stochastické – P/T síť s prioritami, pravděpodobnostmi a časováním přechodů.
- ...





## Příklad: čtenáři a písaři



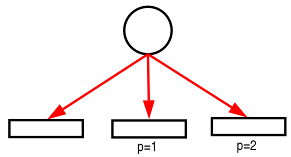





## Prioritní přechody

- je-li více přechodů proveditelných z jednoho značení, můžeme jim dát priority
- $p_t \in \{0, 1, 2, 3, 4, ...\}$
- vyšší číslo $\Rightarrow$ vyšší priorita
- implicitně je priorita $p_t = 0$

**Příklad:**

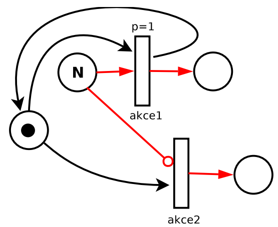







## Poznámka: Inhibiční hrany

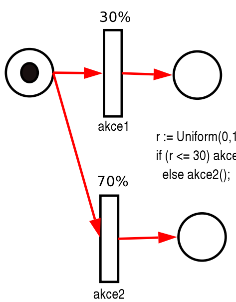
```
while ( N > 0 ) {
    akce1();
    N = N - 1;
}
akce2();
```








## Pravděpodobnost provedení přechodu




r := Uniform(0,100)
if (r <= 30) akce1();
else akce2();



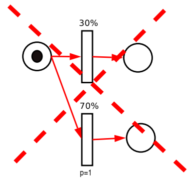


## Pravidla používání rozšířených přechodů

- Přechod má pouze JEDEN parametr (priorita, pravděpodobnost, časování).
- Pozor: tento parametr NENÍ parametrem HRANY.

**Příklad – CHYBNĚ**

Nejednoznačnost – přechod se provede s pravděpodobností 70%, ale prioritně = NESMYSL!





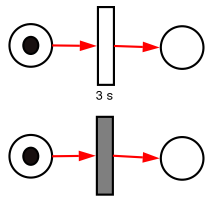



## Časované Petriho sítě

Přidání modelového času:

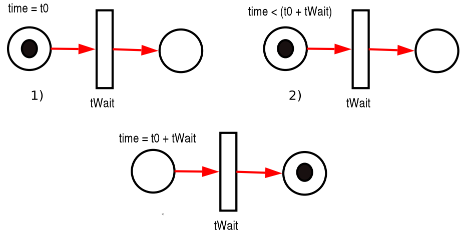
*Časovaný přechod* má parametr – dobu provádění:

- Konstantní čas čekání
- Náhodně generovaná doba čekání



## Sémantika časovaného přechodu

- Pokud je přechod je v čase *t* proveditelný, spustí se odpočet času
- Po celou dobu odpočítávání se nemění stav značek
- Na konci doby se provede přemístění značek








## Sémantika časovaného přechodu 2

Běžný časovaný přechod neomezuje počet současně čekajících.

Někdy ale zavádíme kapacitu časovaného přechodu:
Kapacita přechodu udává kolik procesů může na přechodu čekat současně:

- jeden (implicitně), vzniká fronta
- více (nutno specifikovat poznámkou u přechodu)

**Poznámka:**
Poznámka k sémantice časového přechodu: lze řešit i dočasným odstraněním značek na dobu odpočítávání času, ale to komplikuje další případy, jako je například přerušení čekání.

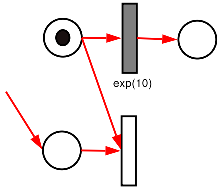




## Přechody ve Stochastické PN (SPN)

V SPN platí:

- Máme dva druhy přechodů: časované a okamžité
- Jediným povoleným parametrem časovaného přechodu je údaj o čase (náhodný nebo konstantní)
- Parametry okamžitého přechodu: priorita, pravděpodobnost
- Okamžitý přechod má vždy vyšší prioritu než časovaný








## Systémy hromadné obsluhy (SHO)

SHO (*Queueing Systems*) jsou systémy obsahující zařízení (s frontami), která poskytují obsluhu transakcím.

**Typický SHO obsahuje:**

- transakce (=procesy) a popis jejich příchodů
- obslužné linky (více typů) a popis obsluhy
- fronty různých typů ve kterých transakce čekají

Co sledujeme při simulaci:

- informace o čase stráveném transakcí v systému
- doby čekání ve frontách
- vytížení obslužných linek

Cíl: odhalit různá zdržení, optimalizovat výkon, ...





## Vstupní tok požadavků

Obvykle jde o stochastický proces příchodů do systému

- Při modelování příchodů zadáváme:
  - Střední dobu mezi příchody (obvykle používáme exponenciální rozložení)
  - Počet příchodů za jednotku času (obvykle Poissonovo rozložení)
    Pojem: Intenzita příchodů požadavků





## Fronty čekajících požadavků

Vytvoří se vždy, když požadavek chce být obsloužen již obsazeným zařízením. Pro fronty je charakteristické:

- řazení požadavků ve frontě (např. FIFO)
- způsob výběru požadavků z fronty
- největší možná délka fronty

Frontové řády : FIFO, LIFO, SIRO (Service in Random Order)
Nulová fronta : požadavek nemůže vstoupit do fronty, jde o systém se ztrátami
Fronta konečná : omezení kapacity fronty
Fronta s netrpělivými požadavky : netrpělivý požadavek opouští systém, překročí-li doba čekání určitou mez (*time-out*)





## Prioritní fronty, priorita obsluhy

- Přicházející požadavky nejsou rovnocenné – požadavek na obsluhu může mít zvláštní prioritu.
- Prioritních úrovní může být více.
- U jedné obslužné linky lze vytvářet i několik front s různými prioritami.
- Vstupem požadavku s vyšší prioritou nastane jedna ze čtyř možností pro právě probíhající obsluhu požadavku s nižší prioritou – viz dále.





## Prioritní obsluha

1. Započatá obsluha se normálně ukončí (slabá priorita).
2. Obsluha se přeruší a začne obsluha požadavku s vyšší prioritou obsluhy (silná priorita). Požadavek, jehož obsluha byla přerušena:
   - odchází ze systému neobsloužen
   - nebo se vrací znovu do fronty a když je později znovu obsluhován, tak:
     - obsluha pokračuje od přerušeného místa,
     - nebo začíná znovu od začátku.
3. Jsou-li všechny linky obsazeny a u každé je fronta, požadavek se sám rozhodne, do které fronty se zařadí.
4. Vytvářejí-li požadavky jednu společnou frontu, požadavek vstupuje do té obslužné linky, která se nejdříve uvolní.





## Obslužná síť

Vznikne spojením několika obslužných linek.

Otevřená obslužná síť – výměna požadavků mezi sítí a okolím.
Uzavřená obslužná síť – nedochází k výměně požadavků mezi sítí a okolím.
Smíšená obslužná síť – pro některé typy požadavků je síť otevřená, pro jiné uzavřená.

## Obslužná síť 2

Statické vlastnosti sítě jsou definovány:

- počtem a charakteristikou obslužných linek,
- topologií obslužné sítě.

Dynamické vlastnosti obslužné sítě jsou definovány:

- charakteristikou procesu příchodu požadavků
- charakteristikou procesu obsluhy požadavků
- charakteristikou procesu přechodu požadavků mezi obslužnými linkami
- strategií obsluhy požadavků v obslužných linkách sítě.





## Kendallova klasifikace SHO

Standard stručného a přehledného vyjádření typu SHO (zavedl ji D. G. Kendall) – používá tři hlavní hlediska:

- **X** – typ stochastického procesu popisujícího příchod požadavků k obsluze
- **Y** – zákon rozložení délky obsluhy
- **c** – počet dostupných obslužných linek

Specifikace má tvar **X/Y/c**, kde:

- **X, Y** ... velká písmena $M$, $D$, $G$, $E_k$, $K_n$, $GI$ – viz dále
- **c** ... přirozené číslo, včetně $\infty$

**Příklad:**
systém M/M/1





## Kendallova klasifikace SHO

| Symbol | X | Y |
|---|---|---|
| M | Poissonův proces příchodů tj. exponenciální rozložení vzájemně nezávislých intervalů mezi příchody | exponenciální rozložení doby obsluhy |
| $E_k$ | Erlangovo rozložení intervalů mezi příchody s parametry $\lambda$a $k$ | Erlangovo rozložení doby obsluhy s parametry $\lambda$ a $k$ |
| $K_n$ | rozložení $\chi^2$ intervalů mezi příchody, $n$stupňů volnosti | rozložení $\chi^2$ doby obsluhy |
| D | pravidelné deterministické příchody | konstantní doba obsluhy |
| G | žádné předpoklady o procesu příchodu | jakékoliv rozložení doby obsluhy |
| GI | rekurentní proces příchodů | |





## Modelování SHO

Při modelování SHO popisujeme:

- Procesy (transakce) v systému (příchod procesu do systému, jeho činnost, odchod)
- Stav obslužných linek a front u zařízení
- Průběh obsluhy transakcí v zařízeních

**Poznámka**
Aproximace trvání doby obsluhy exponenciálním rozložením pravděpodobnosti přináší podstatné zjednodušení.
Předpokládáme, že pravděpodobnost ukončení obsluhy v průběhu krátkého časového intervalu je konstantní a nezávisí na tom, jak dlouho již obsluha probíhala.





## Typy obslužných linek

**Podle kapacity rozlišujeme:**

- $kapacita = 1$ Zařízení (*Facility*)
- $kapacita > 1$ Sklad (*Store*)

Modelujeme-li více zařízení stejného typu, pak:

- každé zařízení má vlastní frontu $\rightarrow$ pole zařízení
- k zařízením vede jediná fronta $\rightarrow$ sklad nebo pole zařízení se sdílenou frontou

**Příklad:** Samoobsluha

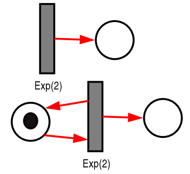
- vozíky – sklad $x$ vozíků (jedna fronta)
- dva prodavači – např. dvě zařízení se sdílenou frontou
- pět pokladen – pět samostatných zařízení (ke každé je zvláštní fronta)



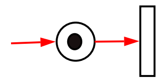


## Příchod a odchod transakce

Generování příchodu transakcí (procesů) do systému:




Transakce opouští systém:





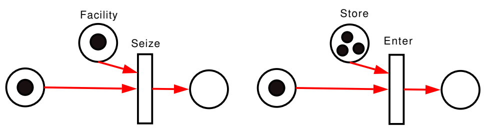


## Obsazení zařízení

Obslužná linka s kapacitou 1 (Zařízení, Facility) je volná nebo obsazená.

Obslužná linka s kapacitou $N > 1$ (Sklad, Store) má obsazeno 0 až N míst.

**Příklad:** Obsazení zařízení (Seize) a skladu (Enter)

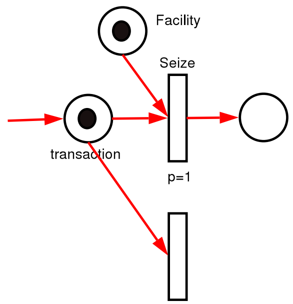







## Neblokující obsazení zařízení

Transakce přistupuje k zařízení, ale nechce čekat ve frontě:

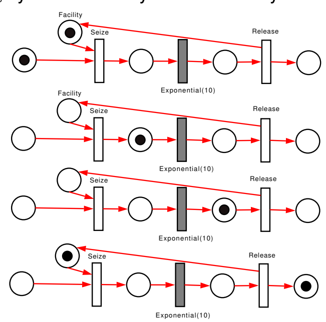






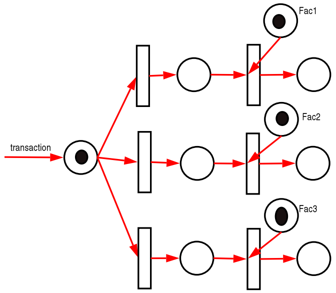

## Příklad: Přehled základních operací

Obsazení linky, vykonání obsluhy a uvolnění linky



## Náhodný výběr zařízení

Transakce náhodně vybírá jedno ze zařízení

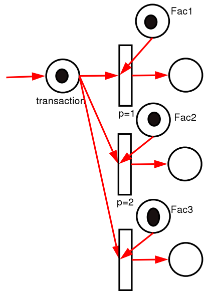







## Výběr s prioritou zařízení

Transakce přistupuje prioritně k jednomu ze zařízení








## Příklad I – Zadání

Do opravářské dílny přicházejí zákazníci v intervalech daných exponenciálním rozložením pravděpodobnosti se střední hodnotou 20 minut.

V dílně jsou dva opraváři: jeden zpracovává normální zakázky a druhý náročné zakázky. Každá třetí zakázka je náročná. Vyřízení normální zakázky trvá 15 minut s exp. rozložením pravděpodobnosti, vyřízení náročné zakázky zabere 45 minut exp. Zákazník čeká na vyřízení své zakázky a pak systém opouští.

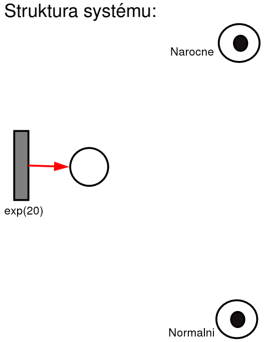
Modelujte systém pomocí stochastické Petriho sítě.





## Příklad I – pokračování

Struktura systému:

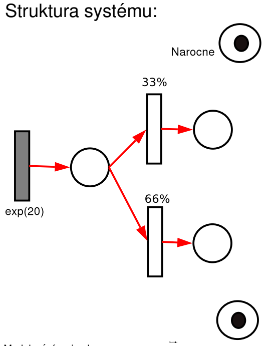







## Příklad I – pokračování

Struktura systému:

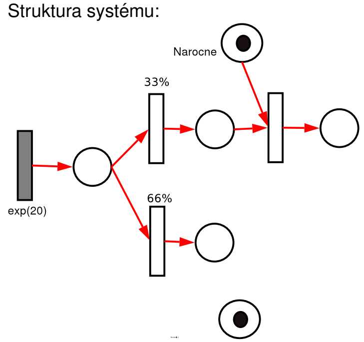







## Příklad I – pokračování

Struktura systému:

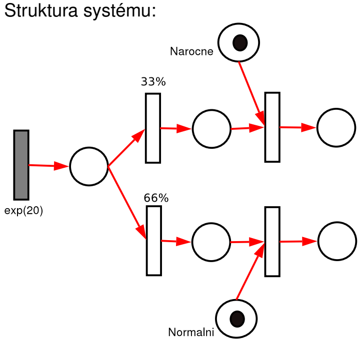







## Příklad I – pokračování

Struktura systému:

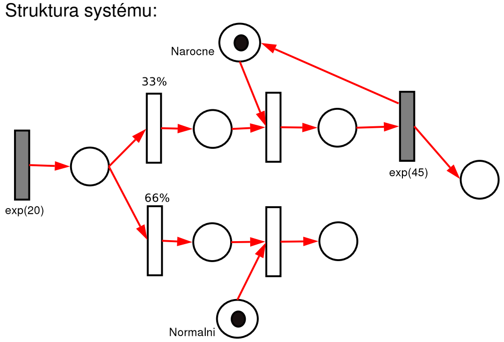







## Příklad I – pokračování

Struktura systému:

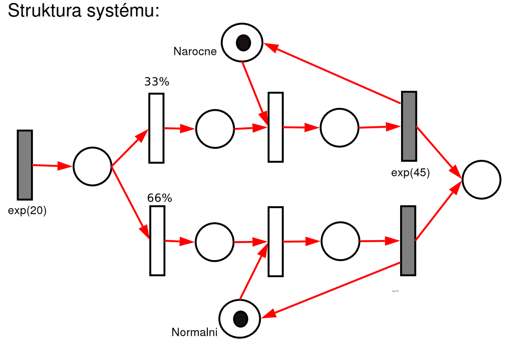






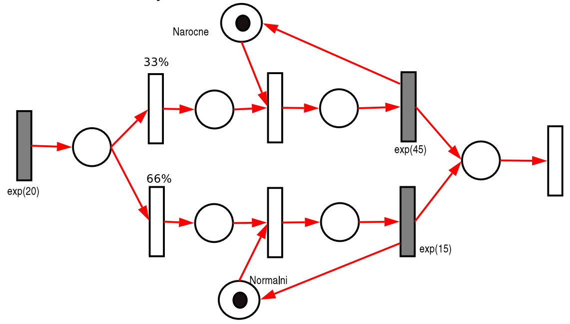

## Příklad I – pokračování

Struktura systému:



## Příklad I – pokračování

Model zadaného systému ve formě stochastické Petriho sítě:








## Příklad I – model v SIMLIB

```
Facility narocne("Narocne");
Facility normalni("Normalni");

class Zakaznik : public Process {
   void Behavior() {
     if (Uniform(0,100) <= 33) {
        Seize(narocne);        // obsazení zařízení
        Wait(Exponential(45));
        Release(narocne);      // uvolnění
     } else {
        ...
     }
   }
};
```





## Příklad I – model v SIMLIB

```
class Generator : public Event {
   void Behavior() {
      (new Zakaznik)->Activate();
      Activate(Time + Exponential(20));
   }
};

int main()         // popis experimentu
{
   Init(0, 1000);  // doba simulace
   (new Generator)->Activate();
   Run();          // start simulace
}
```





## Přehled: diskrétní část SIMLIB

**Prostředky pro diskrétní modelování:**

- Process – báze pro modelování procesů
- Event – báze pro modely událostí
- Facility – obslužná linka – výlučný přístup
- Store – obslužná linka s kapacitou
- Queue – fronta
- Statistiky – sada tříd pro sběr a uchování statistik

**Poznámka:** Podrobnosti viz WWW dokumentace





## Obecná struktura modelu

```
#include "simlib.h"

<deklarace zařízení>

<deklarace tříd - procesy, události>

<popis simulačního experimentu>
```

Simulační model v SIMLIB/C++ je program v jazyce C++. Všechny konstrukce/knihovny jazyka C++ jsou tedy použitelné.





## Popis simulačního experimentu

```
int main() {
  <příkazy1>    // základní inicializace
                // například SetOutput("soubor");
  Init(<počáteční čas>, <koncový čas>);
                // inicializace simulátoru a m. času
  <příkazy2>    // inicializace modelu
                // například vytvoření objektů
  Run();        // běh simulace
  <příkazy3>    // zpracování výsledků
                // například tisk statistik
}
```

Sekvenci `Init(t0,t1); ...; Run(); ...;` lze libovolně opakovat.





## Modelový čas

Modelový čas je reprezentován proměnnou:

`double Time;`

Do proměnné `Time` nelze zapisovat přiřazovacím příkazem. Zápis:

`Time = 10;`

vyvolá chybu při překladu.

Posun času řídí výhradně jádro simulátoru.

`Init(t0,t1);` nastaví počáteční čas na `t0`.





## Generátory pseudonáhodných čísel

```
double Random();
-- rovnoměrné rozložení, R(0,1)

double Uniform(double L, double H);
-- rovnoměrné rozložení, R(L,H)

double Exponential(double E);
-- exponenciální rozložení se středem E

double Normal(double M, double S);
-- normální rozložení se středem M a rozptylem S

...
```





## Použití objektů

OOP – třídy a instance (objekty)

- OOP vzniklo pro účely modelování a simulace (Simula 67)
- Abstrakce, hierarchie, zapouzdření, modularita; paralelnost, typování, perzistence a souvislosti
  (více v přednášce o simulačních jazycích)

## Popis události

Událost je jednorázová (nepřerušitelná) akce provedená v určitém modelovém čase. V SIMLIB je vždy odvozena od abstraktní třídy `Event` (musíme definovat metodu `Behavior()`).

Často jsou nutné periodické události — událost naplánuje sama sebe:

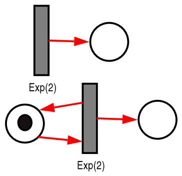
```
class Udalost : public Event {
   void Behavior() {
      // ... příkazy události
      Activate(Time + e); // periodicky aktivovat
   }
};
// Plánování události:
(new Udalost)->Activate();  // plánuje na čas Time
(new Udalost)->Activate(t); // čas t (pozor na t<Time)
```





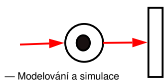
## Příchod a odchod transakce

Generování transakcí (procesů):




```
class Gener : public Event {
   void Behavior() {
      (new Proc)->Activate();
      Activate(Time+Exponential(2));
   }
};
int main() {
  Init(t0, t1);
  (new Gener)->Activate();
}
```

Transakce opouští systém:



```
class Proc : public Process {
   void Behavior() {
      ...
   } // implicitně opouští systém
```





## Popis procesu

Procesy (transakce) jsou odvozeny z abstraktní třídy `Process`.

```
class Transakce : public Process {
  public:
    Transakce( parametry ) {  // konstruktor
       // nepovinný popis inicializace procesu
    }
    void Behavior() {
       // popis chování procesu
    }
};
```

Po aktivaci procesu se volá metoda `Behavior` (chování). Provádění metody je přerušeno při čekání:

- ve frontě u zařízení (v rámci `Seize`, `Enter`)
- při explicitním `Wait(dt);` (abstrakce nějaké činnosti trvající *dt*)





## Plánování procesu

Proces se provádí jako posloupnost událostí – např.:

```
void Behavior() {
  ...
  Wait(3);
  ... // pokračování
}
```

Proces čeká 3 časové jednotky.

Při simulaci to znamená, že se naplánuje další jeho pokračování na čas $Time + 3$ (příkazem `Activate(Time+3)`).

Aktivační záznam této události je uložen do kalendáře a proces je přerušen (a spustí se první plánovaná akce v kalendáři).

**Poznámka:** `Passivate()` — pozastaví na neurčito.





## Kalendář událostí a algoritmus řízení simulace

Kalendář je uspořádaná datová struktura uchovávající aktivační záznamy budoucích událostí.

- Každá naplánovaná budoucí událost ("next event") má v kalendáři záznam [($acttime_i$, $priority_i$, $event_i$), ...]
- Kalendář umožňuje výběr prvního záznamu s nejmenším aktivačním časem a vkládání/rušení aktivačních záznamů.

**Algoritmus řízení diskrétní simulace typu "next-event"**

```
Inicializace času, kalendáře, modelu, ...
while( Kalendář je neprázdný ) {
   Vyjmi první záznam z kalendáře
   if ( Aktivační čas události > T_END )
      Konec simulace
   Nastav čas na aktivační čas události
   Proveď popis chování události
}
```





## Kvaziparalelismus a diskrétní simulace

Při simulaci v jednom okamžiku běží jen jeden proces (`Process::Behavior()`). Ostatní jsou pozastaveny — čekají ve frontách nebo jsou registrovány v kalendáři (*Pending Event Set, PES*).

Proto nemůže být aktivní proces nedobrovolně přerušen a v době svého běhu má teoreticky neomezený přístup ke všem zdrojům (proměnným programu).

Provádění procesu je přerušeno až na jeho vlastní žádost (viz tzv. kooperativní multitasking).

**Poznámka:**
Implementace přepínání procesů v SIMLIB/C++.





## Vytvoření, registrování a zrušení procesu

Vytvoření instance třídy:

```
Transakce *t = new Transakce;
```

Plánování (re)aktivace procesu do kalendáře:

```
t->Activate(tm);
```

Aktivuje se v čase *tm* (implicitně je to $tm = Time$, tj. okamžitě).

Zrušení procesu i jeho registrace ve všech strukturách (fronty, kalendář):

```
t->Cancel();  // také lze použít  delete t;
```

Suspendování běžícího procesu:

```
Passivate();
```

Pro události lze použít pouze `Activate` a `Cancel`.





## Příklad: Timeout – přerušení čekání ve frontě

```
class Timeout : public Event {
    Process *Id;
  public:
    Timeout(Process *p, double dt): Id(p) {
        Activate(Time+dt); // kdy bude
    }
    void Behavior() {
      Id->Cancel(); // zrušení procesu ...
      Cancel();     // a zrušení této události
    }
};
class MProc : public Process {
    void Behavior() {
      Timeout *t = new Timeout(this, 10);
      Seize(F);    // možné čekání ve frontě
      delete t;    // jen když nebyl timeout
      ...
```





## Čekání procesu

Explicitní: pozastavení procesu příkazem `Wait(expr)` — do kalendáře naplánuje událost reaktivace procesu na čas $Time + expr$.

Implicitní: proces může čekat ve frontě po dobu neurčitou (např. při přístupu k zařízením typu `Facility` a `Store`):

```
Facility F("F");
Store S("S",100);       // kapacita 100 míst

  Seize(F);     // před obsazením může čekat ve frontě
  Wait(5);      // F "pracuje" 5 čas. jednotek
  Release(F);   // uvolní zařízení

  Enter(S, 3);  // zabere 3 místa ve skladu nebo čeká
  Wait(50);     // ...
  Leave(S, 1);  // uvolní 1 místo
```

## Priorita procesu

Proces má atribut `Priority`, který ovlivňuje jeho řazení do front.

```
class MProc : public Process {
  // ...
public:
  MProc() : Process( PRIORITA1 ) { };
  void Behavior() {
    Priority = 3; // změna priority
    Seize(F);
    Priority = 0; // = implicitní priorita
  }
};
```

**Poznámka:**
Neplést s prioritou obsluhy při obsazování zařízení!





## Fronty — třída *Queue*

```
Queue q;
 ...
  void Behavior() { // popis chování procesu
    q.Insert(this); // vloží se do fronty
    Passivate();    // suspenduje se
    ...
  }
```

Jiný proces (nebo událost) může z fronty vybírat:

```
  ...
  if (!q.Empty()) {
    Process *tmp = q.GetFirst();
    tmp->Activate(); // aktivace
  }
```





## Zařízení (*Facility*)

Zařízení je obsaditelné procesem (výlučný přístup).

**Zařízení obsahuje dvě fronty požadavků:**
- (vnější) fronta čekajících požadavků
- (vnitřní) fronta přerušených požadavků

```
Fac.Seize(Proces);  // priorita obsluhy = 0
Fac.Seize(Proces, PrioritaObsluhy);
```

**Je třeba rozlišovat dva typy priority v SIMLIB:**

priorita procesu (řazení do front, `Priority`)
priorita obsluhy v zařízení (2. parametr metody `Seize`)





## Zařízení — inicializace

```
Facility Fac2("Jmeno");
Facility Fac4("Jmeno", &moje_fronta);
Facility Fac5[10];
```

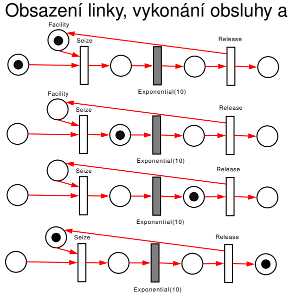
1. Jméno se tiskne ve statistikách
2. Možnost vnucení jiné fronty (např. společné s jiným zařízením)
3. Je možné kdykoli změnit (u fronty pozor na obsah):
   - `Fac5[i].SetName("Jmeno")`
   - `Fac5[i].SetQueue(moje_fronta)`





## Příklad — obsazení zařízení

Obsazení linky, vykonání obsluhy a uvolnění linky




```
Facility F("Fac");
...
class P : Process {
  void Behavior() {
    ...
    Seize(F);
    Wait(Exponential(10));
    Release(F);
    ...
  }
};
```





## Zařízení — priorita obsluhy

Používá se pro modelování poruch.
Jde o jiný typ priority, než je priorita procesu.
Zařízení má druhou, vnitřní frontu přerušených procesů.

```
  ...
  Seize(Fac);
```

V obsluze je proces A se standardní prioritou obsluhy (0).

```
  ...
  Seize(Fac, 1);
```

Jiný proces B žádá o obsluhu s vyšší prioritou obsluhy. Proces A je odstaven do vnitřní fronty a do obsluhy se dostává B.
Při uvolnění zařízení procesem B se vrátí k rozpracované obsluze proces z vnitřní fronty s nejvyšší prioritou obsluhy a dokončí se jeho obsluha.





## Sklad (*Store*)

Sklad umožňuje simultánní přístup ke zdroji s určitou kapacitou (parkoviště, paměť počítače, místa v autobuse).

```
Store Voziky("Voziky", 50);
```

Proces přistupuje ke skladu s požadavkem na obsazení kapacity *c*.
Je-li dostupná kapacita volná, přidělí se (zmenší se množství dostupné kapacity). Není-li, proces čeká ve frontě.
(Sklad nemá prioritu obsluhy.)
Proces typicky provádí operace:

```
Enter(Voziky, 1);
Leave(Voziky, 1);
```

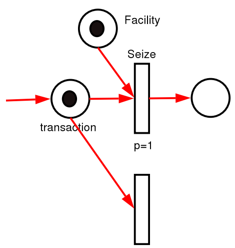
Obdržená kapacita nesouvisí s procesem – vrátit ji může libovolný jiný proces. Při vracení se uvolní kapacita a prochází se fronta čekajících.
První čekající s uspokojitelným požadavkem je obsloužen (nemusí být první ve frontě).





## Zařízení — neblokující obsazení linky

Transakce přistupuje k zařízení, ale nechce čekat ve frontě



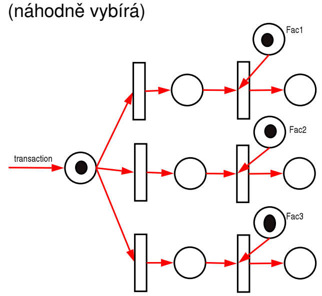

```
Facility F("Fac");
class Proc : Process {
   void Behavior() {
      ...
      if (!F.Busy())
         Seize(F);
      else
         ...
   }
}
```





## Náhodný výběr z N zařízení

Transakce přistupuje (se staví do fronty) k jednomu ze tří zařízení (náhodně vybírá)



## Náhodný výběr z N zařízení

Nedeterminismus je třeba modelovat rovnoměrným rozložením.

```
const int N = 3;
Facility F[N];

class Proc : Process {
    void Behavior() {
      ...
      int idx = int( N * Random() );
      Seize(F[idx]);
      ...
      Release(F[idx]);
      ...
    }
};
```





## Výběr s prioritou

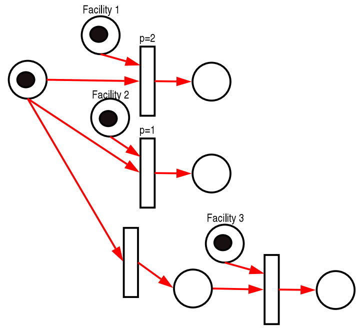
Transakce přistupuje k jednomu z N zařízení — vybírá první volné podle priority dané implicitně pořadím prohledávání pole (a pokud není volné žádné, vybere poslední):

```
const int N = 3;
Facility F[N];
...
    int idx;
    for(idx=0; idx < N-1; idx++)
        if(!F[idx].Busy())
            break; // první neobsazené
    Seize(F[idx]);
    ...
```





## Výběr s prioritou — Petriho síť








## Výběr podle délky fronty

Transakce přistupuje k zařízení s nejkratší frontou (a pokud je stejně dlouhá u více zařízení, vybere první podle pořadí prohledávání):

```
const int N = 10;
Facility F[N];

    int idx=0;
    for (int a=1; a < N; a++)
      if (F[a].QueueLen() < F[idx].QueueLen())
          idx=a;
    Seize(F[idx]);
    ...
```





## Příklad: Samoobsluha

Do samoobsluhy přicházejí zákazníci v intervalech daných exponenciálním rozložením se středem 8 minut. Každý zákazník si nejprve opatří vozík. Vozíky se koncentrují na seřadišti a je jich celkem 50. Zákazník vstoupí do prodejny a 30% jde okamžitě k pultíku s lahůdkami, kde obsluhují dvě prodavačky. Obsloužení zákazníka zde trvá 2 minuty (exponenciálně) a pak zákazník pokračuje běžným nákupem. Běžný nákup trvá 10-15 minut rovnoměrně. Nakonec přistupuje k jedné z pěti pokladen. Vybírá si pokladnu podle nejkratší fronty. Doba obsluhy u pokladny se řídí exponenciálním rozložením se středem 3 minuty. Při odchodu ze systému zákazník vrací vozík.

Zadání: analýza problému, model ve formě SPN, model ve formě SIMLIB





## Příklad: Samoobsluha — analýza

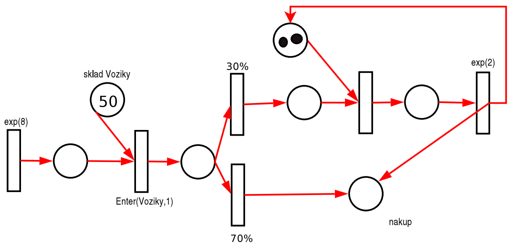
Konceptuální model:

- příchody - řídí se exponenciálním rozložením, střední hodnota je 8 minut
- proces provádí: (1) zabrat vozík, (2) 30% k lahůdkám, (3) nákup, (4) placení, (5) vrácení vozíků
- seřadiště vozíků - 50 kusů, jedna fronta, sklad
- lahůdky - jedna fronta ke dvěma prodavačkám, sklad
- pokladny - 5 pokladen, ke každé stojí zvláštní fronta





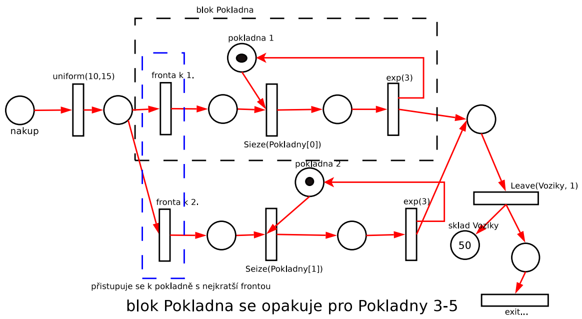
## Petriho síť — první část








## Petriho síť — druhá část








## Modelování SHO: Statistiky

Statistiky sbíráme pro zjištění:

- vytížení zařízení (procenta doby)
- délky front, doby čekání ve frontách
- využití kapacity skladů
- celková doba, kterou transakce existuje v systému (a poměr doby užitečné činnosti/čekání ve frontě)

Statistiky:

- minimum
- maximum
- střední hodnota
- rozptyl a směrodatná odchylka

## Statistiky v SIMLIB/C++

**Třídy:**
- `Stat`
- `TStat`
- `Histogram`

Společné operace:
- `s.Clear()` — inicializace
- `s.Output()` — tisk
- `s(x)` — záznam hodnoty `x`





## Třída Stat

Objekty třídy Stat uchovávají tyto hodnoty:
- součet vstupních hodnot $s_x$
- součet čtverců vstupních hodnot $s_x^2$
- minimální vstupní hodnotu
- maximální vstupní hodnotu
- počet zaznamenaných hodnot $n$

Metoda `Output` tiskne některé tyto hodnoty a navíc průměrnou hodnotu a směrodatnou odchylku:

$$\sqrt{\frac{1}{n-1}(s_x^2 - n\mu^2)}$$





## Třída *Stat* — příklad

```
int main() {
    Stat p;
    for (int a=0; a<1000; a++)
        p(Uniform(0, 100));
    p.Output();
}
```

```
+----------------------------------------------------------+
| STAT                                                     |
+----------------------------------------------------------+
|  Min = 0.403416                      Max = 99.9598      |
|  Number of records = 1000                               |
|  Average value = 49.8424                                |
|  Standard deviation = 28.8042                           |
+----------------------------------------------------------+
```





## Třída *TStat*

Objekty třídy `TStat` sledují časový průběh vstupní veličiny. Používají se k výpočtu průměrné hodnoty vstupu (např. délky fronty) za určitý časový interval.
Objekty třídy TStat uchovávají tyto hodnoty:
- sumu součinu vstupní hodnoty a časového intervalu
- sumu součinu čtverce vstupní hodnoty a časového intervalu
- minimální vstupní hodnotu
- maximální vstupní hodnotu
- počet vstupních hodnot
- počáteční čas

Metoda Output tiskne kromě vybraných uložených hodnot také průměrnou hodnotu vstupu za čas od inicializace statistiky (`Clear`) do okamžiku volání metody `Output`.





## Příklad histogramu

```
//Histogram("Jméno pro tisk", OdHodnoty, Krok, PocetTrid);
Histogram expo("Expo", 0, 1, 15);
  ...
  for (int a=0; a<1000; a++)
     expo(Exponential(3));
```

```
+----------------------------------------------------------+
| HISTOGRAM Expo                                           |
+----------------------------------------------------------+
| STATISTIC Expo                                           |
+----------------------------------------------------------+
|  Min = 0.00037629                Max = 24.8161          |
|  Number of records = 10000                              |
|  Average value = 2.94477                                |
|  Standard deviation = 2.91307                           |
+----------------------------------------------------------+
```





## Příklad histogramu — pokračování

| from | to | n | rel | sum |
|---|---|---|---|---|
| 0.000 | 1.000 | 2856 | 0.285600 | 0.285600 |
| 1.000 | 2.000 | 2042 | 0.204200 | 0.489800 |
| 2.000 | 3.000 | 1480 | 0.148000 | 0.637800 |
| 3.000 | 4.000 | 1022 | 0.102200 | 0.740000 |
| 4.000 | 5.000 | 771 | 0.077100 | 0.817100 |
| 5.000 | 6.000 | 527 | 0.052700 | 0.869800 |
| 6.000 | 7.000 | 386 | 0.038600 | 0.908400 |
| 7.000 | 8.000 | 273 | 0.027300 | 0.935700 |
| 8.000 | 9.000 | 184 | 0.018400 | 0.954100 |
| 9.000 | 10.000 | 129 | 0.012900 | 0.967000 |
| 10.000 | 11.000 | 105 | 0.010500 | 0.977500 |
| 11.000 | 12.000 | 55 | 0.005500 | 0.983000 |
| 12.000 | 13.000 | 47 | 0.004700 | 0.987700 |
| 13.000 | 14.000 | 47 | 0.004700 | 0.992400 |
| 14.000 | 15.000 | 17 | 0.001700 | 0.994100 |





## Příklad: Samoobsluha v SIMLIB

```
#include "simlib.h"

const int POC_POKLADEN = 5;

// zařízení:
Facility Pokladny[POC_POKLADEN];
Store   Lahudky("Oddělení lahůdek", 2);
Store   Voziky("Seřadiště vozíků", 50);

Histogram celk("Celková doba v systému", 0, 5, 20);
```





## Příklad: Samoobsluha — pokračování

```
class Zakaznik : public Process {
  void Behavior() {
    double prichod = Time;      // záznam času příchodu
    Enter(Voziky, 1);
    if ( Random() < 0.30 ) {    // 30% pravděpodobnost
       Enter(Lahudky, 1);
       Wait(Exponential(2));    // extra obsluha
       Leave(Lahudky, 1);
    }
    Wait(Uniform(10, 15));      // běžný nákup
    // výběr pokladny podle délky fronty:
    int i = 0;
    for (int a=1; a < POC_POKLADEN; a++)
       if (Pokladny[a].QueueLen() < Pokladny[i].QueueLen())
          i=a;
    // pokračování...
```





## Příklad: Samoobsluha — pokračování

```
    // ...pokračování
    Seize(Pokladny[i]);          // u pokladny
    Wait( Exponential(3) );
    Release(Pokladny[i]);
    Leave(Voziky, 1);
    celk(Time-prichod);          // záznam času
  } // Behavior
}; // Zakaznik

class Prichody : public Event {
  void Behavior() {
    (new Zakaznik)->Activate();
    Activate( Time + Exponential(8) );
  }
};
```

## Příklad: Samoobsluha — dokončení

```
int main()                       // popis experimentu
{
   SetOutput("samoo.dat");
   Init(0, 1000);
   (new Prichody)->Activate();  // start generátoru
   Run();                        // běh simulace

   // tisk statistik:
   celk.Output();
   Lahudky.Output();
   Voziky.Output();
   for (int a=0; a < POC_POKLADEN; a++)
       Pokladny[a].Output();
}
```





## Diskrétní simulační jazyky

Základní přehled:

- Simula67 – procesy
- Simscript – popis událostmi, ...
- SIMAN/Cinema, Arena – kombinované, bloky
- GPSS – procesy, bloky
- ...

**Příklady:** viz WWW

**Poznámky:**
SIMLIB/C++, SimPack, SimPy, ...
ns-3, OMNeT++





## Shrnutí

- použití diskrétní simulace
- popis modelu (události, procesy)
- generování pseudonáhodných čísel
- systémy hromadné obsluhy
- diskrétní simulační jazyky
- implementace: fronty, kalendář událostí algoritmus řízení simulace "next-event"

**Poznámky:**
Paralelní a distribuovaná simulace
Speciální typy diskrétní simulace (číslicové systémy, ...)





## Celulární automaty (CA) – úvod

- Historie: J. von Neumann, J. Conway, S. Wolfram, ...
- Princip CA
- Varianty CA: diskrétní, spojité, stochastické
- Použití:
  - Simulace prostorových dynamických sytémů v oblastech: doprava, šíření epidemie/požáru, chemie, růst krystalů, koroze, šíření vln/trhlin, sypání písku/sněhu, proudění tekutin, ...
  - Modely umělého života, evoluce
  - Grafika: generování textur, fraktálů
  - Výpočty: některé CA jsou *Turing-complete*
- Souvislosti: teorie chaosu, složitost, fraktály, přírodní CA, kryptografie, ...





## Definice CA

CA je typicky diskrétní systém:

- Buňka (*Cell*): základní element, může být v jednom z konečného počtu stavů (například $\{0, 1\}$).
- Pole buněk (*Lattice*): n-rozměrné, obvykle 1D nebo 2D,
  – rovnoměrné rozdělení prostoru,
  – může být konečné nebo nekonečné.
- Okolí (*Neighbourhood*): Různé typy – liší se počtem a pozicí okolních buněk se kterými se pracuje.
- Pravidla (*Rules*): Funkce stavu buňky a jejího okolí definující nový stav buňky v čase:

$$s(t+1) = f(s(t), N_s(t))$$

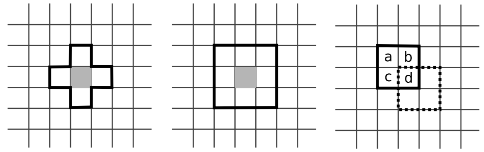




## Typy okolí

Závisí na rozměru prostoru a tvaru buněk.
Příklady pro 2D a čtvercové buňky:

- Von-Neumann
- Moore, Extended Moore
- Margolus



Von Neumann Moore Margolus

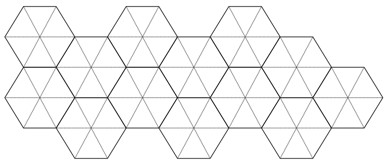
**Poznámka:** Existuje celá řada jiných typů okolí





## Typy okolí – pokračování

- Šestiúhelníkové okolí



**Poznámka:**
Implementace: převod šestiúhelníková → čtvercová struktura

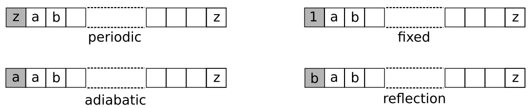
Použití: např. růst krystalů, šíření vln (FHP,...)





## Okrajové podmínky

- Periodické
- Pevné (*Fixed*): konstantní hodnota
- *Adiabatic*: hodnota vedlejší buňky (= nulový gradient)
- *Reflection*: hodnota předposlední buňky








## Implementace CA

**Implementace uložení buněk a pravidel**

- Přímá: každá buňka uložena zvlášť v poli
- Vyhledávací tabulka: jen „nenulové“ buňky
- SIMD styl: více buněk v jednom int + bitové operace
- *Hash life*: cache, quad-tree, (*memoized algorithm*)
- ...

**Poznámka:** Snadno paralelizovatelné

## Příklad1: hra Life

Hra *Life*: CA, který nastavíme na počáteční stav a spustíme.

**Definice automatu pro hru Life**

- Buňka: stavy '0' nebo '1'
- Pole buněk: dvourozměrné (2D)
- Okolí (typu *Moore*): 8 okolních buněk
- Pravidla: závislost na počtu '1' v okolí:
  - buňka '1' zůstane ve stavu '1', když má 2–3 sousedy '1'
  - buňka '0' se změní na '1', když má právě 3 sousedy '1'
  - jinak bude nový stav buňky '0'

I takto jednoduchý CA vykazuje velmi zajímavé chování – viz příklady na WWW

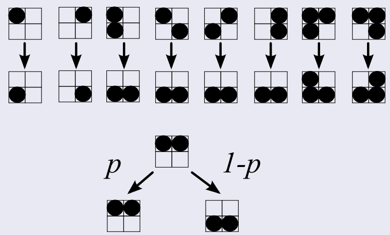




## Příklad2: sypání písku

Sypání písku (*sand rule, sandpile* model)

- Okolí typu Margolus
- Pravidla:








## Příklad3: *Ant rule*

Hypotetický mravenec (*Langton's ant*):

- Čtvercové pole buněk
- Buňky jsou bílé nebo šedé
- Pravidla:
  - Při příchodu na bílou buňku změní směr o 90 stupňů doleva a obarví ji na šedou
  - Při příchodu na šedou buňku změní směr o 90 stupňů doprava a obarví ji na bílou
- Vykazuje překvapivě zajímavé a složité chování

**Poznámka:** viz demo

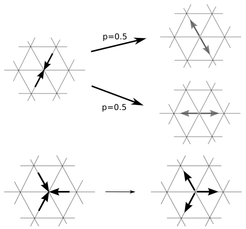




## Příklad4: FHP

Např. model pohybu tekutiny:

- Šestiúhelníkové okolí
- Buňky obsahují částice a jejich směr pohybu
- Pravidla viz obrázky + volný průlet v ostatních případech








## Příklad5: doprava – model provozu na komunikacích

**Nagel-Schreckenberg model**

- Silnice je rozdělena na úseky (cca 7m)
- Úsek je buď prázdný nebo je v něm auto
- Stav auta $j$: rychlost ($v_j = 0, 1, ..., v_{max}$)
- Pravidla provádíme v pevném pořadí:
  - R1: Akcelerace – rychlost $v_j$ zvýšíme o 1, max na $v_{max}$
  - R2: Brzdění podle vzdálenosti $d_j$ buněk od předchozího auta $v_j = min(d_j, v_j)$
  - R3: Náhodná změna rychlosti na $max(v_j - 1, 0)$ s pravděpodobností $p$
  - R4: Posun auta o $v_j(t+1)$ buněk

Poznámka: pouze minimální model, existují různé varianty.





## Pravidla – obecně

Musí popisovat změnu stavu pro všechny možnosti.

$$s(t+1) = f(s(t), N_s(t))$$

- Typy pravidel:
  - "legal" – z nulového vstupního stavu nesmí vzniknout nenulový stav
  - "totalistic" – rozhoduje *součet* vstupních stavů
- Počet možných pravidel závisí na počtu stavů a velikosti okolí. Například pro jednorozměrné okolí, na vstupu 3 prvky se stavy 0/1 (tzv. elementární automat) existuje celkem $2^3 = 8$ možností vstupu a tedy $2^8 = 256$ všech možných funkcí/pravidel.





## Reverzibilní automaty

Reverzibilní automat je systém, který neztrácí informaci při svém vývoji v čase. Proto je v každém okamžiku možno otočit běh času nazpátek a vracet se k předchozím stavům.

Například pokud definujeme nový stav buňky takto:

$$s(t+1) = f(s(t), N_s(t)) - s(t-1)$$

je možné pro libovolné $f$ počítat předchozí stav:

$$s(t-1) = f(s(t), N_s(t)) - s(t+1)$$





## Obecné vlastnosti CA

- Konfigurace CA je definována jako stav všech buněk
- Stav CA se vyvíjí v čase a prostoru podle zadaných pravidel
- Čas i prostor jsou diskretizovány
- Počet stavů buňky je konečný
- Buňky jsou identické
- Následující stav buňky závisí pouze na aktuálním stavu





## Klasifikace CA

Celulární automaty můžeme rozdělit podle jejich dynamického chování do 4 kategorií:

**Třídy CA**

- třída 1: Po konečném počtu kroků dosáhnou jednoho konkrétního ustáleného stavu
- třída 2: Dosáhnou periodického opakování (s krátkou periodou) nebo zůstanou stabilní.
- třída 3: Chaotické chování (výsledné posloupnosti konfigurací tvoří speciální fraktální útvary).
- třída 4: Kombinace běžného a chaotického chování (například Life), nejsou reverzibilní.

Zdroj: Wolfram S.: *New Kind of Science*, Wolfram Media, 2002

## Přehled implementací CA

- Možné problémy: nekonečné pole buněk, vizualizace, ...
- Existuje řada volně dostupných nástrojů.

**Příklady simulátorů CA**

- Golly (HashLife)
- různé Java applety – viz WWW,
- SimCell (dynamické CA),
- Xtoys (jednoduché, C, xlib),
- cage (Python),
- ...





## Spojitá simulace

Obsah:

- Typické aplikace spojité simulace
- Formy popisu spojitých modelů
- Převod rovnic na blokové schéma
- Numerické metody
- Spojité simulační jazyky
- Příklady





## Aplikace spojité simulace

- Elektrické a elektronické obvody
- Řízení (automatizace)
- Fyzika
- Chemie
- Astronomie (pohyb planet)
- Biologie (model srdce)
- Ekologie (rozptyl znečištění)
- ...

**Poznámka:** Konkrétní příklady viz WWW





## Popis spojitých systémů

- Soustavy obyč. diferenciálních rovnic (ODE)
- Soustavy algebraických rovnic
- Algebraicko-diferenciální rovnice (DAE)
- Bloková schémata
- Parciální diferenciální rovnice (PDE)
- Elektrická schémata
- ...
- Grafy signálových toků
- Kompartmentové systémy
- Systémová dynamika
- "Bond-graphs"

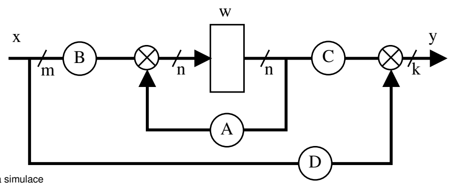




## Soustavy dif. rovnic: maticový popis

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\vec{w}(t) &= \mathbf{A}(t)\vec{w}(t) + \mathbf{B}(t)\vec{x}(t)\\ \vec{y}(t) &= \mathbf{C}(t)\vec{w}(t) + \mathbf{D}(t)\vec{x}(t)\end{aligned}$$

kde $\vec{x}$ je vektor $m$ vstupů, $\vec{w}$ vektor $n$ stavových proměnných, $\vec{y}$ vektor $k$ výstupů a $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ matice koeficientů








## Typy dif. rovnic

Koeficienty (prvky matic $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$) mohou být:

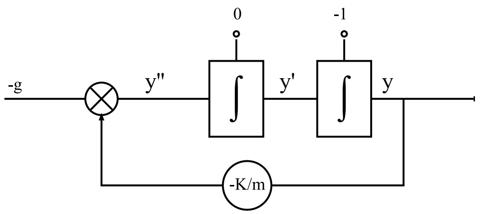
- nezávislé na čase (stacionární systémy),
- časově proměnné,
- konstanty (lineární systémy),
- nelineární funkce (nelineární systémy).

**Poznámka:** Problémy při analytickém řešení





## Grafový popis – bloky




**Poznámka:** Souvislost s analogovými počítači





## Typy bloků

**Funkční bloky (Bezpamětové):**

- konstanty
- T (modelový čas)
- Sin, Cos, Log, ...
- $+, -, *, /$
- Uživatelem definované funkce

**Stavové bloky (Paměťové; mají počáteční podmínky):**

- integrátory
- zpoždění
- ...

**Poznámka:** Hierarchie: složené bloky (i kombinované)





## Převod rovnic vyššího řádu

Rovnice vyšších řádů musíme převést na soustavu rovnic prvního řádu, pro které máme vhodné numerické metody.

**Metody převodu:**

- Snižování řádu derivace
- Postupná integrace
- Jiné speciální metody

**Poznámky:**
Pozor na podmínky pro převod
Existují i num. metody pro řešení rovnic vyššího řádu

## Metoda snižování řádu derivace

1. Osamostatnit nejvyšší řád derivace (viz příklad)
2. Zapojit všechny integrátory za sebe a
   ke vstupu prvního připojit pravou stranu z (1)

Podmínka: nesmí být derivace vstupů ($x'$, $x''$, ...)

Příklad: rovnice $y'' - 2y' + y = x$

$$\begin{aligned} y'' &= 2y' - y + x \\ y' &= \int y'' \\ y &= \int y' \end{aligned}$$

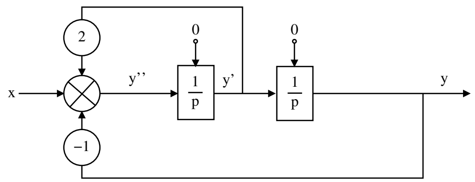
**Poznámky:**

- Typický tvar blokového schématu
- Pozor na počáteční podmínky





## Příklad: Blokové schéma








## Metoda postupné integrace

Vhodná pro rovnice s derivacemi vstupů na pravé straně

1. Osamostatnit nejvyšší řád derivace
2. Postupná integrace rovnice a
   zavádění nových stavových proměnných
3. Výpočet nových počátečních podmínek

Podmínka: konstantní koeficienty

Příklad: rovnice $p^2y + 2py + y = p^2x + 3px + 2x$

$$\begin{aligned} p^2y &= p^2x + p(3x - 2y) + (2x - y) \\ py &= px + (3x - 2y) + \tfrac{1}{p}(2x - y), \text{ proměnná } w_1 = \tfrac{1}{p}(2x - y) \\ py &= px + (3x - 2y) + w_1 \\ y &= x + \tfrac{1}{p}(3x - 2y + w_1), \text{ proměnná } w_2 = \tfrac{1}{p}(3x - 2y + w_1) \\ y &= x + w_2 \end{aligned}$$

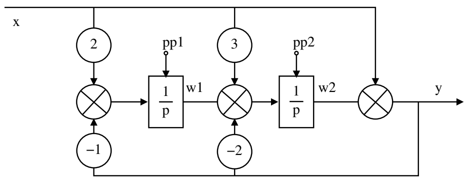




## Metoda postupné integrace – příklad

**Výsledná soustava rovnic:**

$$\begin{aligned} w_1 &= \tfrac{1}{p}(2x - y), & w_1(0) &= y'(0) - x'(0) - 3x(0) + 2y(0) \\ w_2 &= \tfrac{1}{p}(3x - 2y + w_1), & w_2(0) &= y(0) - x(0) \\ y &= x + w_2 \end{aligned}$$








## Numerické metody

Při spojité simulaci potřebujeme metody pro:

- řešení ODR 1. řádu (*Initial Value Problem*)
- řešení algebraických rovnic (hledání kořenů – řešení tzv. rychlých smyček)
- (také řešení PDR atd., ale ne v tomto předmětu)

**Poznámky:**

- Existuje celá řada metod (viz např *Netlib*)
- Je nutné znát vlastnosti numerických metod





## Metody pro řešení ODR 1.řádu

Hledáme řešení rovnice

$$y' = f(t, y)$$

které má tvar:

$$y(T) = y_0 + \int_0^T f(t, y)dt$$

Na počítači je řešení aproximováno v bodech $t_0, t_1, t_2, \ldots t_n$

Integrační krok: $h_i = t_{i+1} - t_i$

**Poznámka:** Integrační krok nemusí být konstantní





## Princip, klasifikace

**Obecný princip metody *N*-tého řádu:**

1. Aproximace $y(T)$ polynomem $N$-tého stupně (Taylorův rozvoj)
2. Extrapolace – výpočet $y(t + h)$

**Klasifikace metod:**

- Jednokrokové – vychází jen z aktuálního stavu
- Vícekrokové – používají historii stavů/vstupů

Další možné dělení:

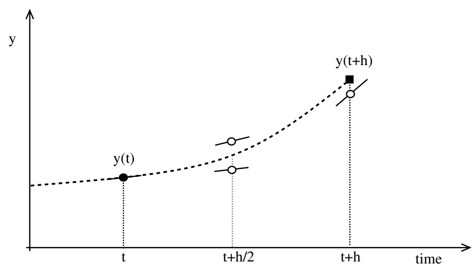
- Explicitní – výsledek získáme dosazením do vzorce
- Implicitní – vyžadují řešení algebraických rovnic v každém kroku





## Jednokrokové metody

Princip jednokrokových metod (RK4):

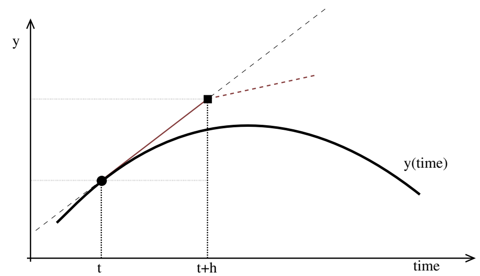







## Eulerova metoda — princip

$$y(t + h) = y(t) + hf(t, y(t))$$



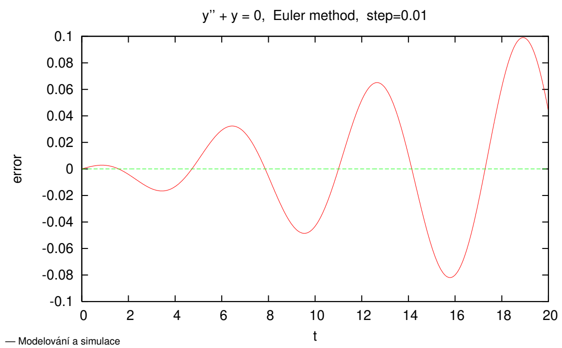
## Eulerova metoda — implementace a příklad

```
double  yin[2],  y[2] = { 0.0, 1.0 },  time = 0,  h = 0.001;
void Dynamic() {         // f(t,y): výpočet vstupů integrátorů
    yin[0] = y[1];       // y'
    yin[1] = -y[0];      // y''
}
void Euler_step() {      // výpočet jednoho kroku integrace
    Dynamic();           // vyhodnocení vstupů integrátorů
    for (int i = 0; i < 2; i++)  // pro každý integrátor
        y[i] += h * yin[i];      // vypočteme nový stav
    time += h;           // posun modelového času
}
int main() { // Experiment: kruhový test, čas 0..20
    while (time < 20) {
        printf("%10f %10f\n", time, y[0]);
        Euler_step();
    }
}
```





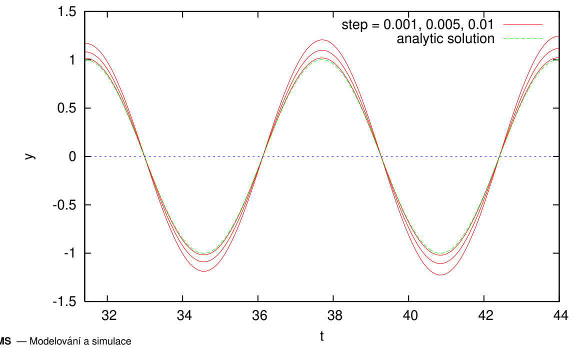
## Příklad: Absolutní chyba Eulerovy metody








## Příklad: vliv velikosti kroku








## Metody Runge-Kutta

Skupina metod: RK1=Euler, RK2, RK4, RK8, ...

**RK2: 2. řád**

$k_1 = hf(t, y(t))$
$k_2 = hf(t + \frac{h}{2}, y(t) + \frac{k_1}{2})$
$y(t + h) = y(t) + k_2$

**RK4: 4. řád**

$k_1 = hf(t, y(t))$
$k_2 = hf(t + \frac{h}{2}, y(t) + \frac{k_1}{2})$
$k_3 = hf(t + \frac{h}{2}, y(t) + \frac{k_2}{2})$
$k_4 = hf(t + h, y(t) + k_3)$
$y(t + h) = y(t) + \frac{k_1}{6} + \frac{k_2}{3} + \frac{k_3}{3} + \frac{k_4}{6}$





## Metody Runge-Kutta — pokračování

Často používané metody — každý spojitý simulační systém obsahuje alespoň jednu RK metodu

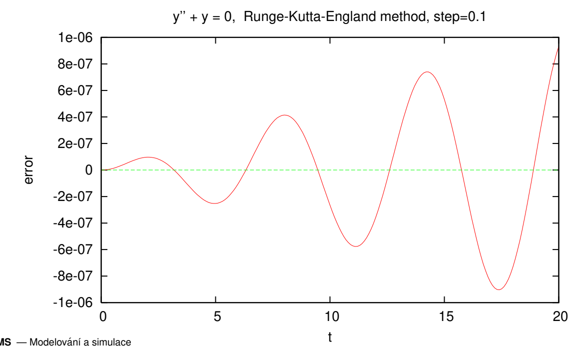
**Poznámky:**

- Implementace — viz WWW
- Různé další varianty (např. Dormand-Prince 45)
- Specifikace metody tabulkou: *Butcher tableau*
- Odhad chyby
- Změna kroku na základě odhadu chyby
- Existují také implicitní metody RK — viz WWW





## Přesnost metody Runge-Kutta — příklad

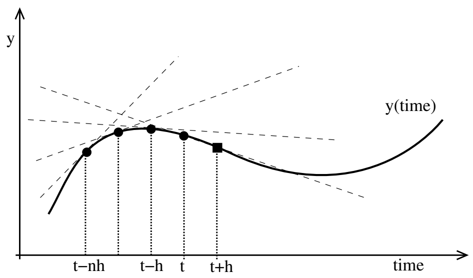







## Vícekrokové metody – princip

Používají hodnoty zapamatované z předchozích kroků








## Vícekrokové metody

**Adams-Bashforth:**

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55f_n - 59f_{n-1} + 37f_{n-2} - 9f_{n-3})$$

Metody typu *prediktor/korektor* zpřesňují výsledek:

**Adams-Bashforth-Moulton:**

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(9f_{n+1} + 19f_n - 5f_{n-1} + f_{n-2})$$

**Poznámky:**
Problém startu metody (řešení: např. použití jednokrokové metody pro první kroky).
Existují i samostartující vícekrokové metody.





## Vlastnosti integračních metod

**Chyba metody:**

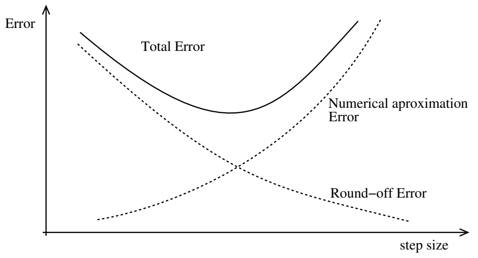
- Lokální chyba (v jednom kroku)
  - Chyba zaokrouhlovací (*round-off error*)
  - Chyba aproximace (*truncation error*)
- Akumulovaná (globální) chyba – maximum odchylky od přesného řešení.

Stabilita metody:

- Stabilita numerického řešení
- Vliv velikosti integračního kroku na stabilitu

**Poznámka:** Příklady nestability/nepřesnosti

## Lokální chyba numerické metody

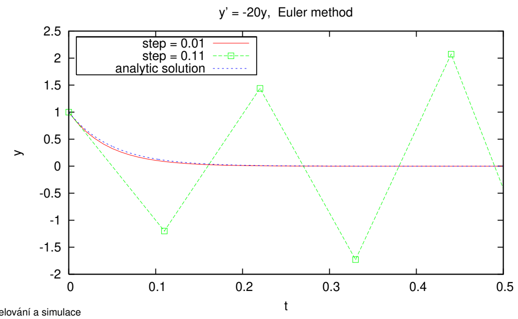







## Stabilita numerické metody — příklad

Rovnice: $y' = -20y$, počáteční podmínka: $y(0) = 1$








## Tuhé systémy (stiff systems)

Problém: velmi rozdílné časové konstanty

Příklad tuhého systému/rovnice:

$$y'' + 101y' + 100y = 0$$

Řešení:

- Použití speciálních integračních metod (implicitních)
- Zkrácení kroku – často nelze (akumulace chyb, malá efektivita výpočtu)

**Poznámky:** Koeficient tuhosti, explicitní/implicitní metody, oblast stability, A-stabilita, atd. (Podrobnosti viz literatura.)





## Výběr integrační metody

Neexistuje univerzální (nejlepší) metoda.

- Obvykle vyhovuje některá varianta metody Runge-Kutta 4. řádu.
- Nespojitosti ve funkci $f(t, y)$ snižují efektivitu vícekrokových metod (časté startování).
- Tuhé systémy vyžadují speciální implicitní metody.
- Pro ověření přesnosti výsledků je třeba vyzkoušet různé integrační metody nebo různé velikosti kroku.
- Existují meze velikosti kroku (viz stabilita, přesnost).
- Některé metody umí tzv. "*dense output*" (interpolaci výsledného průběhu uvnitř kroku).





## Příklad: Systém dravec–kořist

**Rovnice systému dravec-kořist (*Lotka-Volterra*):**

$$\frac{dx}{dt} = k_1 x - k_2 xy$$

$$\frac{dy}{dt} = k_2 xy - k_3 y$$

kde:

- $x$ množství kořisti
- $y$ množství dravců

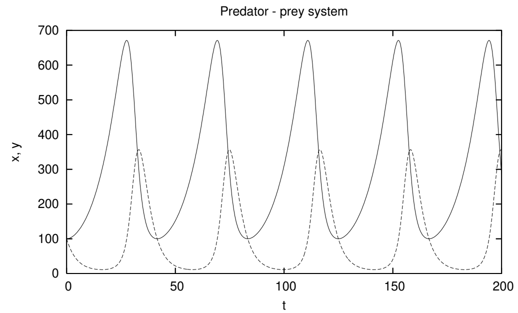
Zobrazení výsledků:

- v čase
- ve fázové rovině (*phase space*)





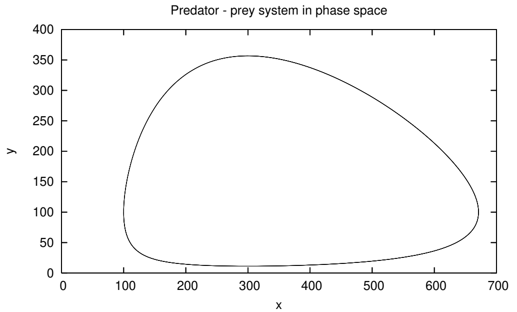
## Příklad: dravec–kořist, zobrazení v čase








## Příklad: dravec–kořist, fázová rovina








## Příklad: chaos (*Lorenz equations*)

- Nelineární diferenciální rovnice

$$\frac{dx}{dt} = \sigma(y - x)$$

$$\frac{dy}{dt} = x(\rho - z) - y$$

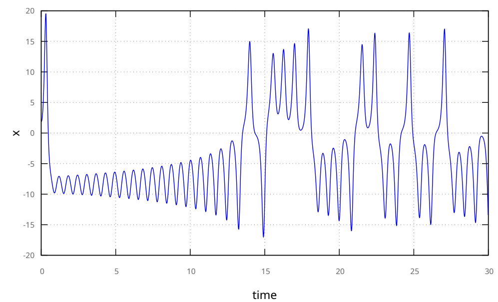
$$\frac{dz}{dt} = xy - \beta * z$$

- Parametery: $\sigma = 10$ $\rho = 28$ $\beta = 8/3$
- Chaotické chování
- Příklad $x(0) = 2$ $y(0) = 1$ $z(0) = 1$

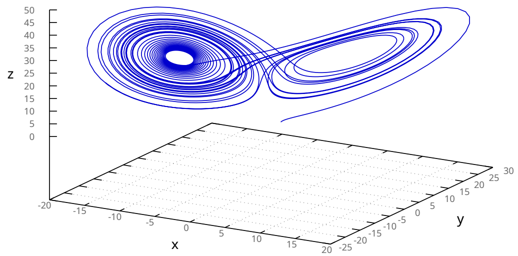




## Příklad: chaos – výsledky



## Příklad: chaos – výsledky 3D








## Spojité simulační jazyky

Nástroje na popis modelu + popis experimentů

**Algoritmus řízení spojité simulace:**

1. Inicializace (nastavit počáteční stav)
2. Cyklus dokud není konec simulace:
   1. Pokud je vhodný čas provedeme výstup (tisk)
   2. Vyhodnocení derivací a výpočet nového stavu
   3. Posun modelového času
3. Ukončení, výstup

**Poznámky:** Pořadí vyhodnocování. Přesné dokročení na koncový čas.





## Problém uspořádání funkčních bloků

Výpočet závisí na pořadí vyhodnocování *funkčních* bloků

Příklad:

```
a = fa(1,b)    # b ještě není vypočítáno = chyba
b = fb(a)
c = fc(a,b)
...
```

Řešení:

- Seřazení funkčních bloků (*topological sort*)
- Vyhodnocování na žádost (viz SIMLIB/C++)

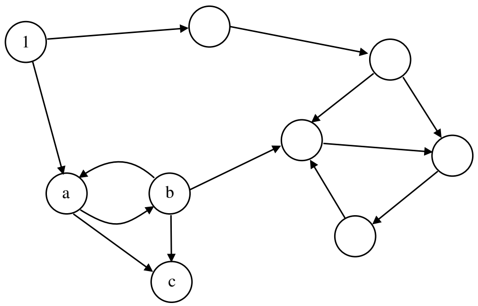
**Poznámka:** Paměťové bloky (integrátory) mají oddělený vstup a výstup, proto jsou nezávislé na pořadí vyhodnocování.





## Řazení funkčních bloků

Princip algoritmu (hledání silných komponent grafu):








## Rychlé smyčky

Problém: cyklus v grafu závislostí funkčních bloků
(způsobeno například příliš vysokou úrovní abstrakce)

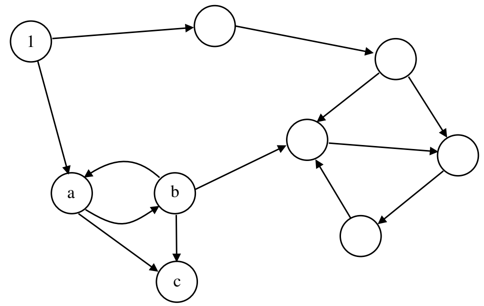
Řešení:

- Rozpojení cyklu speciálním blokem, který (například iteračně) řeší algebraické rovnice.
  Metody: půlení intervalu, Regula-falsi, Newtonova, ...
- Přepracování modelu na model bez smyček,
  například zpřesnění modelu (vložení integrátoru).





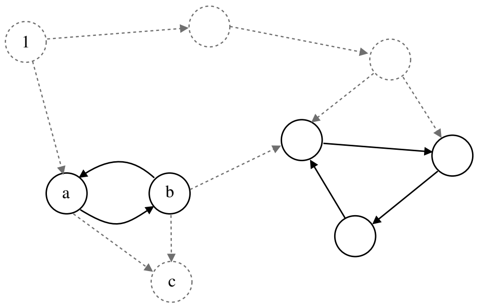
## Rychlé smyčky — obrázek 1







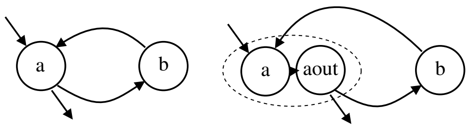

## Rychlé smyčky — obrázek 2








## Rychlé smyčky — možné řešení








## Parciální diferenciální rovnice (PDR, *PDE*)

Obsahují derivace podle *více proměnných* (např. prostorových souřadnic)

Řešení: diskretizace v prostoru = nahrazení prostorových derivací diferencemi (metoda přímek)

Příklad: kmitající struna — řešení viz WWW

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Počáteční podmínky: $y(x,0) = -\frac{4}{l^2}x^2 + \frac{4}{l}x$ a $y'(x,0) = 0$
Okrajové podmínky: $y(0,t) = y(l,t) = 0$
Diskretizace:

$$\left.\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right|_{x_i} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta x^2}$$

## Shrnutí

- Oblasti použití spojité simulace
- Popis modelu
- Numerické metody a jejich základní vlastnosti
- Jazyky, implementace, problémy
- Nároky na výkon počítače

**Poznámky:** Paralelní simulace, superpočítače





## Spojité simulační nástroje – přehled

- Matlab/Simulink (R), SciLab, GNU Octave
- Modelica: Dymola (R), OpenModelica
- ...
- SIMLIB/C++
- SciPy
- GNU Scientific Library
- více viz odkazy na WWW

**Poznámka:** Netlib, SUNDIALS, ...





## SIMLIB/C++

C++ knihovna pro spojitou i diskrétní simulaci

Přehled prostředků pro spojitou simulaci:

- Globální proměnné (typicky jsou pouze pro čtení): `StepSize`, `MinStep`, `MaxStep`, ...
- Bloky: `Integrator`, `Constant`, ...
- Blok reprezentující modelový čas: `T`
- Odkaz na blokový výraz: `Input` (a blok `Expression`)

Doplňky: kombinovaná simulace, 2D, 3D, fuzzy, optimalizace

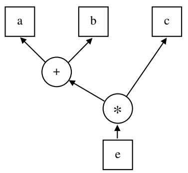




## Blokové výrazy v SIMLIB/C++

- Automatická konstrukce výrazových stromů (používá přetěžování operátorů v C++)
- Metoda bloku `double Value()` vyhodnotí vstupy voláním jejich metody `Value` a vrátí výsledek

Příklad: `Expression e = (a + b) * c`




**Poznámka:** Pozor: Blok `T` reprezentuje modelový čas, protože proměnnou `Time` nelze použít.





## SIMLIB – typy bloků

Třídy definované v SIMLIB/C++:

- Konstanty, parametry, proměnné: `Constant`, `Parameter`, `Variable`
- Funkční bloky: `Function`, `Sin`, `Exp`, `Max`, `Sqrt`, `Abs`, ... `Lim`, `DeadZone`, `Frict`, ... pro blokové výrazy: `_Add`, `_Mul`, ...
- Stavové bloky:
  - `Integrator`
  - Nelinearity se stavem: `Hysteresis`, `Relay`, `Blash`

**Poznámka:** `Relay` přesně detekuje okamžik přepnutí





## SIMLIB – popis experimentu

Sledování stavu modelu:

- třída `Sampler` – periodické volání funkce
- funkce `SetOutput(filename)` – přesměrování výstupu
- funkce `Print(fmt,...)` – tisk typu `printf`

Nastavení parametrů simulace:

- krok – `SetStep(minstep,maxstep)`
- požadovaná přesnost – `SetAccuracy(abs,rel)`
- integrační metoda – `SetMethod(name)` (Metody: "abm4", "euler", "rke"(default), "rkf3", "rkf5", "rkf8")

Řízení simulace:

- `Init(t0,t1)`, `Run()`
- `Stop()` – ukončení aktuálního experimentu (běhu)
- `Abort()` – ukončení programu





## SIMLIB – příklad

```
// kmitání kola (verze 2 - několik experimentů)
// popis systému: y'' = ( F - D * y' - k * y ) / M
//              nulové počáteční podmínky
#include "simlib.h"
struct Kolo {                   // popis systému
   Parameter M, D, k;
   Integrator v, y;
   Kolo(Input F, double _M, double _D, double _k):
      M(_M), D(_D), k(_k),        // parametry systému
      v( (F - D*v - k*y) / M ),   // rychlost
      y( v )  {}                  // výchylka
      void PrintParameters() {
         Print("# hmotnost = %g kg \n", M.Value());
      }
};
```





## SIMLIB – příklad

```
// Parametry:
double _m=5, _d=500, _k=5e4; // implicitní hodnoty

// Objekty modelu:
Constant F(100);             // síla působící na kolo
Kolo k(F, _m, _d, _k);       // instance modelu kola

// Sledování stavu modelu:
void Sample() {
  Print("%f %g %g\n", T.Value(),k.y.Value(),k.v.Value());
}
Sampler S(Sample, 0.001);
```





## SIMLIB – příklad

```
int main() {                    // Popis experimentů ...
 SetOutput("kolo2.dat");
 _Print("# KOLO2 - model kola (více experimentů)\n");
 for(double m=_m/2; m<=_m*5; m*=1.2) {
   k.M = m;     // parametr M
   k.D = _d;    // parametr D
   k.k = _k;    // parametr k
   k.PrintParameters();
   Print("# Time  y  v \n");
   Init(0, 0.3);                // inicializace experimentu
   SetAccuracy(1e-6, 0.001); // max. chyba integrace
   Run();                       // simulace
   Print("\n");  // oddělí výstupy experimentů (GnuPlot)
 }
}
```

## Dymola, OpenModelica

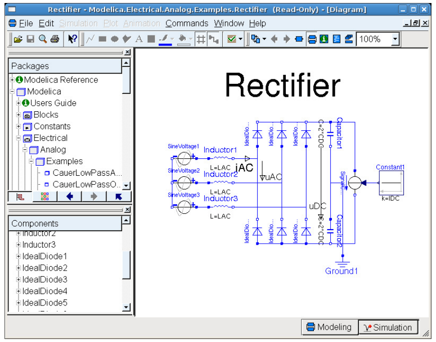
- Integrované prostředí
  *Modelica + GUI + knihovny*
- Modelica – simulační jazyk
- Modelica library – std. knihovna
- Nástroj pro modelování fyzikálních systémů
- OpenModelica (open source)
- Dymola (komerční program, demo verze je volně k dispozici)

**Poznámka:** Existují i další alternativy.





## Grafické rozhraní








## Přehled vlastností

- Překlad Modelica → C, závislost na překladači C
- Výstupní formát kompatibilní s MatLab
- Snadné skládání modelů z komponent (knihovny)
- Snadno rozšiřitelné
- Symbolické řešení některých rovnic (algebraické smyčky, soustavy algebraických rovnic, ...) redukuje náročnost numerického řešení modelu
- Efektivní (umožňuje *real-time hardware-in-the-loop* simulaci)





## Jazyk Modelica

- Simulační jazyk vyvíjený od roku 1996
- Vznikla oddělením od Dymoly
- Nezisková organizace: *Modelica Association*
- Objektově orientovaný jazyk
- Popis rovnicemi: diferenciální, algebraické, diskrétní
- Může kontrolovat fyzikální jednotky
- Multimodely pro různé fyzikální systémy
- Existuje standardní knihovna komponent
- Použití: průmysl, výzkum, ...





## Modely v Modelice

- Různé knihovny komponent (modelů):
  - Mechanické: např. převodovky, motory, roboty
  - Elektrické a elektronické obvody: RLC, diody
  - Hydraulické: čerpadla, potrubí
  - Tepelné: chladiče, vedení tepla
  - ...
- Vytváření nových komponent/knihoven
- Modely řídicích systémů, ...





## Příklad: elektrický obvod – RC článek

```
model rc "Model obvodu RC"
  Resistor     R(R=1000);
  Capacitor    C(C=0.001);
  SineVoltage  U(offset=5, V=0.5, freqHz=1);
  Ground       ground;
equation
  connect(U.n, C.n);    // propojovací rovnice
  connect(U.p, R.p);
  connect(R.n, C.p);
  connect(U.n, ground.p);
end rc;
```





## Definice základních komponent obvodu

```
connector Pin
  Voltage      v;
  flow Current i;   // flow => součet=0
end;

partial model OnePort "abstraktní bázová třída"
  Pin p, n;
  Voltage v;   // napětí
  Current i;   // proud
equation
  v = p.v - n.v;
  0 = p.i + n.i;
  i = p.i;
end OnePort;
```





## Ideální rezistor a kondenzátor

```
model Resistor "ideální rezistor"
  extends OnePort;
  parameter Real R(unit="Ohm") "odpor";
equation
  R*i = v;          // Ohmův zákon
end Resistor;


model Capacitor "ideální kondenzátor"
  extends OnePort;
  parameter Real C(unit="F") "kapacita";
equation
  C * der(v) = i;  // diferenciální rovnice
end Capacitor;
```





## Modelica – shrnutí

- V praxi používané systémy (Dymola, OpenModelica)
- Otevřený jazyk Modelica + std. knihovna
- Numerické metody (DASSL, ...)
- Výhody
- Nevýhody
- Dymola (zastaralá verze, grant FRVŠ)
- Doporučení: použijte OMEdit – viz www.openmodelica.org

## Kombinovaná (hybridní) simulace

= spojitá simulace + diskrétní simulace + jejich propojení

- Problém kombinace událostí a numerické integrace
- *Stavové podmínky* a detekce jejich změn
- Změna stavové podmínky způsobí *stavovou událost*
- Problém zkracování kroku ("dokročení" na stavovou událost)
- Skokové změny spojitého stavu a jejich vliv na použitou numerickou metodu
- ...

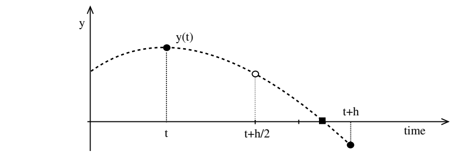




## Stavové podmínky (*State Conditions*)

**Problém:**
*Stavová událost* nastane po dosažení zadané hodnoty spojité veličiny (tj. při změně stavové podmínky) – nelze ji naplánovat.

**Příklad:** Detekce dopadu míčku na zem
Hledáme řešení algebraické rovnice $y(t) = 0$




Metody: půlení intervalu, Regula-falsi, Newtonova, ...

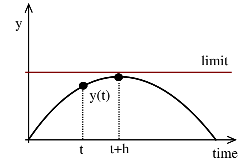


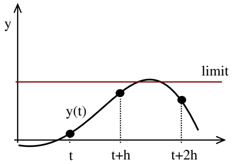


## Problémy detekce změn stavových podmínek

Problém: nedetekování stavové události způsobené
- nepřesností výpočtu
- příliš dlouhým krokem (překročení dvou změn)

**Příklady:**








## Stavové podmínky v SIMLIB/C++

Speciální bloky – abstraktní třídy:

`Condition` (detekce jakékoli změny),
`ConditionUp` (změna false → true),
`ConditionDown` (změna true → false)

Odvozené třídy musí definovat metodu `void Action()` s popisem stavové události.

Podmínka je vždy ve tvaru `(vstup >= 0)`

**Poznámka:** SIMLIB používá metodu půlení intervalu při které zkracuje krok až k `MinStep`





## Algoritmus řízení simulace – pseudokód

```
Inicializace stavu a podmínek
while ( čas < koncový_čas) {
    Uložení stavu a času                   ***
    Krok numerické integrace a posun času
    Vyhodnocení podmínek
    if ( podmínka změněna )
        if ( krok <= minimální_krok)
            Potvrzení změn podmínek
            Stavová událost                ===
            krok = běžná_velikost_kroku
        else
            Obnova stavu a času            ***
            krok = krok/2
            if (krok < minimální_krok)
                krok = minimální_krok
}
```





## Algoritmus řízení simulace – poznámky

- Jde pouze o část algoritmu řízení kombinované simulace
- Pseudokód patří do algoritmu *next-event* místo:
  `Time = čas příští události`
- `koncový_čas` je čas příští události nebo čas konce simulace
- Stavová událost může plánovat událost (a tím změnit `koncový_čas`).
- `Krok numerické integrace` – délka posledního kroku před koncovým časem musí být vhodně upravena – tzv "dokročení", ale může nastat problém s minimální délkou kroku, proto je dobré použít následující kód:

```
if (Time + krok*1.01 > koncový_čas)
    krok = koncový_čas - Time;
```





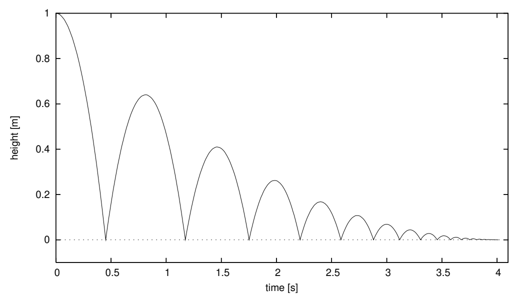
## Příklad: skákající míček (SIMLIB)

```
struct Micek : ConditionDown {  // skákající míček
  Integrator v,y;               // stavové proměnné
  unsigned count;
  void Action() {
      v = -0.8 * v.Value();     // ztráta energie...
      y = 0;                    // eliminace nepřesnosti
      if(count>=20)             // max 20 dopadů
        Stop();                 // konec experimentu
  }
  Micek(double initialposition) :
    ConditionDown(y),  // (y>=0) změna TRUE --> FALSE
    v(-g),                      // y' = INTG( -g )
    y(v, initialposition),      // y  = INTG( y' )
    count(0) {}  // inicializace počtu dopadů/odrazů
};
Micek m1(1.0);                  // instance modelu
```





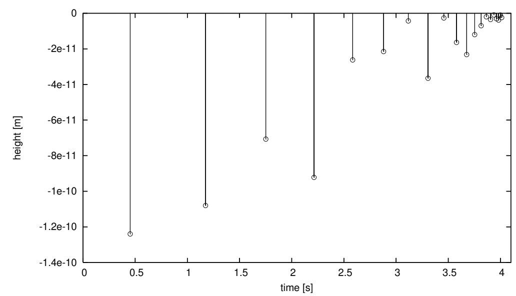
## Příklad: skákající míček – výsledek








## Příklad: míček – chyba detekce (Minstep$= 10^{-9}$)



## Simulace číslicových systémů – přehled

**Úrovně popisu:**

- Elektrická – tranzistory, rezistory, kondenzátory (spojité modely)
- Logická – hradla, klopné obvody (diskrétní modely)
- Meziregistrové přenosy – čítače, řadiče, ALU (diskrétní modely)
- Systémová – procesory, paměti, periferie (diskrétní modely, hromadná obsluha, výkonnost)

Používají se specializované nástroje a techniky:

- SPICE: elektrická úroveň
- VHDL: logická, RTL
- ...





## Modely signálů

**Modely signálu**

- Dvojhodnotové: jen 0 a 1 (málo používané, rychlé)
- Trojhodnotové: + neurčitá úroveň X
- 5-hodnotové: 0, 1, X, R (Rise=růst) a F (Fall=sestup)
  výhoda: přesnější popis, odhalí více hazardů
  nevýhoda: pomalé
- VHDL používá 9 hodnot ("UX01ZWLH-")

Další možné hodnoty:

- Stav Z (vysoká impedance), různá "síla" signálu (u CMOS)
  Statický (_/_) a dynamický (_/\/~) hazard, ...





## Modely zpoždění

**Zpoždění logických členů:**

- 0 — nulové (jen pro ověření log. funkce)
- 1 — jednotkové (většinou nevhodné)
- $t_d$ — přiřaditelné (zvlášť pro 0→1 a 1→0)
- $\langle t_1, t_2 \rangle$ — přesné (rozsah od–do)

**Poznámky:**
Zpoždění na spojích
Kontrola časování (např. dodržení předstihu a přesahu u klopných obvodů)





## Simulační algoritmus

Řízení událostmi ⇒ problém velkého množství událostí v kalendáři (existují i další metody – např. s pevným krokem)

Selektivní sledování: vyhodnocování jen u prvků které jsou ovlivněny změnou na vstupu.

Implementace popisu modelu:

- řízení tabulkami (interpretace)
- kompilovaný model (provádění kódu)

**Poznámky:**
problém zpětných vazeb u sekvenčních obvodů (možné je např. iterační řešení),
problém inicializace (počáteční hodnoty signálů)





## Algoritmus řízení simulace číslicových obvodů

**Dvoufázový algoritmus (selektivní sledování):**

```
inicializace, plánování události pro nový vstup
while (je plánována událost) {
   nastavit hodnotu modelového času na T
   for (u in všechny plánované události na čas T) {
      výběr záznamu události u z kalendáře
      aktualizace hodnoty signálu
      přidat všechny připojené prvky do množiny M
   }
   for (p in množina prvků M) {
      vyhodnocení prvku p
      if (změna jeho výstupu)
         plánování nové události
   }
}
```





## Simulace poruch

**Typy poruch:**

- trvalá 0
- trvalá 1
- zkrat mezi funkčními vodiči

Činnost:

- Specifikace poruch – které poruchy budou modelovány
- Injekce poruch – převod modelu na model s poruchou
- Šíření poruch modelem
- Detekce poruch – projeví se porucha?
- Zpracování výsledků – vytvoření podkladů pro testy

**Poznámka:** Ověřování úplnosti diagnostického systému (vše opakovat pro každou poruchu) je časově náročné





## Jazyky pro popis číslicových systémů

VHDL: vhodné pro složité systémy

Úrovně popisu (lze kombinovat):

- Popis struktury – propojení hradel
- Popis chování
  - algoritmem – proces
  - data flow – RTL (Register Transfer Level)
    např. `o <= transport i1 + i2 after 10 ns;`

Knihovny prvků

**Poznámka:** Příklady viz WWW — Například
`http://www.cs.ucr.edu/content/esd/labs/tutorial/`





## VHDL – příklad

```
-- AND hradlo (ESD book figure 2.3)
-- převzato z
-- http://www.cs.ucr.edu/content/esd/labs/tutorial/

library ieee;
use ieee.std_logic_1164.all;

entity AND_ent is
    port(
        x: in  std_logic;
        y: in  std_logic;
        F: out std_logic
    );
end AND_ent;
```





## VHDL – příklad

```
architecture behav1 of AND_ent is
begin
    process(x, y)
    begin -- popis chování
        if ((x='1') and (y='1')) then
            F <= '1';
        else
            F <= '0';
        end if;
    end process;
end behav1;
-- varianta 2
architecture behav2 of AND_ent is
begin
    F <= x and y;
end behav2;
```

## Heterogenní modely

= Použití více různých forem popisu pro různé části modelu

Příklad heterogenního modelu řídicího systému:

- spojitá část (spojitý popis)
- A/D převod (vzorkování spojitého stavu)
- číslicový řídicí systém (např. Petriho síť)
- nebo použití fuzzy logiky (popis neurčitosti)
- případně použití neuronových sítí (učení)
- D/A převod (kombinace spojitý/diskrétní)
- ...

**Poznámka:** Jsou nutné odpovídající nástroje





## SIMLIB – některá rozšíření

- Vektorové bloky a blokové výrazy
  - 2D vektorové diferenciální rovnice
  - 3D vektorové diferenciální rovnice
- *Fuzzy* popis modelů s neurčitostí
  - fuzzy množiny
  - fuzzy bloky – fuzzification, inference, defuzzification
  - editor fuzzy množin (Java)
- Optimalizační metody
- \+ další doplňky...

**Poznámka:**
Jde o prototypy = ne zcela úplné, používat opatrně





## Fuzzy logika – základy

- Jde o popis jednoho typu neurčitosti – "vágnost" (co znamená, že něco je "malé" nebo "velké" ?)
- Rozšíření Booleovské logiky (1965, Lofti Zadeh)
- Vyjádření míry určité vlastnosti – pravdivostní hodnota, stupeň příslušnosti (Pozor – vůbec nesouvisí s pravděpodobností.)
- Pojmy: fuzzy množina, funkce příslušnosti
- Použití fuzzy logiky: řízení, expertní systémy, ...

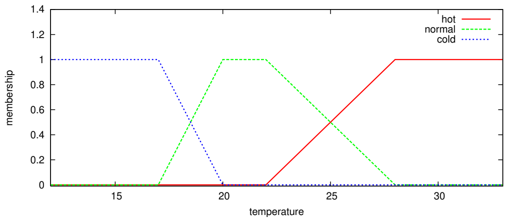
**Poznámka:** Podrobnosti viz např. PDF na WWW:
Navara M., Olšák P.: *Základy fuzzy množin*, ČVUT, Praha, 2002





## Fuzzy množina, funkce příslušnosti

Př: teplota v místnosti, 3 fuzzy množiny a jejich funkce příslušnosti:
malá – střední – velká ("cold" – "normal" – "hot")




Fuzzifikace: převod "ostré" hodnoty na míru příslušnosti
(Příklad: 18 $^\circ\mathrm{C} \rightarrow$ cold:0.5, normal:0.5, hot:0)





## Operace

**Fuzzy**

negace: $\neg_S\ \alpha = 1 - \alpha$

konjunkce: $\alpha \bigwedge_S \beta = \mathit{min}(\alpha, \beta)$

disjunkce: $\alpha \bigvee_S \beta = \mathit{max}(\alpha, \beta)$

**Poznámka:** Existují i jiné definice operací





## Fuzzy blok

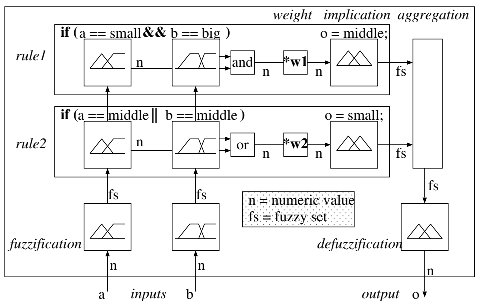
Postup vyhodnocování:

- převod vstupu na míru příslušnosti (*fuzzification*)
- aplikace pravidel (*if-then rules*)
  Příklad pravidel:
  ```
  IF teplota IS malá       THEN topit=hodně
  IF teplota IS střední    THEN topit=málo
  IF teplota IS velká      THEN topit=chladit
  ```
- spojení výstupů pravidel (*aggregation*)
- převod na "ostré" hodnoty (*defuzzification*)





## Fuzzy blok – obrázek








## Příklad v SIMLIB – pouze pro ilustraci možností

```
// Fuzzy množiny:
FuzzySet itype("itype", 0, 40,
  FuzzyTrapez("small", 0,0,18,20),
  FuzzyTrapez("medium", 18,20,22,28),
  FuzzyTrapez("big", 22,28,40,40)
);

class MyBlock : public FuzzyBlock {
  FuzzyInput in;
  FuzzyOutput o, o2;
  void Behavior() {     // Pravidla:
    if(in=="small")  weight(0.9), o="big";
    if(in=="big" || in=="medium") o="small", o2="z";
    if(in=="big" || in=="medium") { o="small"; o2="z"; }
  } // ...
};
```





## Optimalizace parametrů modelu

Cíl: nalezení optimálních hodnot parametrů modelu

Pojmy: operační výzkum, lineární/nelineární programování

Optimalizační metody:

- gradientní
- simulované žíhání (Simulated Annealing)
- genetické
- ...

Nástroje: Scilab, MATLAB+OptimizationToolbox, ...

**Poznámka:** Složitost optimalizačních úloh

## Optimalizace

Hledáme $x$ pro minimum nebo maximum *cenové* funkce $F(\vec{x})$.

Minimalizace je algoritmus, který počítá:

$$\vec{x} \ : \ F(\vec{x}) = min \ \wedge \ C(\vec{x})$$

kde:

- $\vec{x}$ je vektor hodnot parametrů
- $F$ je cenová (*Objective*) funkce
- $C$ reprezentuje různá omezení (*Constraints*) – například meze hodnot $\vec{x}$.

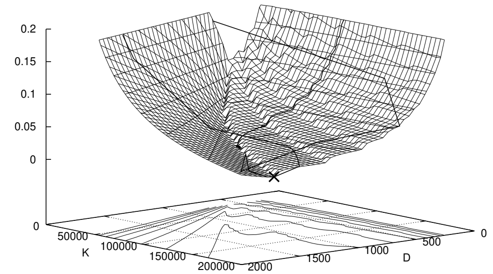
**Poznámky:**
Maximalizace ⇒ použijeme $-F$.
Problém: lokální minima ⇒ používáme *globální optimalizační metody*





## Optimalizace – příklad

Ukázka hledání minima, 3 různé metody:








## Vizualizace výsledků simulace

Vizualizace znamená použití interaktivních vizuálních reprezentací dat pro zlepšení našeho chápání problému.

- interaktivní diagramy
- animace
- 3D zobrazení
- video, ...
- virtuální realita

Nástroje:

- univerzální: Gnuplot, GNU plotutils, ...
- specializované: viz WWW

**Poznámka:** *client-server*, ...





## Virtuální realita a simulace

3D interaktivní vizualizace a simulace

- prostředí, které je simulováno počítačem
- člověk je připojen na speciální rozhraní a vstupuje do simulovaného prostředí
- interakce člověk — stroj

**Poznámka:** Souvislost s počítačovými hrami





## Analytické řešení modelů

Čistě matematické řešení modelu.

- výhody: efektivní, výsledky jsou obecné a přesné
- nevýhody: analytické řešení pro většinu modelů neznáme/neexistuje

Postup:

- analýza problému
- formulace matematického modelu
- zjednodušení modelu (linearizace, ...)
- matematické řešení modelu

**Poznámka:** Porovnat se simulací





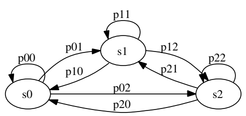
## Markovovy procesy a řetězce

- Při zkoumání dějů v SHO se často předpokládá, že v nich obsažené náhodné procesy jsou *Markovské.*
- Markovské procesy jsou náhodné procesy, které splňují *Markovovu vlastnost*: následující stav procesu závisí jen na aktuálním stavu (ne na minulosti).
- Náhodný proces $X(t)$ s diskrétním časem a diskrétními stavy, který má Markovovu vlastnost, se nazývá *Markovův řetězec.* Je ekvivalentní konečnému automatu s pravděpodobnostmi přechodů
- Pravděpodobnost stavu $s_i$ v čase $t \in N$ označíme symbolem $\pi_i(t) := p(X(t) = s_i)$.





## Markovovy řetězce




- Matice pravděpodobností přechodů: $P = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & p_{02} \\ p_{10} & p_{11} & p_{12} \\ p_{20} & p_{21} & p_{22} \end{bmatrix}$

  (součet na řádku musí být 1)
- Aplikace: SHO, náhodná procházka, hry – házení kostkou





## Systémy M/M/1

M/M/1 – viz Kendallova klasifikace SHO

- máme jedno zařízení s neomezenou FIFO frontou
- příchody požadavků: exponenciální intervaly s konstantním parametrem $\lambda > 0$, nezávisí na stavu modelu a čase
- obsluha: exponenciální trvání s parametrem $\mu > 0$.

Počet požadavků v systému $X(t)$ je Markovský proces.

Popis:

- Vektor pravděpodobností jednotlivých stavů
- Spojitý čas
- Používáme matici *intenzit* přechodů mezi stavy

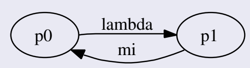




## Příklad 1

Jedno zařízení bez fronty – přijde-li požadavek a nemůže být obsloužen, opouští systém.
Parametry — příchody: 15 za hodinu, obsluha: 5 minut.
Jaká je pravděpodobnost, že požadavek odchází neobsloužen?

$\lambda = 15, \quad \mu = \frac{60}{5} = 12$ za hodinu, (poznámka: stabilita).




$$\begin{bmatrix} p_0 & p_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\lambda & \lambda \\ \mu & -\mu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ a současně } \ p_0 + p_1 = 1$$

## Příklad 1 – ustálený stav

V ustáleném stavu se pravděpodobnosti již nemění, proto intenzita přechodů násobená pravděpodobností stavu musí být v rovnováze.

Pro *ustálený stav* platí:

$-\lambda p_0 + \mu p_1 = 0$, a také $p_0 = 1 - p_1$

Dosadíme a úpravami získáme výsledek:

$-\lambda(1 - p_1) + \mu p_1 = 0$

$-\lambda + \lambda p_1 + \mu p_1 = 0$

$p_1(\lambda + \mu) = \lambda$

$p_1 = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}$

Pro naše parametry je pravděpodobnost obsazeného zařízení:

$p_1 = \frac{5}{9}$





## Příklad 2

Systém M/M/1 – výdejna obědů.
Přichází 3 požadavky za minutu, výdej 15 sekund.

Jaká je

- pravděpodobnost $p_0$, že strávník nebude čekat,
- průměrná délka fronty $L_w$,
- průměrná doba čekání ve frontě $T_w$ a
- průměrná doba strávená v systému $T_s$ ?

$\lambda = \frac{pocet}{cas} = \frac{3}{1} = 3$ příchody za minutu

$\mu = 4$ dokončené obsluhy za minutu (doba obsluhy $T_o = \frac{1}{\mu}$)

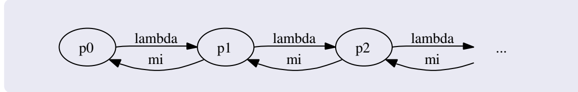
Systém je stabilní ($\lambda < \mu$).





## Příklad 2 – rovnice pro ustálený stav

Rovnice: $\vec{\pi}(\infty)A = \vec{0}$




$$-\lambda p_0 + \mu p_1 = 0$$

$p_1 = \frac{\lambda}{\mu}p_0 = \rho p_0$ kde jsme zavedli $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$

$$\lambda p_0 - \lambda p_1 - \mu p_1 + \mu p_2 = 0$$

$p_2 = -\frac{\lambda}{\mu}p_0 + \frac{\lambda}{\mu}\frac{\lambda}{\mu}p_0 + \frac{\lambda}{\mu}p_0 = \frac{\lambda^2}{\mu^2}p_0 \quad \Rightarrow \quad p_2 = \rho^2 p_0$

...

$p_k = \rho^k p_0$





## Příklad 2 – výpočet pravděpodobností

Součet pravděpodobností stavů musí být 1:

$$p_0 + p_1 + p_2 + \ ... \ = 1$$

Potom použijeme vzorec pro součet geometrické řady ($S = \frac{a}{1-q}$):

$$p_0 + \rho p_0 + \rho^2 p_0 + \ ... \ = \frac{p_0}{1-\rho} = 1$$

a po úpravě dostaneme výsledek: $p_0 = 1 - \rho$

**Výsledek**
Pravděpodobnost, že nebude čekat: $p_0 = 1 - \rho = \frac{1}{4} = 0.25$

**Poznámka:** To znamená, že s pravděpodobností $p_0$ zařízení nepracuje (průměrné využití zařízení je: $1 - p_0 = \rho = \frac{3}{4}$).





## Příklad 2 – délka fronty

Průměrná délka fronty v ustáleném stavu je suma součinů (délka fronty * pravděpodobnost stavu s touto délkou fronty) pro všechny možné délky fronty:

$L_w = \sum_{k=1}^{\infty} k.\pi_{k+1}(\infty) = \sum_{k=1}^{\infty} k.\rho^{k+1}(1-\rho) =$

$= (1-\rho)\rho^2 + 2(1-\rho)\rho^3 + 3(1-\rho)\rho^4 + \ ... \ =$

$= \rho^2 - \rho^3 + 2\rho^3 - 2\rho^4 + 3\rho^4 + \ ... \ =$

$= \rho^2 + \rho^3 + \rho^4 + ... = \frac{\rho^2}{1-\rho}$ // součet řady

**Výsledek**
V našem příkladu je průměrná délka fronty:

$$L_w = \frac{\rho^2}{1-\rho} = 2.25$$





## Příklad 2 – doba čekání ve frontě

Doba čekání ve frontě $T_w$ je úměrná počtu transakcí $N$ v systému:

$T_w = T_o.N = T_o \sum_{k=1}^{\infty} k.\pi_k(\infty) = \frac{1}{\mu}\sum k.\rho^k(1-\rho)$

$= \frac{1}{\mu}\frac{1}{\rho}(\sum k.\rho^{k+1}(1-\rho)) =$ // obsah závorky již známe

$= \frac{1}{\mu}\frac{1}{\rho}\frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{1}{\mu}\frac{\rho}{1-\rho} =$

$= \frac{1}{\mu}\frac{\rho}{1-\frac{\lambda}{\mu}} = \frac{\rho}{\mu-\lambda} = 45s$

$T_s = T_w + T_o = \frac{\rho}{\mu-\lambda} + \frac{1}{\mu} = \frac{\lambda+\mu-\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{1}{\mu-\lambda} = 60s$

Pro náš příklad je průměrná doba čekání ve frontě 45*s* a průměrná doba strávená v systému je 60*s*.





## Příklad 2 – simulační řešení

Pro srovnání provedeme simulační experimenty v SIMLIB/C++:

Výsledky pro různou dobu simulace (od 1000 do $10^7$ sekund):

| čas [s] | $p_0$ (=nečeká) | $L_w$ | $T_w$ [s] | $T_s$ [s] |
|---|---|---|---|---|
| 1000 | 0.207 | 1.378 | 24.38 | 38.51 |
| 5000 | 0.226 | 1.646 | 30.32 | 44.31 |
| 10000 | 0.168 | 2.862 | 54.79 | 70.32 |
| 100000 | 0.248 | 2.153 | 42.35 | 57.05 |
| 1e+06 | 0.254 | 2.116 | 42.49 | 57.46 |
| 1e+07 | 0.250 | 2.255 | 45.16 | 60.16 |
| analytické | 0.25 | 2.25 | 45 | 60 |

Výsledky se blíží přesným hodnotám získaným analyticky.





## Modely spolehlivosti

Spolehlivost = schopnost plnit požadované funkce podle stanovených podmínek

Pojem *spolehlivost* může zahrnovat:

- bezporuchovost
- životnost
- ...

**Poznámky:**

- Kvalita, ISO9000
- Modely spolehlivosti: kombinatorické, markovské, ...
- *Fail-safe* systémy





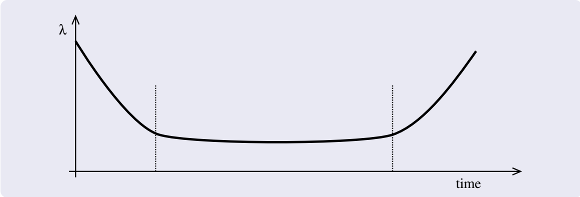
## Ukazatele spolehlivosti

- Pravděpodobnost bezporuchové činnosti $R(t)$ v intervalu $\langle 0, t \rangle$ : $R(t) = e^{-\lambda t}$
- Pohotovost (*availability*) $a(t)$ = pravděpodobnost, že v čase $t$ bude systém v provozuschopném stavu. (Vlivy: četnost výpadků, rychlost oprav)
- Střední doba bezporuchové činnosti: $T_s = \int_0^{\infty} R(t)dt$
  Anglicky: MTBF (Mean Time Between Failures)
- Intenzita poruch $\lambda(t) = \frac{1}{T_s}$

**Poznámka:**
Odolné systémy tolerují poruchy, pojem "*high-availability*".

## Intenzita poruch

Typický průběh intenzity poruch $\lambda(t)$ – vanová křivka




**Poznámka:** Rané poruchy — provoz — stáří.





## Kombinatorické modely spolehlivosti

- Sériové spolehlivostní zapojení:

$$R(t) = \prod_{i=1}^{n} R_i(t)$$

- Paralelní spolehlivostní zapojení:

$$R(t) = 1 - \prod_{i=1}^{n} (1 - R_i(t))$$

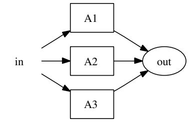
- Nevýhody: Komplikované sestavování schémat, ...



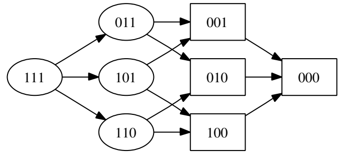


## Markovské spolehlivostní modely

Příklad systému — tři prvky paralelně:




Stavový graf (1=funguje, 0=porucha, pořadí A1 A2 A3):








## Shrnutí

- Markovské procesy a řetězce
- Princip analytického řešení
- Výhody/nevýhody
- Aplikace

**Poznámka:**
Analyticky lze řešit i jiné typy modelů (nejen výše uvedené)





## Závěr

**Shrnutí:**

- Principy modelování a simulace
- Klasifikace systémů a modelů
- Používané metody a algoritmy
- Základy implementace simulačních nástrojů
- Aplikace simulace a souvislosti s různými obory

**Poznámky:**

- Co jsme vynechali
- Co se zkouší — cílové znalosti