

# IMS — Kauzalizace soustavy rovnic (doplněk)

Petr Peringer  
peringer AT fit.vutbr.cz

Vysoké učení technické v Brně,  
Fakulta informačních technologií,  
Božetěchova 2,  
612 66 Brno

(Verze: 15. prosince 2020)

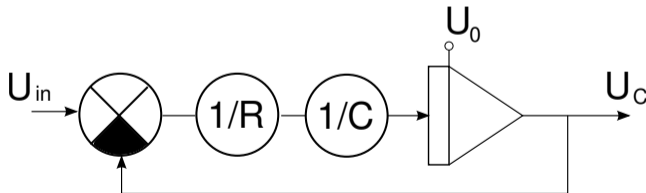
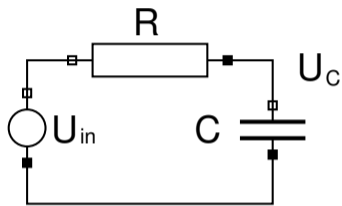
# Obsah

- Kauzální a nekauzální modelování
- Nekauzální popis spojitého systému (DAE)
- Identifikace neznámých proměnných
- Algoritmus převodu rovnic na kauzální popis
- Možné problémy při převodu
  - Algebraické (rychlé) smyčky
  - Singularity
- Příklad

# Kauzální a nekauzální modelování

- Nekauzální modelování
  - Proměnné
  - Rovnice (omezení možných hodnot proměnných)
  - Například rovnice  $u - Ri = 0$  (Ohmův zákon) nedefinuje zda průchodem proudu vzniká napětí, nebo přiložené napětí způsobuje proud.
- Kauzální modelování
  - Vstupy a výstupy
  - Proměnné, stavové proměnné
  - Funkce
  - Například blok pro výpočet proudu  $i := u/R$  musíme nejdříve znát aktuální hodnotu vstupu (napětí  $u$ ) a parametr  $R$ , až potom můžeme vypočítat výstup — proud  $i$ .

# Kauzalita a modelování — příklady



# Algoritmus převodu rovnic na kauzální popis

- 1 Očíslujeme rovnice (libovolně).
- 2 Očíslujeme neznámé (libovolně) Pozor: bez stavových proměnných.
- 3 Vytvoříme bipartitní graf popisující stukturu rovnic — černé hrany spojují rovnice a v nich obsažené neznámé (viz obrázek)
- 4 V cyklu opakujeme dokud je co dělat:
  - Pro všechny ještě nezpracované rovnice, které mají právě jednu černou hranu, přebarvíme tuto hranu na červenou a všechny ostatní hrany vycházející z připojené neznámé obarvíme modře. Právě zpracované rovnici přidělíme *nejnižší volné* pořadové číslo počínaje 1.
  - Pro všechny neznámé proměnné, které mají právě jednu černou hranu, přebarvíme tuto hranu na červenou a všechny hrany vycházející z připojené rovnice obarvíme modře. Připojené rovnici přidělíme *nejvyšší volné* pořadové číslo počínaje  $N$  ( $N$  je počet rovnic).

(Pokud se nepodaří zpracovat všechny rovnice, máme rychlou smyčku.)

# Algoritmus — pokračování

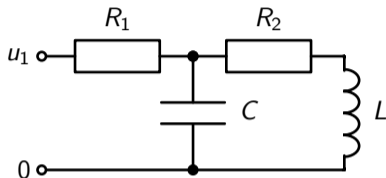
- 5 Uspořádáme rovnice podle pořadových čísel.
- 6 Převedeme rovnice tak, aby červenou hranou připojené neznámé byly na levé straně přiřazení.

Výsledná soustava je kauzální — všechny neznámé lze postupně vypočítat ze známých hodnot, symbol rovnosti  $=$  je převeden na přiřazení  $:=$ .

## Poznámky:

- Jde o modifikovaný Tarjanův algoritmus.
- Časová složitost algoritmu je  $O(N)$ , kde  $N$  je počet rovnic.
- Možné problémy:
  - Rychlé smyčky (řešení: "tearing" algoritmus)
  - Strukturální singularity (např.  $u_{C1} = u_{C2}$  — řešení: Pantelides)

## Příklad — elektrický obvod



Rovnice pro 4 součástky, 1 uzel a 2 smyčky (neznámé **červeně**):

$$① \quad u_{R1} = R_1 i$$

$$② \quad u_{R2} = R_2 i_L$$

$$③ \quad i_C = C \frac{du_C}{dt}$$

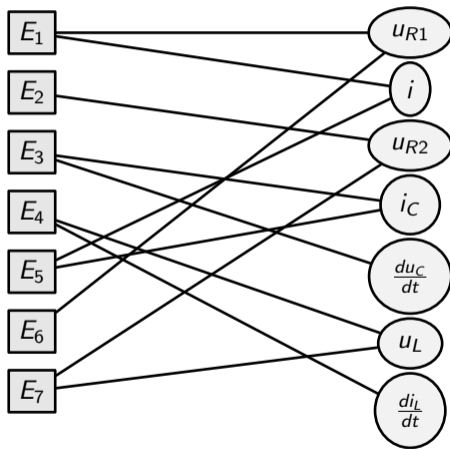
$$④ \quad u_L = L \frac{di_L}{dt}$$

$$⑤ \quad i - i_C - i_L = 0$$

$$⑥ \quad u_1 = u_{R1} + u_C$$

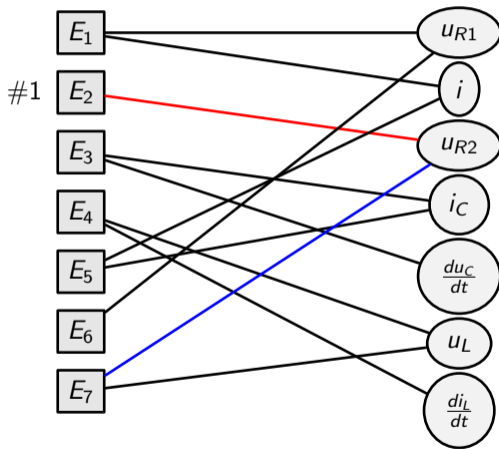
$$⑦ \quad u_C = u_{R2} + u_L$$

# Tarjanův algoritmus — postup

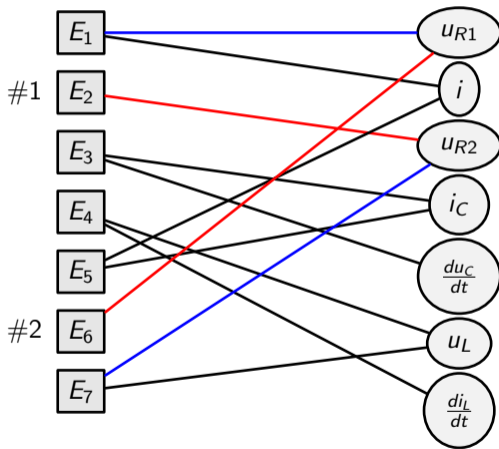




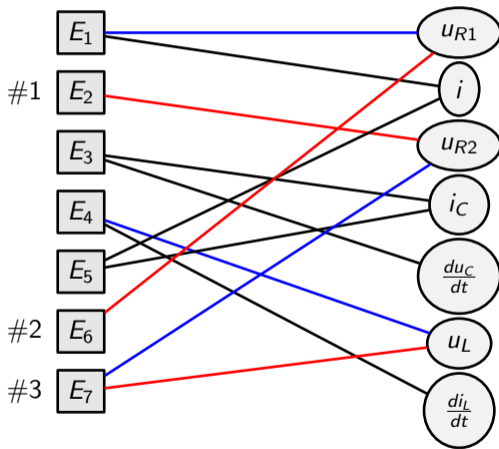
# Tarjanův algoritmus — postup



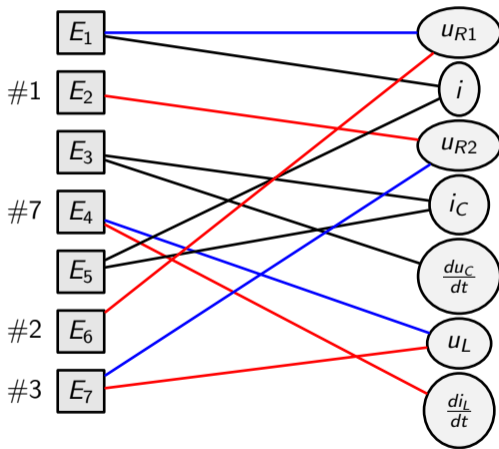
# Tarjanův algoritmus — postup



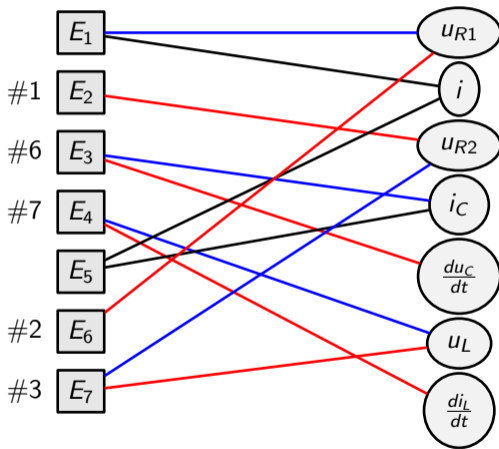
# Tarjanův algoritmus — postup



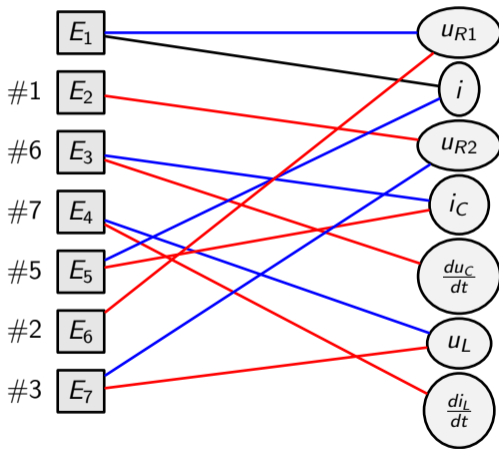
# Tarjanův algoritmus — postup



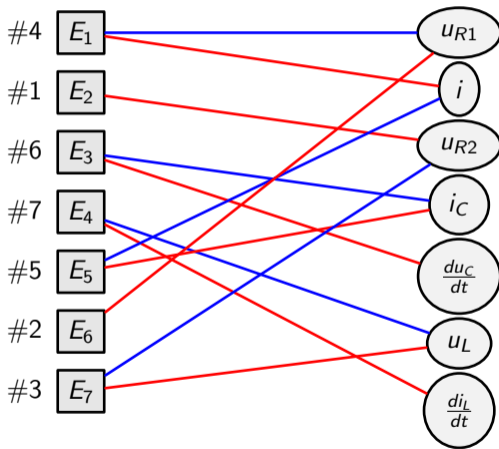
# Tarjanův algoritmus — postup



# Tarjanův algoritmus — postup



# Tarjanův algoritmus — postup



# Tarjanův algoritmus — výsledek

$$① \quad u_{R2} := R_2 i_L$$

$$② \quad u_{R1} := u_1 - u_C$$

$$③ \quad u_L := u_C - u_{R2}$$

$$④ \quad i := \frac{u_{R1}}{R_1}$$

$$⑤ \quad i_C := i - i_L$$

$$⑥ \quad \frac{du_C}{dt} := \frac{i_C}{C}$$

$$⑦ \quad \frac{di_L}{dt} := \frac{u_L}{L}$$

Toto je kód funkce  $f(\tau, y)$  v simulačním modelu.

Poznámka: Podle zvoleného očíslování rovnic a proměnných může být výsledné uspořádání jiné (např. vzájemné pořadí přiřazení 6 a 7 nemá vliv).