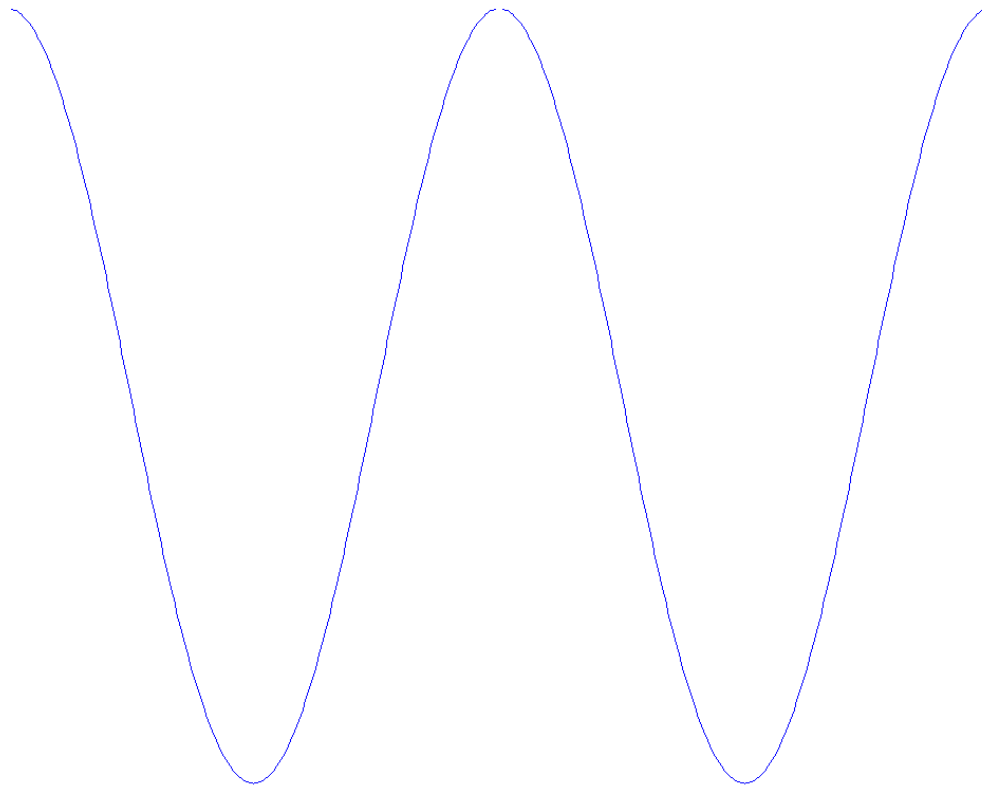


# Spektrální analýza a diskrétní Fourierova transformace

Honza Černocký, ÚPGM

# Povídání o cosinusovce...



$$f(x) = \cos(x)$$

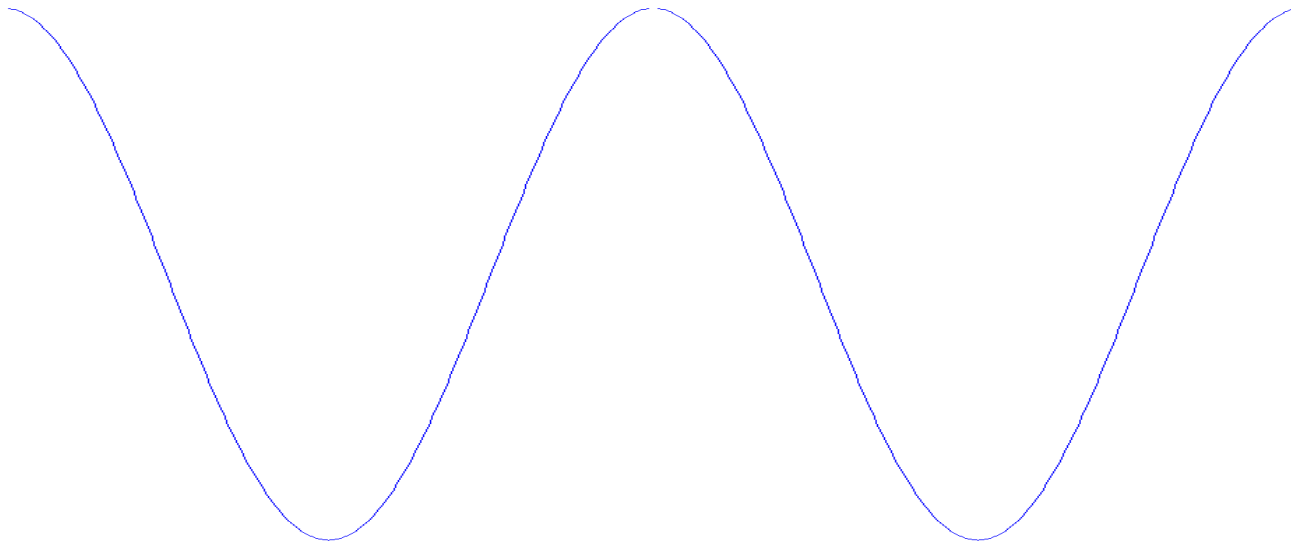
# Argument cosinusovky

- $0 \dots 2\pi$
- a pak každé  $2\pi$

perioda

# Cosinusovka s diskretním časem

- Úkol č. 1: vyrobit cos, která kmitne 1x za sekundu při vzorkovací frekvenci  $F_s$

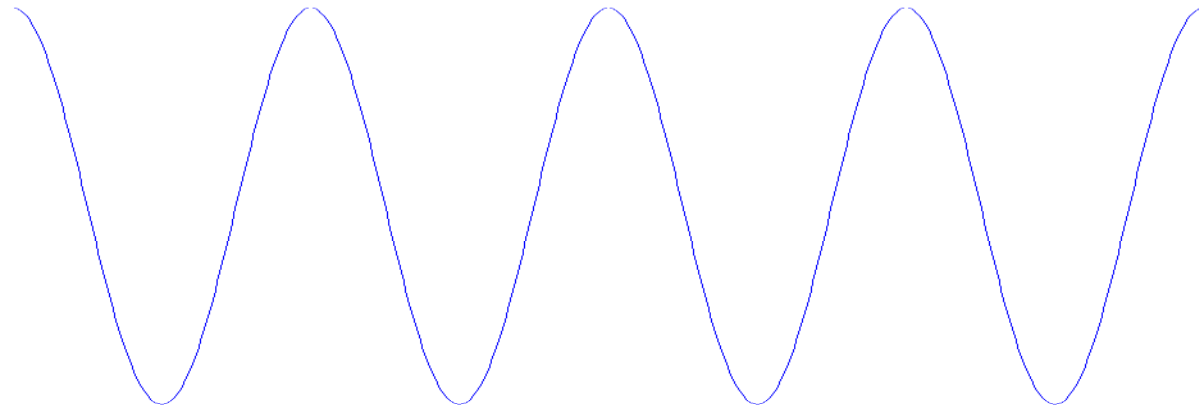


$$x[n] = \cos(\quad n)$$

$$x[n] = \cos\left(2\pi \frac{1}{8000} n\right)$$

# Cosinusovka s diskrétním časem

- Úkol č. 2: vyrobit cos, která kmitne 2x za sekundu při vzorkovací frekvenci  $F_s$



$$x[n] = \cos(\quad n)$$

$$x[n] = \cos\left(2\pi \frac{2}{8000} n\right)$$

# Cosinusovka s diskrétním časem

- Úkol č. 3: vyrobit cos, která kmitne 440x za sekundu při vzorkovací frekvenci  $F_s$  komorní „a“ 440Hz.

$$x[n] = \cos(\quad n)$$

$$x[n] = \cos\left(2\pi \frac{440}{8000} n\right)$$

# Kontrola

- Vygenerovat,
- změřit,
- propočítat
- Zahrát

**DEMO 1 v Matlabu**

# Normovaná frekvence

$$f = \frac{f_{skutečna}}{F_s}, \quad f_{skutečna} = f F_s$$

- Rozměr ?
- Příklady ?

$$f = \frac{1}{F_s} \quad f = 0 \quad f = \frac{1}{2} \quad f = 1$$



# Obecná cosinusovka

$$x[n] = A \cos(2\pi f n + \phi)$$

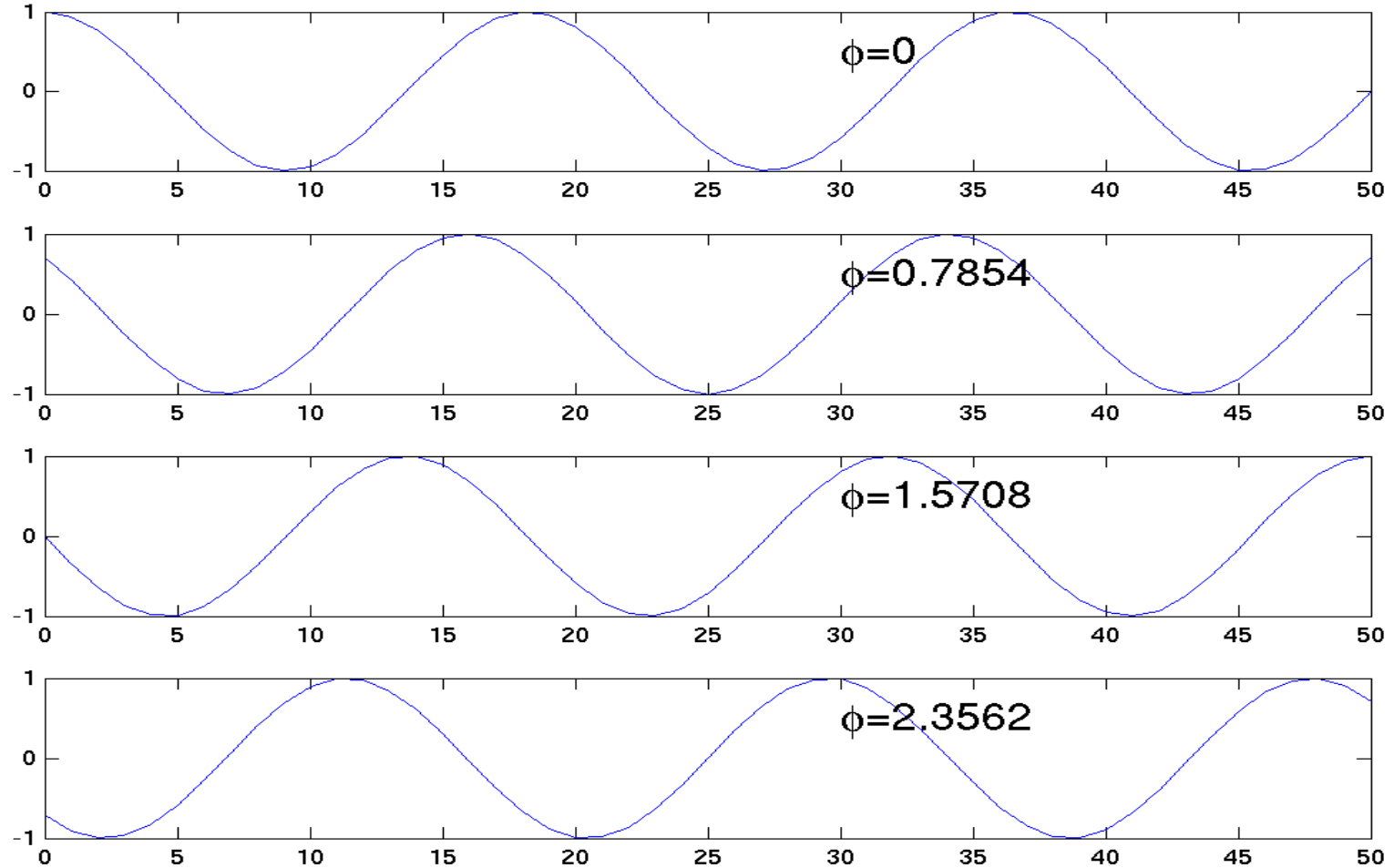
amplituda

normovaná  
frekvence

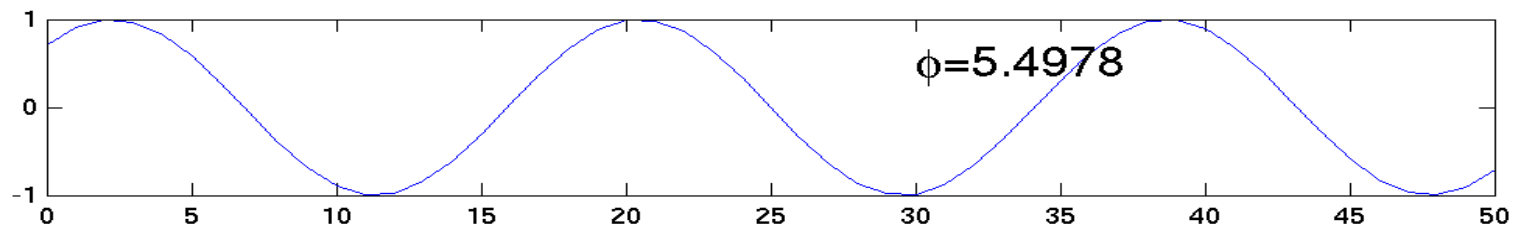
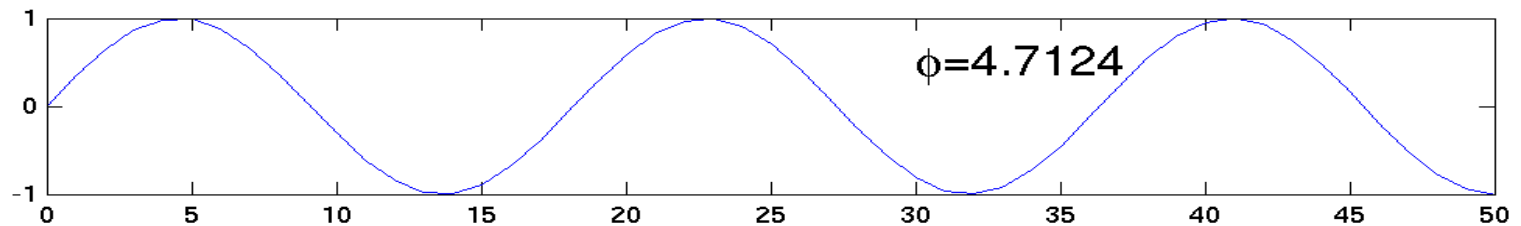
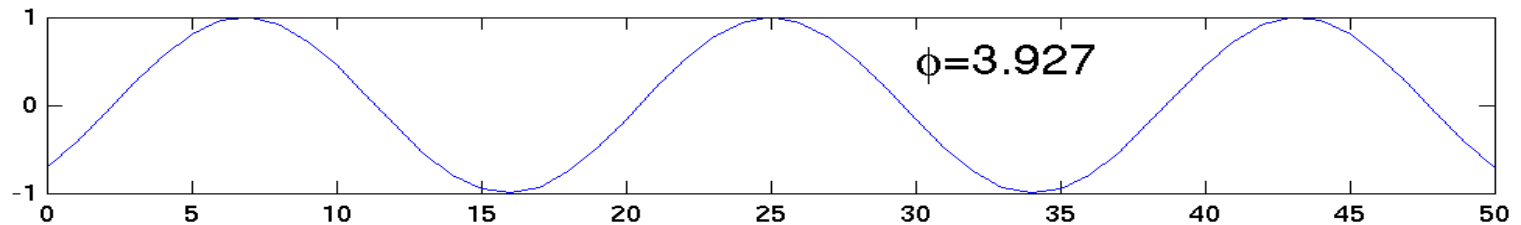
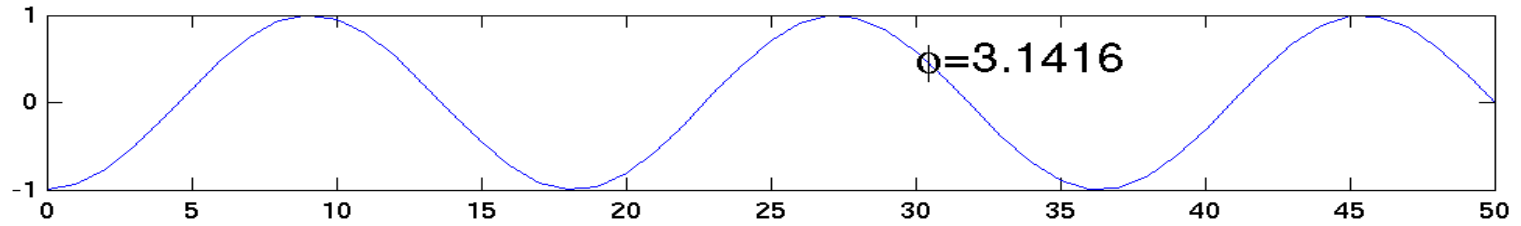
počáteční  
fáze

- Jednotky ?

# Počáteční fáze I.



# Počáteční fáze II.



# Ovčáci a cosinusovky

## DEMO 2 v Matlabu

- Délky a výšky not ...
- FUJ 😞

# Signály z reálného světa



- Signál a spektrum [a-open-string\\_16bit.wav](#) (WS)
- Fyzika např viz <https://www.youtube.com/watch?v=BSlw5SgUirg> (všechny módy dohromady)

# Signály z reálného světa



- Signál a spektrum [fletna.wav \(WS\)](#)
- Fyzika např viz <https://www.youtube.com/watch?v=KZ7intMz2Y4> (všechny módy dohromady)

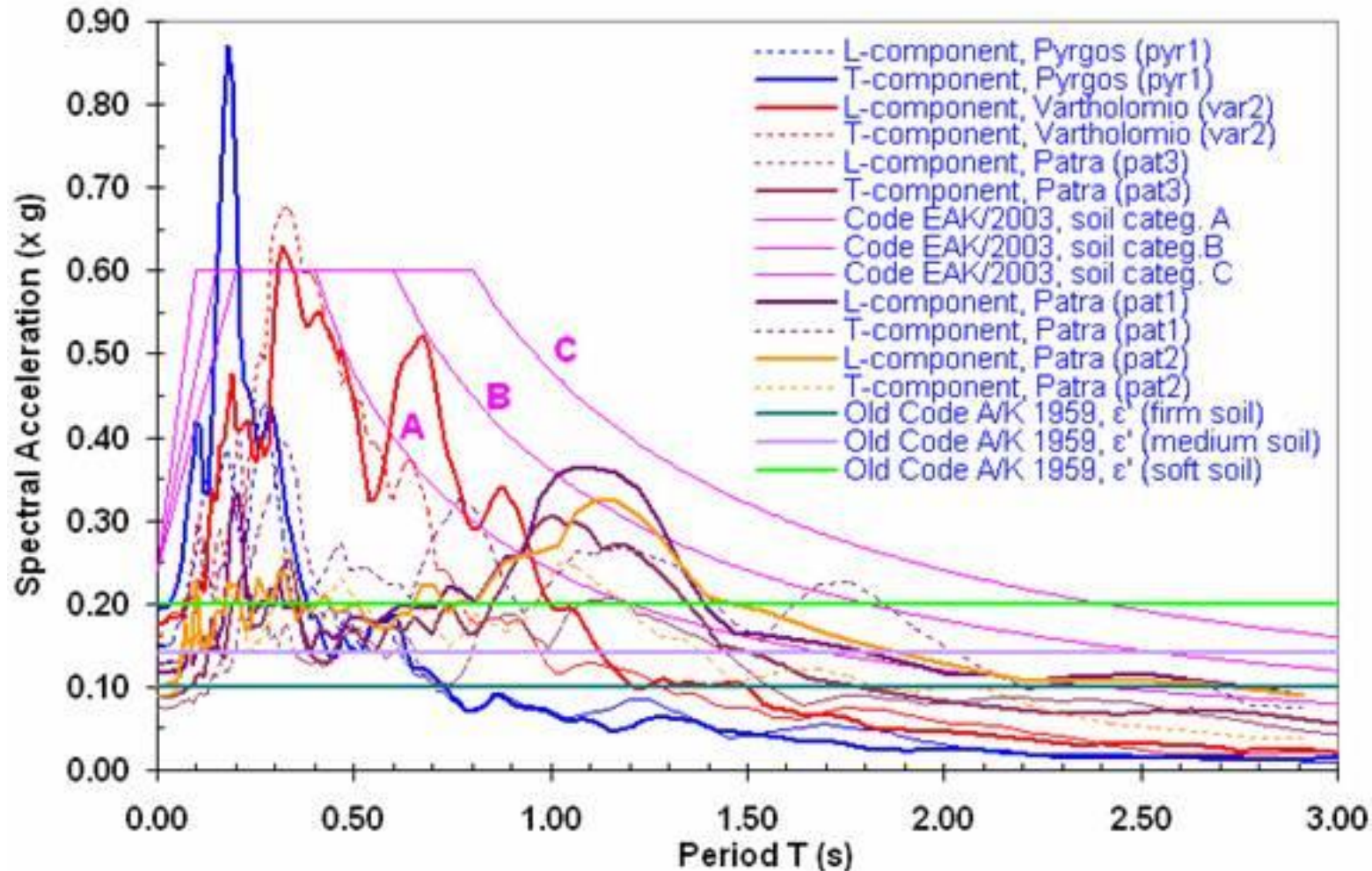
# Signály z reálného světa



- Signál a spektrum [test.I16 \(WS\)](#)
- Fyzika např viz <https://www.youtube.com/watch?v=y2okeYVcIQo> (plácání hlasivek produkuje spoustu harmonických frekvencí ...)

# Seismologie ...

**ACHAIA-ILIA EARTHQUAKE, June 08, 2008. M=6.5, Elastic response acceleration spectra of horizontal components ( $\zeta=0.05$ )**





# Analýza vibrací



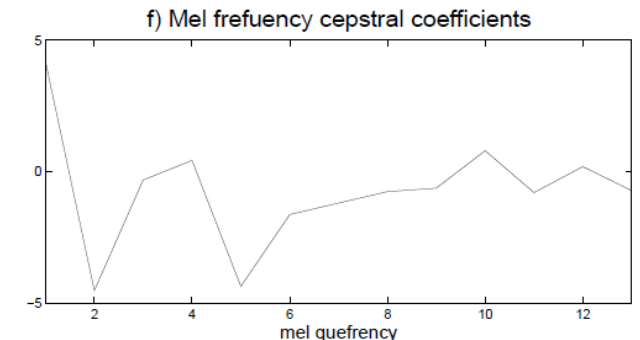
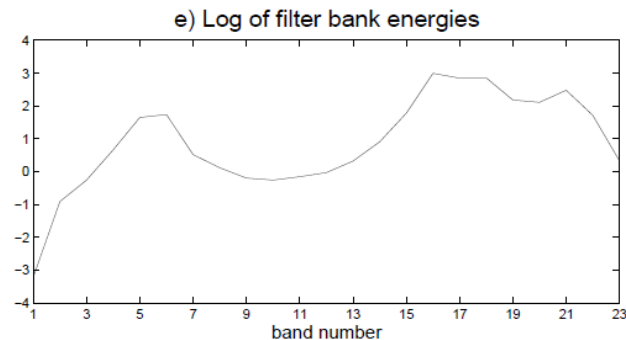
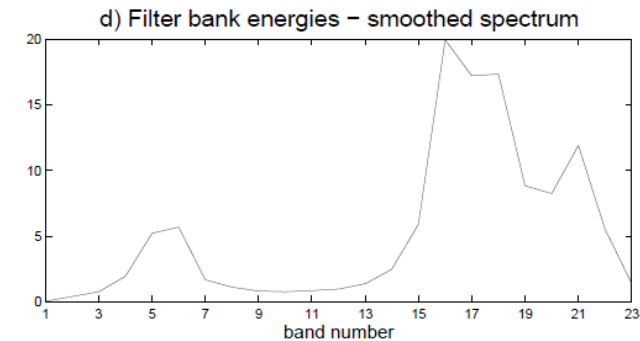
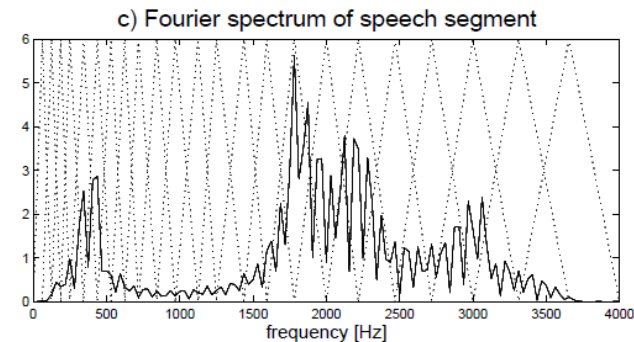
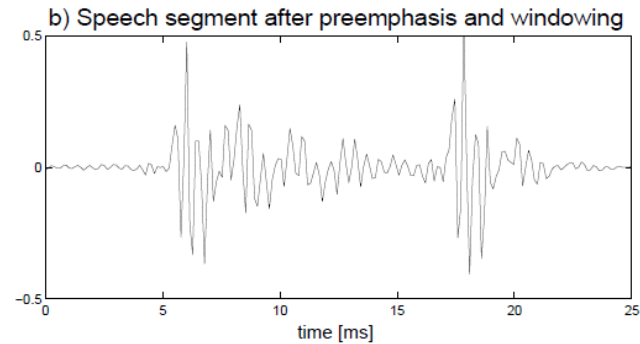
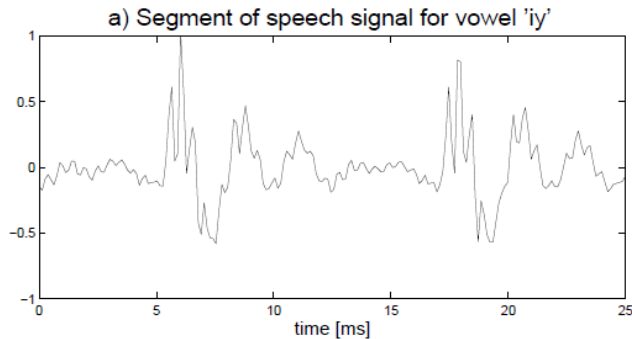
- <http://www.dsi-hums.com/honeywell-zing-test/8500-c-plus/>

# Na co spektrální analýza ? I.

- Zobrazovat ...

# Na co spektrální analýza ? II.

- Něco měřit / detekovat / rozpoznávat ...



# Na co spektrální analýza ? II.

Filtrace

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

$$y[n] = F^{-1} [ F(x[n]) F(h[n])] ]$$

# Spektrální analýza

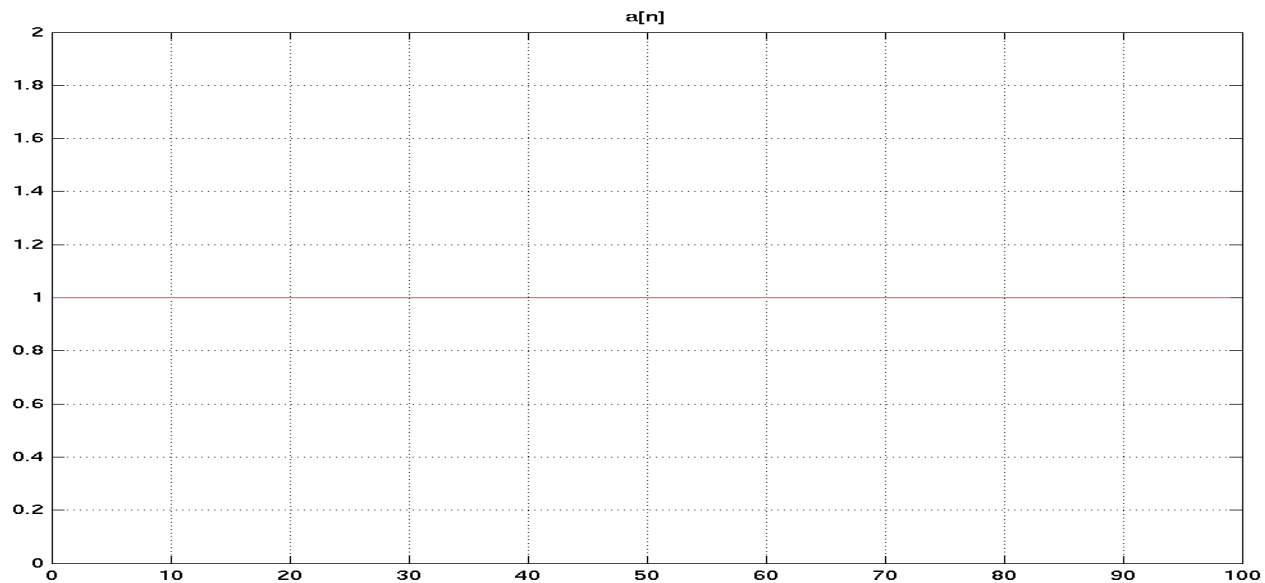
- Korelace
- Určování podobnosti
- Promítání do bází

**} To samé !**

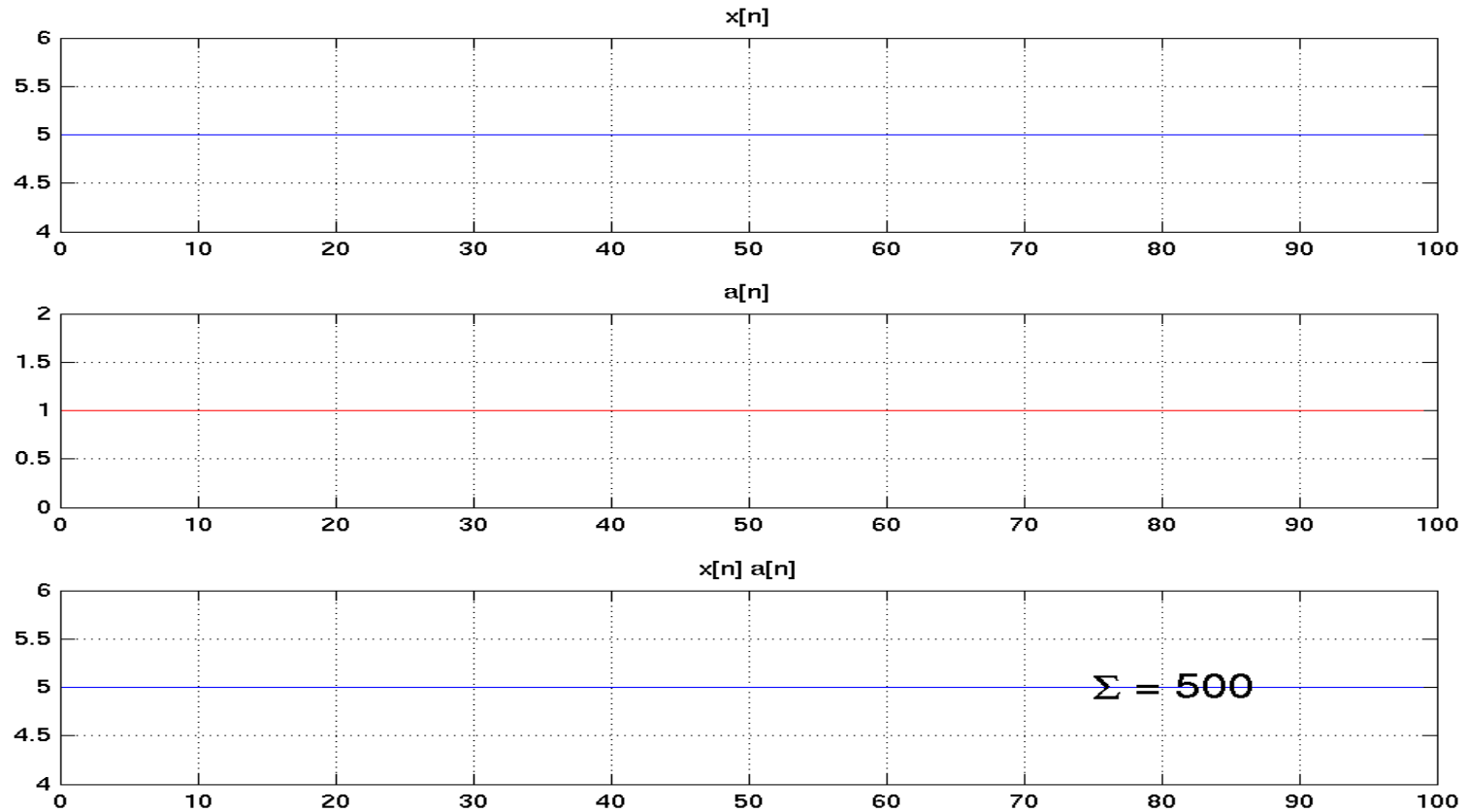
$$c = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]a[n]$$

# Příklady analýzy

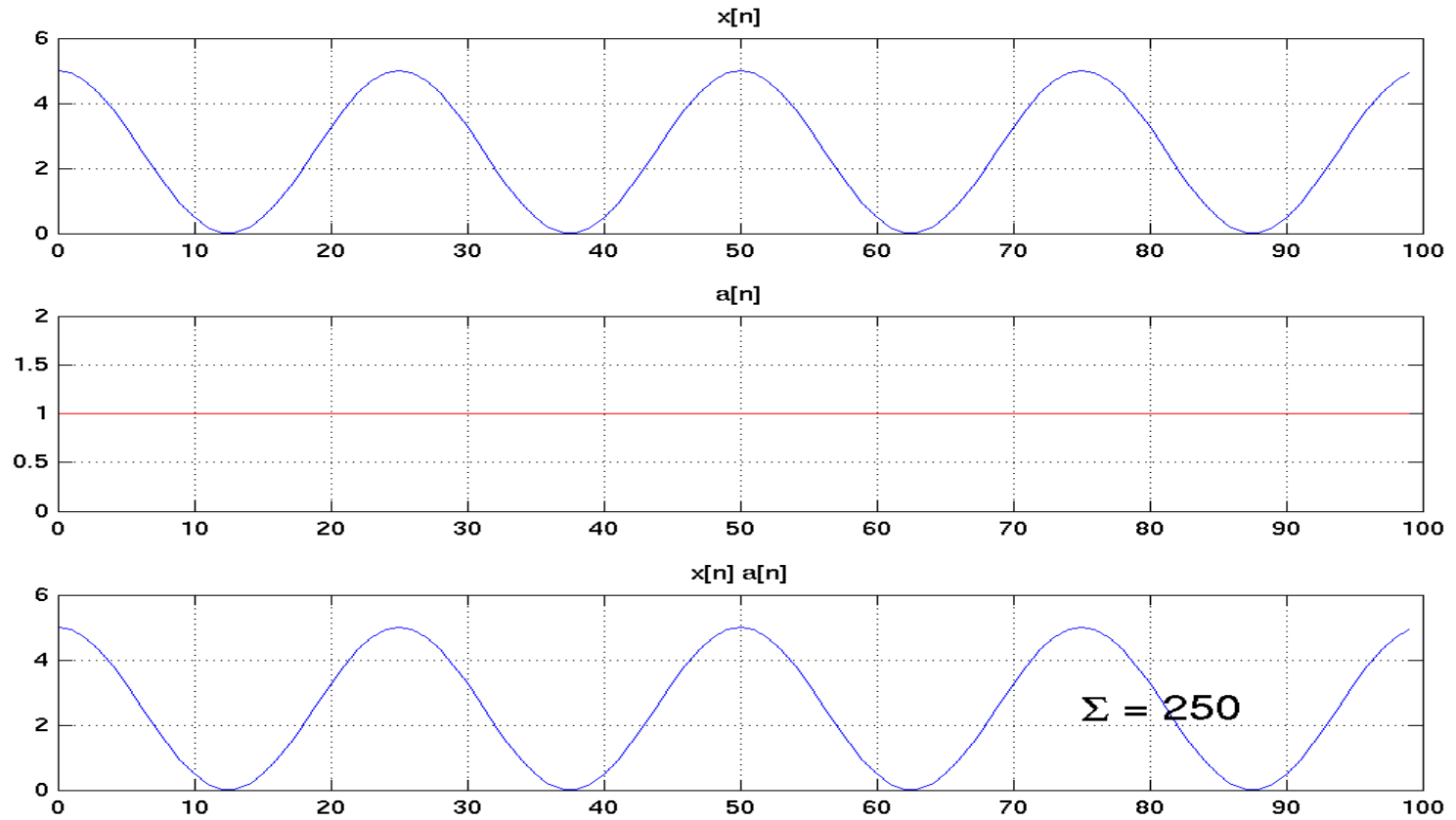
- Signál o délce  $N=100$
- Začneme stejnsměrným ...



# Jiný stejnosměrný ...

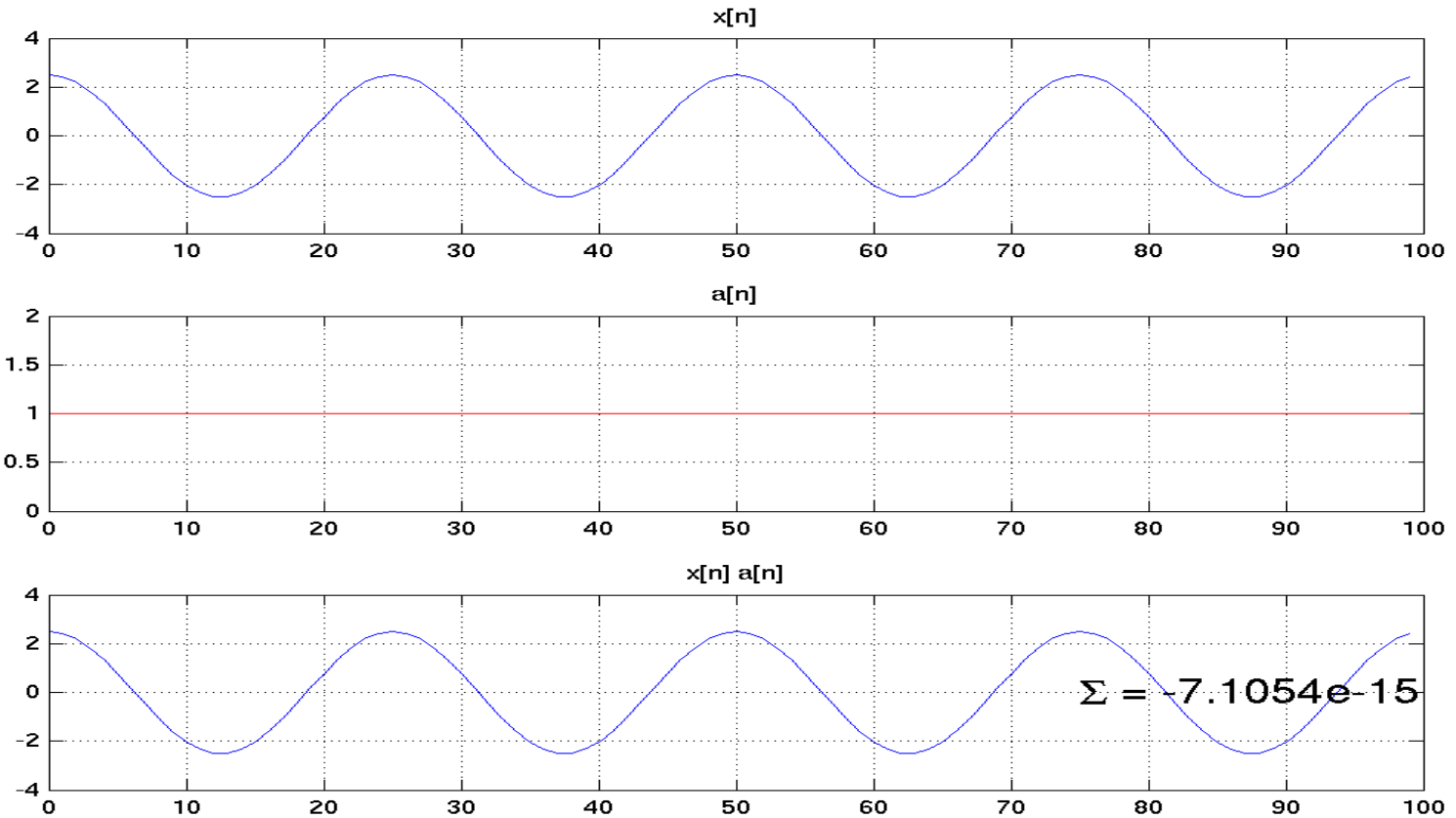


# Cosinusovka s DC složkou

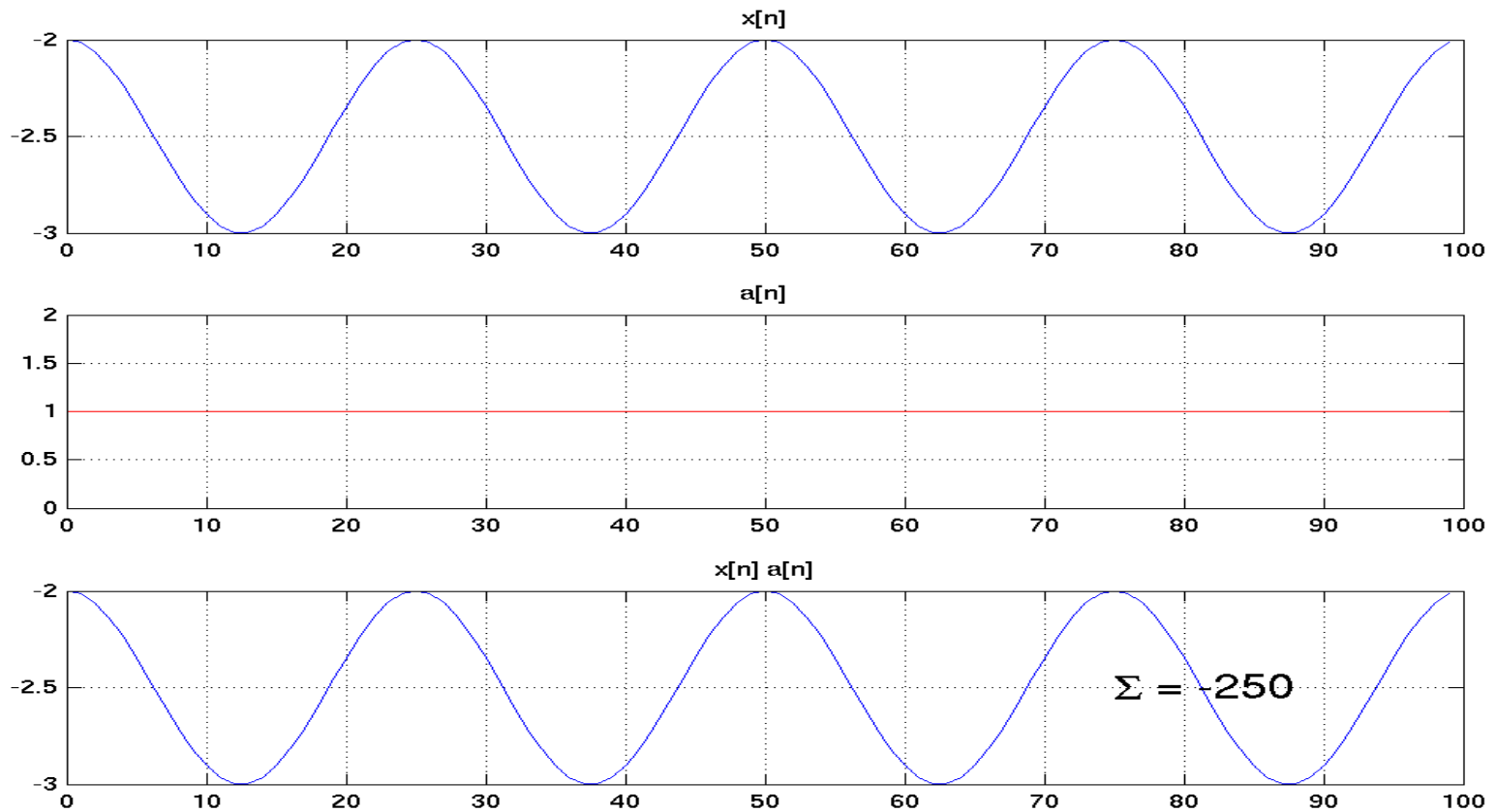




# Cosinusovka okolo nuly ...

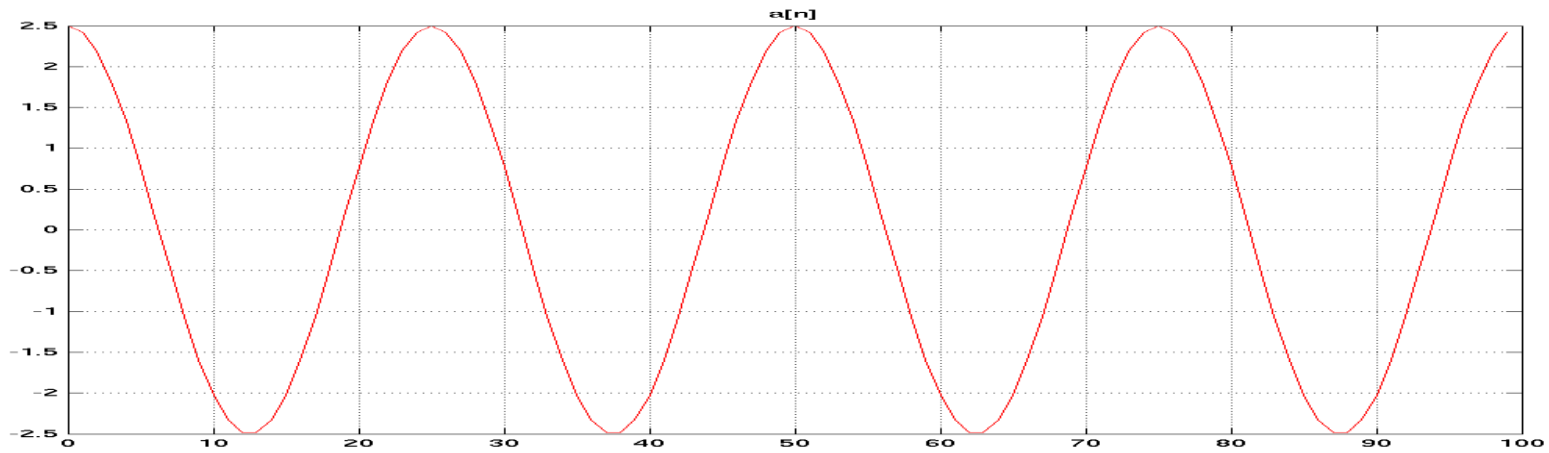


# Cosinusovka s mínus DC

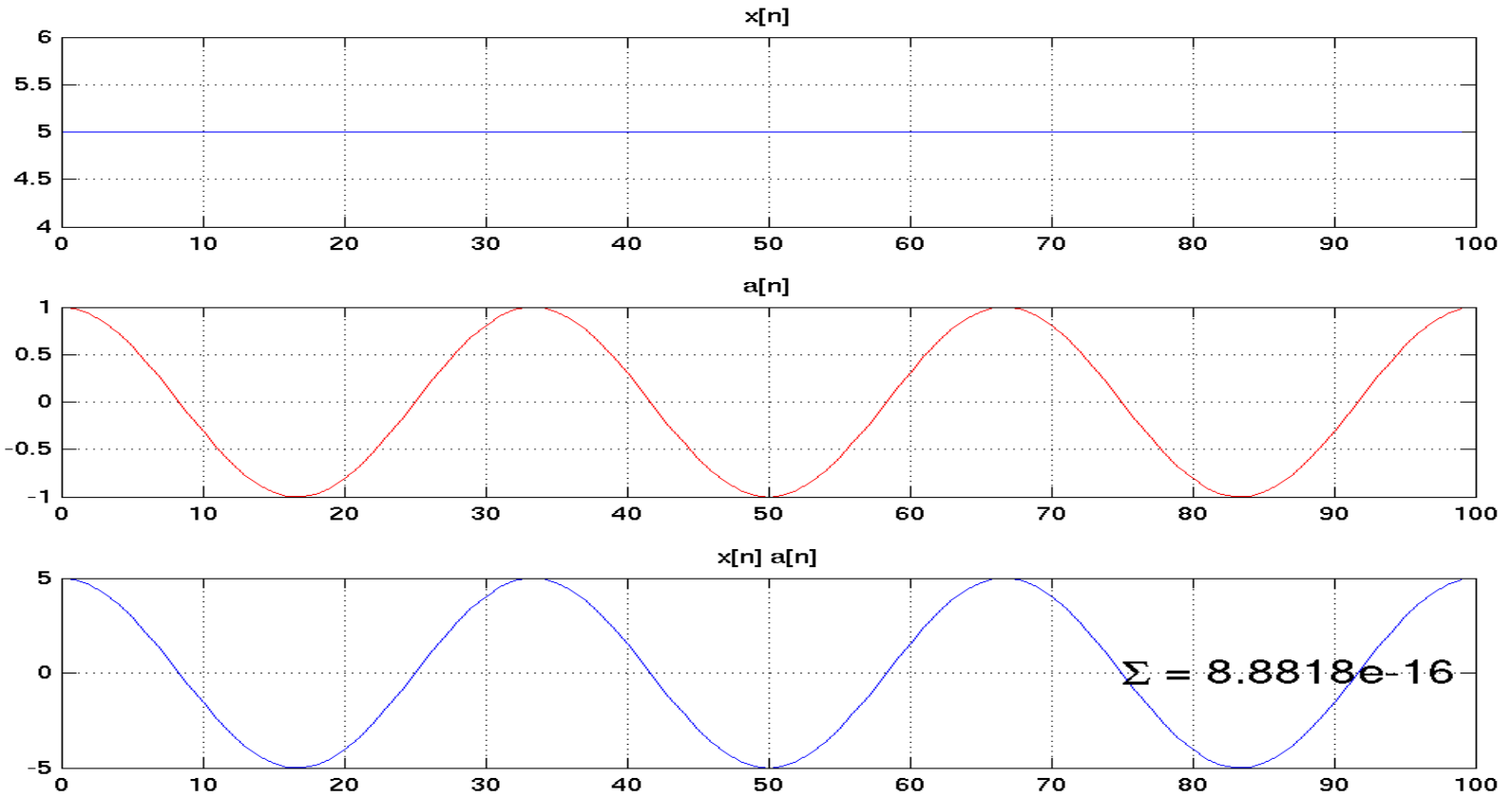


# Ted' s něčím jiným ...

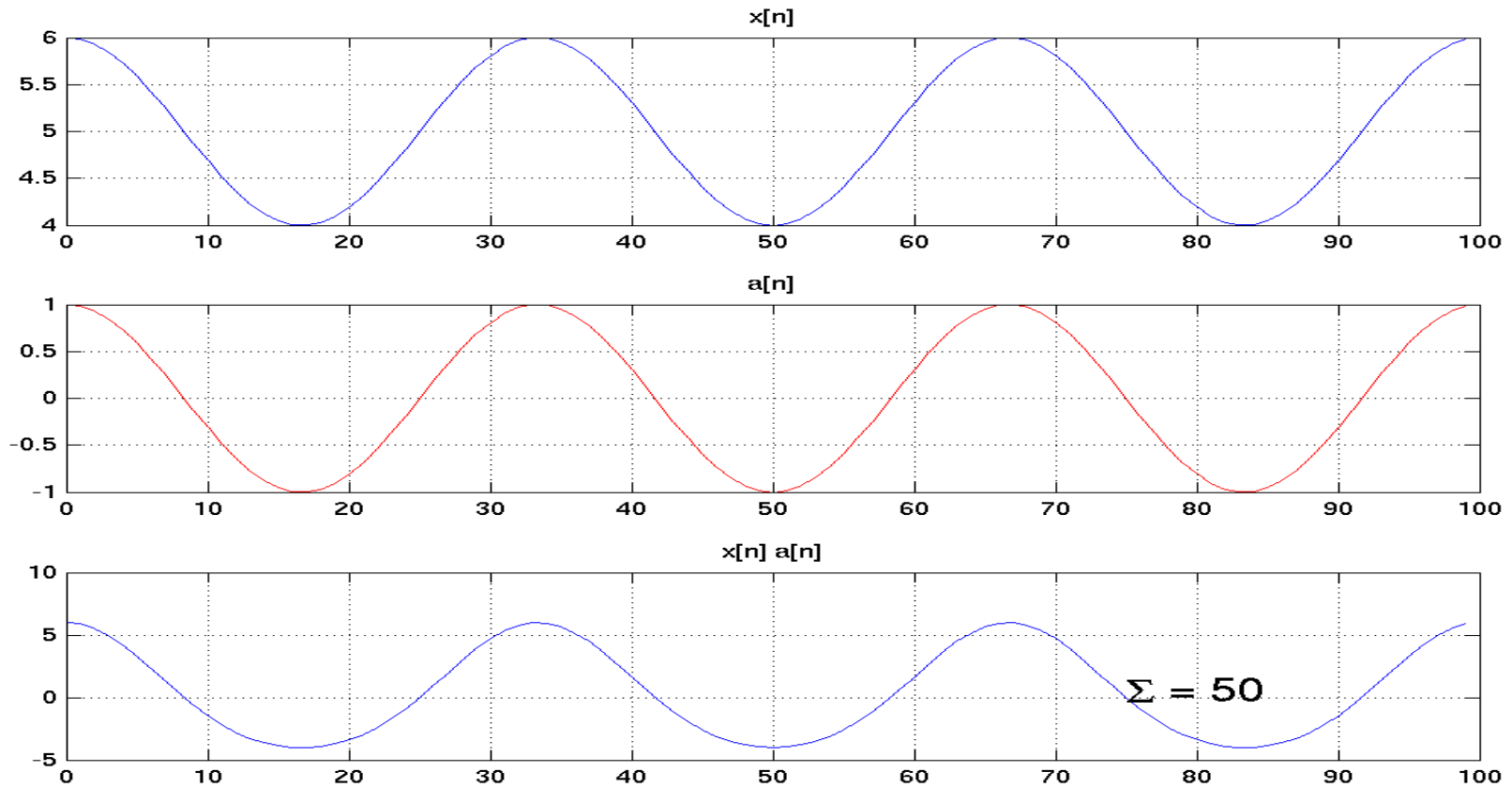
- Analyzační signál udělá 3 kmity za 100 vzorků
- Generování ?



# DC ...

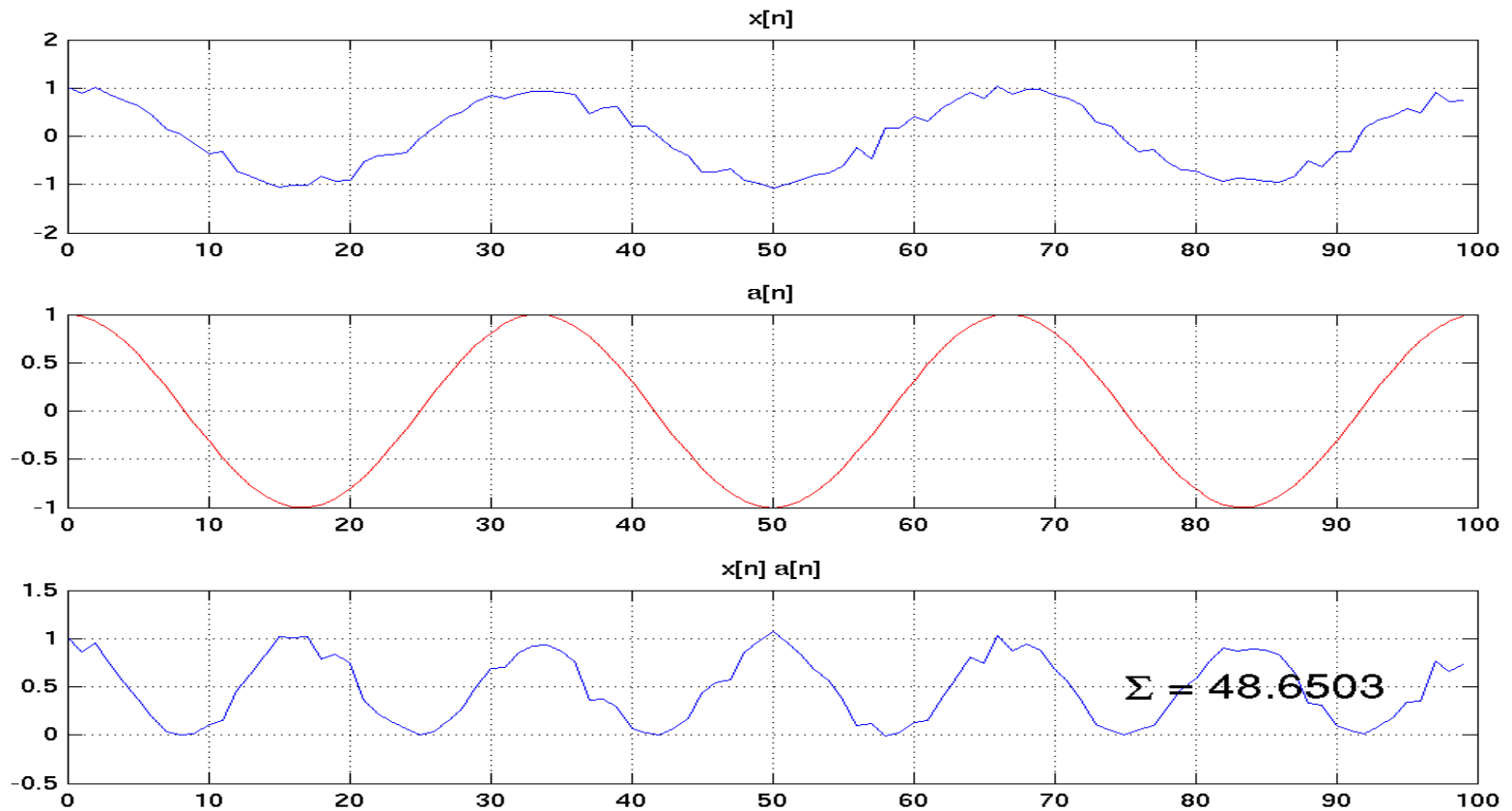


# Jiná (stejná) cosinusovka

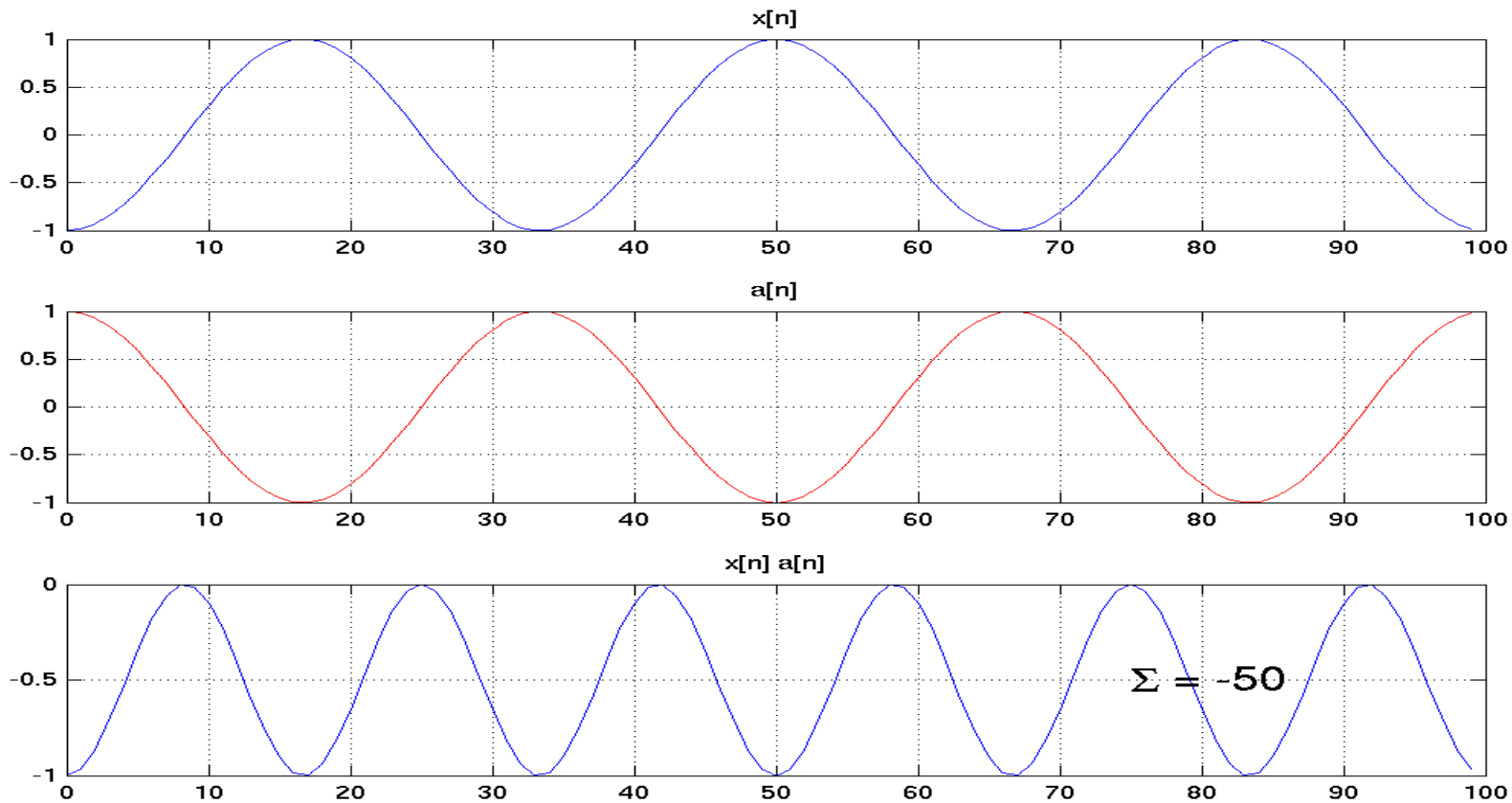


- Projeví se nějak DC složka ?

# Zašuměná cosinusovka



# Cosinusovka mínus



# Co nám říkají koeficienty

- **Velký kladný** – korelace, podobnost, frekvence JE obsažena
- **Velký záporný** – anti-korelace, podobné, ale naopak, frekvence JE obsažena se záporným znaménkem
- **Malý / nula** – není korelace, není podobnost, frekvence není obsažena nebo jen málo.



# Pojďme analyzovat něco složitějšího ...

- **WS: signal.wav**
- Základní perioda 100 vzorků
  - Kolik Hz ?
- Spousta harmonických obarvených filtrem určeným z hlásky „a“
  - Zájemci viz spec\_matlab.m

# Ne jeden, ale celá baterie cosinů

- **DEMO 3 v Matlabu**
- Do které frekvence to má cenu ?

$$a_0[n] = \cos\left(2\pi \frac{0}{N}n\right)$$

$$a_1[n] = \cos\left(2\pi \frac{1}{N}n\right)$$

$$a_2[n] = \cos\left(2\pi \frac{2}{N}n\right)$$

...

$$a_{\frac{N}{2}}[n] = \cos\left(2\pi \frac{\frac{N}{2}}{N}n\right)$$

# Analýza tím vším ...

$$c_0 = \sum_{n=0}^{N-1} a_0[n]x[n]$$

$$c_1 = \sum_{n=0}^{N-1} a_1[n]x[n]$$

$$c_2 = \sum_{n=0}^{N-1} a_2[n]x[n]$$

...

$$c_{\frac{N}{2}} = \sum_{n=0}^{N-1} a_{\frac{N}{2}}[n]x[n]$$

$$\mathbf{c} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

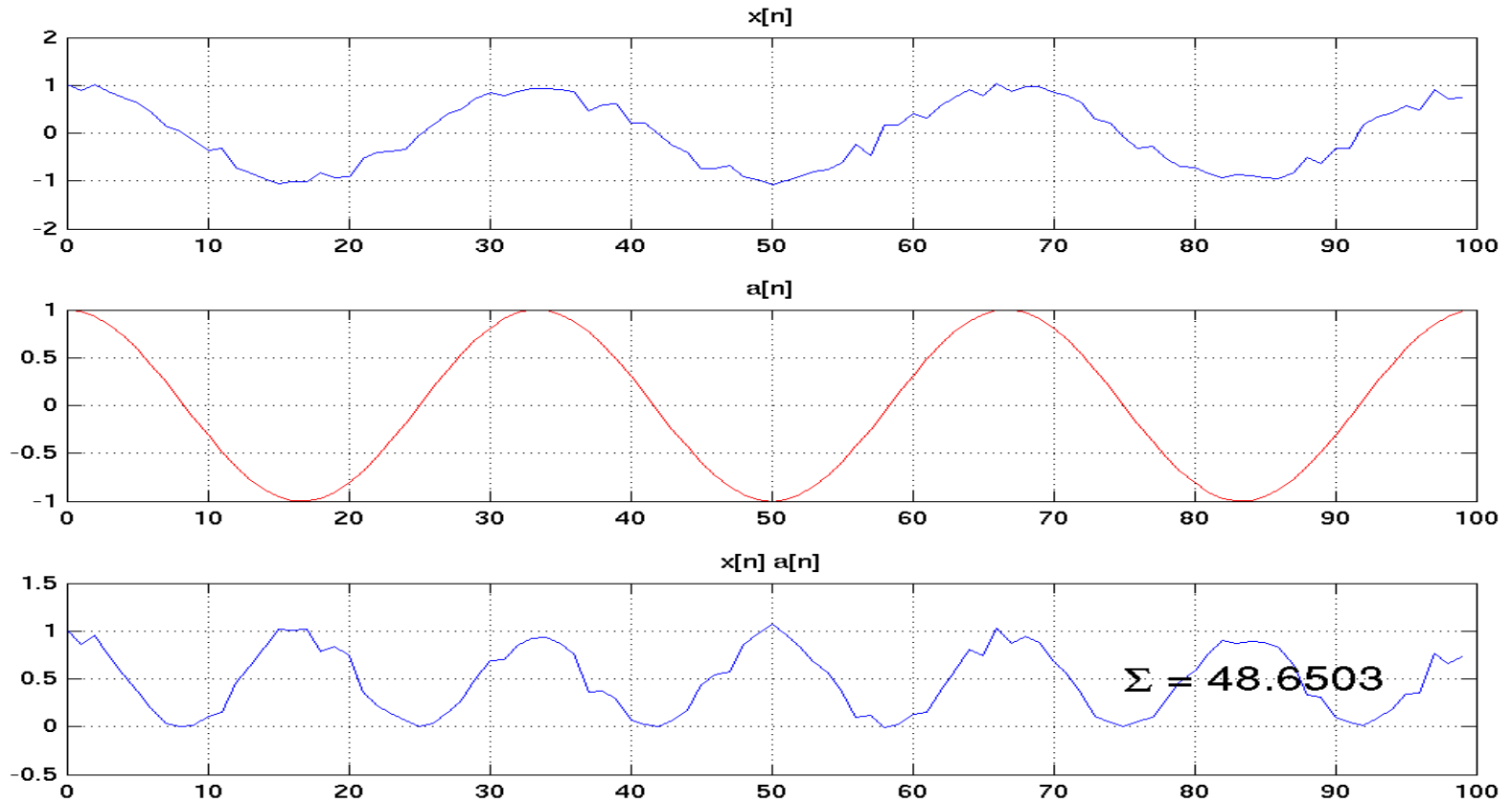
# Výsledek a re-syntéza

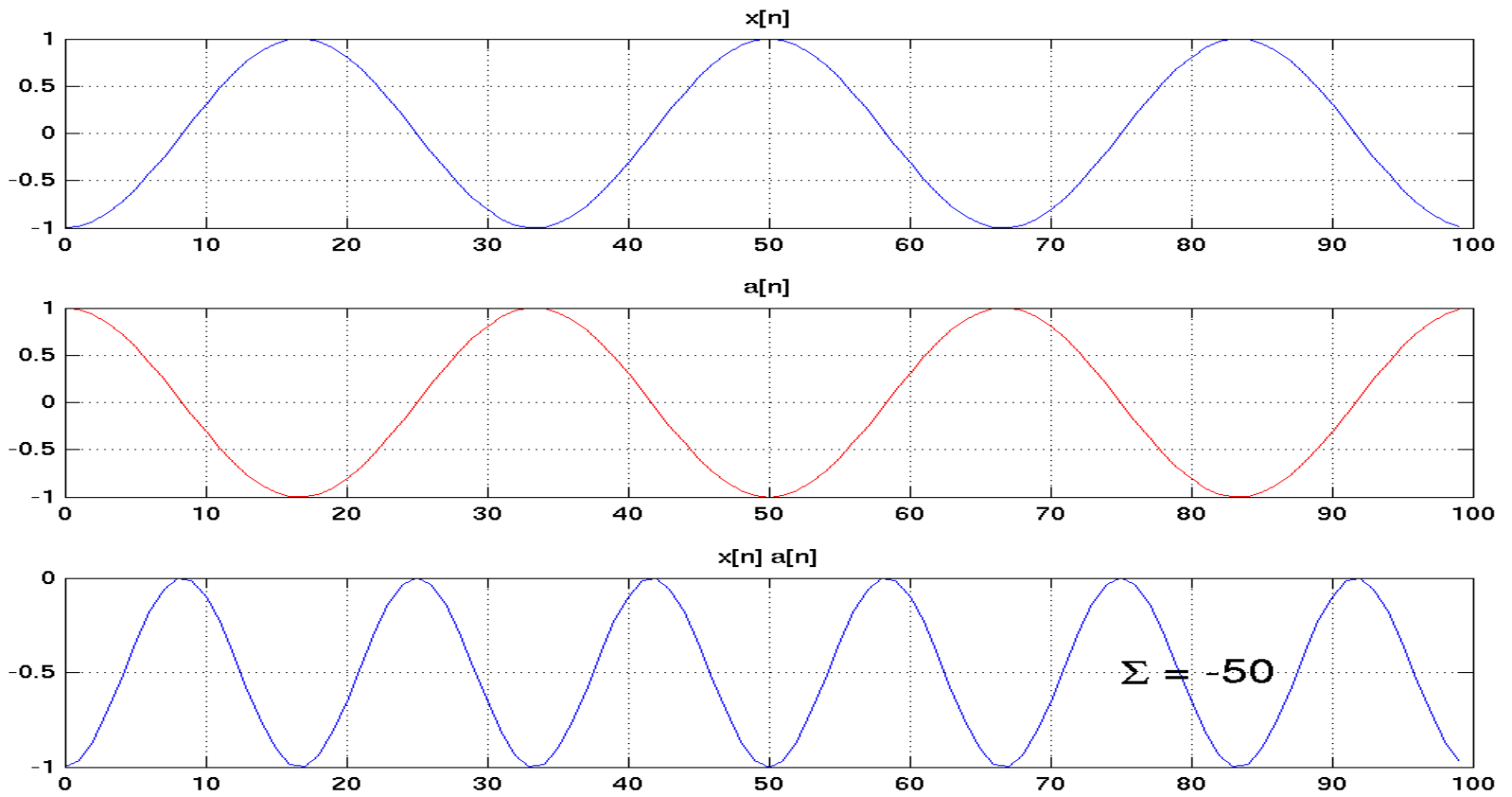
- **Stále ještě DEMO 3 ...**
  - Výsledky přímo
  - Absolutní hodnoty
  - Syntéza z koeficientů ...

$$x_s[n] = c_0 + c_1 \cos\left(2\pi \frac{1}{N}n\right) + c_2 \cos\left(2\pi \frac{2}{N}n\right) + \dots + c_{\frac{N}{2}} \cos\left(2\pi \frac{\frac{N}{2}}{N}n\right)$$

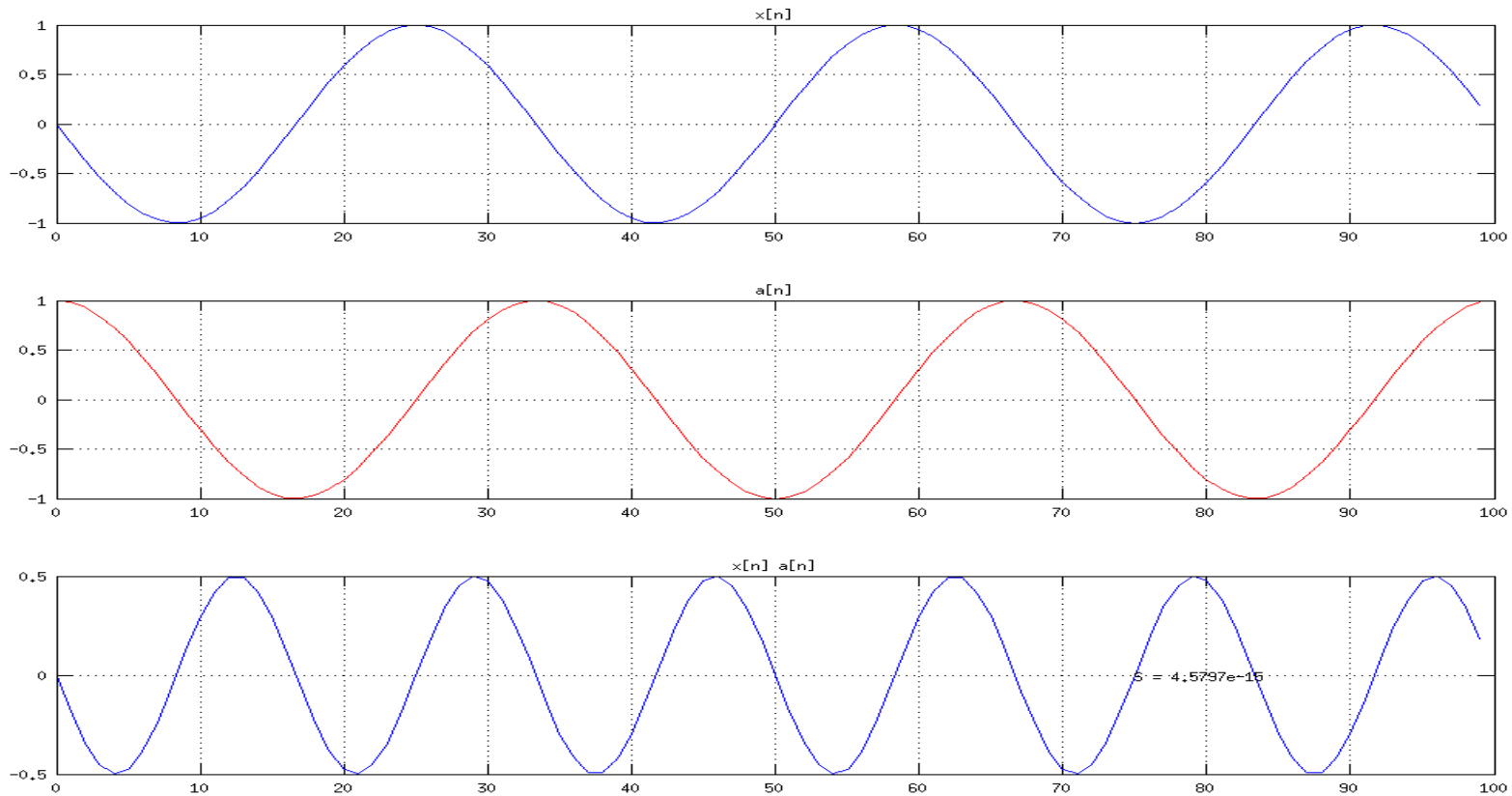
- **HM HM ... ☹**

# What's the problem ??





# Phase is the problem !



- Jak to že nula, když  $\sin(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

# Budeme potřebovat i siny ...

- **DEMO 4 v Matlabu**
- Koeficient  $a$  získán promítnutím do cos
- Koeficient  $b$  získán promítnutím do sin
- Jak vypadá  $\sqrt{a^2 + b^2}$  ?



# Analýza pomocí celé baterie cosinů i sinů ...

$$a_0[n] = \cos(2\pi \frac{0}{N} n) \quad b_0[n] = \sin(2\pi \frac{0}{N} n)$$

$$a_1[n] = \cos(2\pi \frac{1}{N} n) \quad b_1[n] = \sin(2\pi \frac{1}{N} n)$$

$$a_2[n] = \cos(2\pi \frac{2}{N} n) \quad b_2[n] = \sin(2\pi \frac{2}{N} n)$$

...

...

$$a_{\frac{N}{2}}[n] = \cos(2\pi \frac{\frac{N}{2}}{N} n) \quad b_{\frac{N}{2}}[n] = \sin(2\pi \frac{\frac{N}{2}}{N} n)$$

- Jak budou vypadat analyzační signály na okrajích ?

# Pojďme na to ...

$$\mathbf{c} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{d} = \mathbf{B}\mathbf{x}$$

$$c_0 = \sum_{n=0}^{N-1} a_0[n]x[n] \quad d_0 = \sum_{n=0}^{N-1} b_0[n]x[n]$$

$$c_1 = \sum_{n=0}^{N-1} a_1[n]x[n] \quad d_1 = \sum_{n=0}^{N-1} b_1[n]x[n]$$

$$c_2 = \sum_{n=0}^{N-1} a_2[n]x[n] \quad d_2 = \sum_{n=0}^{N-1} b_2[n]x[n]$$

...

...

$$c_{\frac{N}{2}} = \sum_{n=0}^{N-1} a_{\frac{N}{2}}[n]x[n] \quad d_{\frac{N}{2}} = \sum_{n=0}^{N-1} b_{\frac{N}{2}}[n]x[n]$$

# Jak to dopadlo

- **DEMO 5 v Matlabu**

- Zobrazení

- Re-syntéza

$$x_s[n] = c_0 + c_1 \cos\left(2\pi \frac{1}{N} n\right) + c_2 \cos\left(2\pi \frac{2}{N} n\right) + \dots + c_{\frac{N}{2}} \cos\left(2\pi \frac{\frac{N}{2}}{N} n\right) \\ + d_1 \sin\left(2\pi \frac{1}{N} n\right) + d_2 \sin\left(2\pi \frac{2}{N} n\right) + \dots + d_{\frac{N}{2}} \sin\left(2\pi \frac{\frac{N}{2}}{N} n\right)$$

- Nice 😊

# cos i sin v jedné funkci – komplexní exponenciály

$$X_k = c_k - jd_k$$

- Význam  $|X_k|$
- ... a  $\arg(X_k)$
- Co je to  $k$  ?

# Kruté odvození

$$\begin{aligned} X_k &= c_k - jd_k \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cos\left(2\pi \frac{k}{N} n\right) - j \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \sin\left(2\pi \frac{k}{N} n\right) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \left[ \cos\left(2\pi \frac{k}{N} n\right) - j \sin\left(2\pi \frac{k}{N} n\right) \right] \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi \frac{k}{N} n} \end{aligned}$$

# Diskrétní Fourierova transformace

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j2\pi \frac{k}{N} n}, \quad k = 0 \dots N - 1$$

- Co je co ?
  - $x[n]$  a  $n$
  - $X[k]$  a  $k$
  - $k/N$  a násobení  $2\pi \dots$

# DFT maticově

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}\mathbf{x}$$

# Jak vypadá komplexní exponenciála ?

- **DEMO 6 v Matlabu**
- Fyzický model
- Vytvořte si vlastní !



# Použití DFT

- Vybrat ze signálu  $N$  vzorků (je fajn, je li to mocnina dvou)
- Zavolat (`fft`, `ndft` ...)
- Omezit vzorky na  $0 \dots N/2$
- Zobrazit

# Pěkná frekvenční osa

- **DEMO 7 v Matlabu**
- Frekvenční osa
  - Indexy  $0 \dots N-1$
  - Normované frekvence  $0/N \dots (N-1)/N$
  - Skutečné frekvence  $0 \dots$  skoro  $F_s$
  - A ještě pozor, většinou jen  $N/2+1$  vzorků

# Zpětná DFT

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{+j2\pi \frac{k}{N} n}$$

- **Pokračování DEMO 7**

# SUMMARY

- Analyzujeme tak, že násobíme a sčítáme
- Složité signály analyzujeme pomocí harmonicky vztažených funkcí
  - Cosinusovky nebudou stačit
  - Cosinusovky a sinusovky
  - Raději ale komplexní exponenciály => DFT
- Výsledky jsou koeficienty pro  $N$  diskrétních frekvencí 0 až skoro  $F_s$ 
  - Z toho jen  $N/2+1$  má cenu ukazovat
  - Ale zato s pěknou frekvenční osou !

# TO BE DONE

- Jak je to s fází ?
- Proč je tam to mínus ?  $X_k = c_k - jd_k$
- Jak je možné, že při zpětné DFT máme komplexní koeficienty, ty násobí komplexní exponenciály a přitom musí vyjít reálný signál ?
- Co když je potřeba více bodů než  $N$  (hezčí obrázek ?)
- Odpovědi
  - Pokračování ISS
  - Sami s podporou literatury a online zdrojů

**The END**