DFT $x[n] \longrightarrow$ frekvence $X[k]$ obě sekvence mají N vzorků

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

normovaná ω frekvence [rad]

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\, e^{+j\frac{2\pi}{N}kn}$$

čas
frekvence
konstanta
sumační op.

$\frac{2\pi}{N}$ základní normovaná ω frekvence

$N \approx$ vzork. frekv.

k: $0, 1, 2, 3, \dots, N-1$

normované frekvence: $0, \frac{1}{N}, \frac{2}{N}, \dots, \frac{N-1}{N}, 1$

$\frac{2\pi}{N}, 2\frac{2\pi}{N}, \dots, 2\pi\frac{N-1}{N}, 2\pi$

$\frac{F_s}{N}, 2\frac{F_s}{N}, \dots, F_s\frac{N-1}{N}, F_s$ Hz

$\frac{2\pi F_s}{N}, 2\cdot\frac{2\pi F_s}{N}, \dots, 2\pi F_s\frac{N-1}{N}, 2\pi F_s$

Vlastnosti DFT:

pro Reálný $x[n]$: $X[k] = X^*[N-k]$

k: 0 … $X[k]$ … $N/2$ … $X[N-k]$ … $N-1$

umístění $\mathbb{R}$ — $\mathbb{C}$ — umístění $\mathbb{R}$

DFT-obraz kruhově posunuté sekvence

$x[n] \longrightarrow X[k]$

$x[\mathrm{mod}_N(n-p)] \longrightarrow X[k]\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{N}p}$

$x_1[n] \longrightarrow X_1[k]$ $x_2[n] \longrightarrow X_2[k]$

$x_1[n] \circledast_N x_2[n] \longrightarrow X_1[k]\cdot X_2[k]$

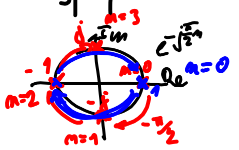
Mega-příklad

$x_1[n] = [2, 2, 0, 0]$ $x_2[n] = [1, -1, 0, 0]$

DFT: $X[k] = \sum_{n=0}^{3} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{4}kn} = \sum_{n=0}^{3} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{4}kn}$

n		0	1	2	3	
$k=0$	e^{-j0}	1	1	1	1	$4 = X[0]$
1	$e^{-j\frac{\pi}{2}n}$	1	$-j$	-1	j	$2-2j = X[1]$
2	$e^{-j\pi n}$	1	-1	1	-1	$0 = X[2]$
3						$2+2j = X[3]$

1	1	1	1	$0 = X[0]$
1	$-j$	-1	j	$1+j = X[1]$
1	-1	1	-1	$2 = X[2]$
				$1-j = X[3]$



$X[k] = X_1[k]\cdot X_2[k]$

k		
0	$4\cdot 0$	$= 0$
1	$(2-2j)(1+j)$	$= 4$
2	$0\cdot 2$	$= 0$
3	$(2+2j)(1-j)$	$= 4$

$x_1[n] \circledast_N x_2[n] = x[n]$

$X_1[k]X_2[k] = X[k]$

$x[n] =$	2	0	-2	0	
$k=0$	1	1	1	1	$0 = X[0]$
$k=1$	1	$-j$	-1	j	$4 = X[1]$
$k=2$	1	-1	1	-1	$0 = X[2]$
$k=3$					$4 = X[3]$

konvoluce $\Leftrightarrow$ násobení

```
oluna = 0.0;
for (n=0; n<N; n++)
{ oluna += ...
}
```

Výpočetní náročnost DFT

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{x[n]}_{\mathbb{R}}\, \underbrace{e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}}_{\mathbb{C}}$$

$N = 256$

pro 1 $X[k]$: N komplex. násobení, N komplex. sčítání

N-krát.

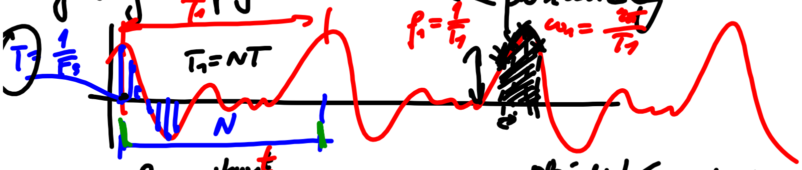
N^2 komplexních násobení a N komplex. sčítání. N^2 op.

FFT Fast F. transform

butterfly algoritmus. Cooley - Tuckey | pouze pro $N = 2^k$

$N \log_2 N$

Signály se spoj. časem $x(t)$ ← periodický



$$c_k = \frac{1}{T_1}\int_{T_1} x(t)e^{-jk\omega_1 t}\,dt =$$ periodický ⟺ diskrétní

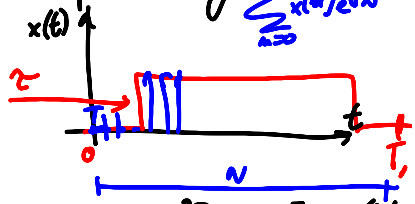
$$= \frac{1}{N\cancel{T}}\sum_{n=0}^{N-1} x[n]\,e^{-jk\frac{2\pi}{N\cancel{T}}n\cancel{T}}\cdot\cancel{T} = \frac{1}{N}\boxed{\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}}\ \text{DFT}$$

$c_k = \frac{1}{N}\,\mathrm{DFT}\{x[n]\}$ ej chuchú!

OUVEJ ....
1) vzork. teorém $f_{max} < \frac{F_s}{2}$ nejvyšší navzorkovaný c_k je na frekvenci max $\frac{F_s}{2}$
2) dokážu spočítat max. koeficienty do $k = \frac{N}{2}$ (...pak už se ve výsledku DFT "zrcadlí")
3) ~~$T_1 = N\cdot T$~~ ← skoro nikdy neplatí!

$x(t)$ se spoj. časem - není periodický $\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$

$$\cancel{X(j\omega)} = \int_0^{T_1} x(t)e^{-j\omega t}\,dt =$$



$$X\left(jk\frac{2\pi}{NT}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\cdot e^{-jk\frac{2\pi}{N\cancel{T}}n\cancel{T}}\cdot T$$

$$X\left(jk\frac{\Omega_s}{N}\right) = T\boxed{\sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}}\ \text{DFT} \leftarrow \text{ejchuchu!}$$

$\omega_1 = \frac{2\pi}{NT}$ musím počítat jen v jejích násobcích!

---

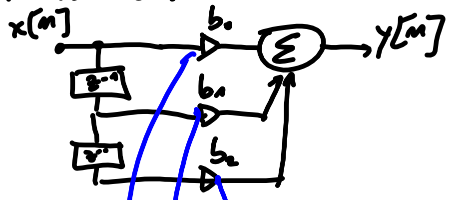
ouvej!
1) $f_{max} < \frac{F_s}{2}$
2) jsem schopen spočítat jen do $k = \frac{N}{2}$
3) signál musím posunout od 0 do T... nemusí jít
4) pouze N bodů na kmitočtové ose.

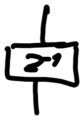
SUMMARY DFT.

- N vzorků v čase : N ve frekvenci
- ve frekvenci od 0.... $\frac{N-1}{N}\cdot$ vzorkovací frekvence → F_s [Hz], → $2\pi F_s$ rad/s, → 1, → 2π rad
- pro $x[n] \in \mathbb{R}$ symetrie $X[k] = X^*[N-k]$
- pro kruhový posun $x[n]$ $\quad X[k]\cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}k\,\text{posun}}$
- pro kruhovou konvoluci $\quad X_1[k]X_2[k]$
- s DFT jdou počítat spektra spojitých signálů c_k nebo $X(j\omega)$, ale ...
- FFT je rychlá implementace DFT pro 2^b

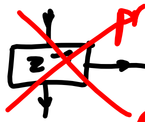
Diskrétní systémy ≈ systémy s disk. časem ≈ číslicové / digitální filtry ≈ filtry

kmitočtová charakteristika ?





OK

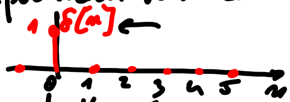


pro Boha NE!

$y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2]$

diferenční rovnice.

impulsní odezva



jednotkový impuls mám!

Diracův impuls FUJ.

Impulsní odezva

$h[n] = [b_0 \ \ b_1 \ \ b_2]$

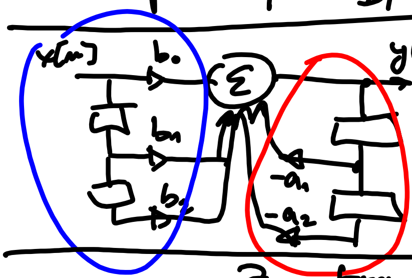
Kmitočtová charakteristika

historie: $h(t)$ $\quad H(j\omega) = \int h(t) e^{-j\omega t} dt$ FT

$\tilde{H}(e^{j\omega}) = DTFT\{h[n]\}$

počítám pomocí DFT.

NEE!



$y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] - a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2]$

$h[n]$ je nekonečná IIR

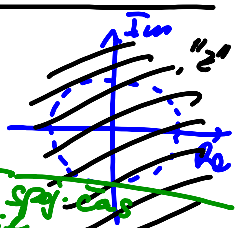
Z - transformace

DTFT

$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$

z-transf

$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n}$



$a\,x[n] \longrightarrow a\,X(z)$

$x[n-1] \longrightarrow X(z) z^{-1}$

$x[n-k] \longrightarrow X(z) z^{-k}$

spoj. čas

historie

$X(s) = \int x(t) e^{-st} dt$

$a\,x(t) \longrightarrow a\,X(s)$

$\frac{dx(t)}{dt} \longrightarrow X(s)s$

$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \longrightarrow X(s)s^n$

$y[n] = b_0 x[n] + b_1 x[n-1] + b_2 x[n-2] - a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2]$ $\quad \mathcal{Z}$

$Y(z) = b_0 X(z) + b_1 X(z) z^{-1} + b_2 X(z) z^{-2} - a_1 Y(z) z^{-1} - a_2 Y(z) z^{-2}$

přenosová (systémová) funkce $\quad H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$

$Y(z)\left[1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}\right] = X(z)\left[b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}\right]$

$$\boxed{H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2}}{1 + a_1 z^{-1} + a_2 z^{-2}}}$$

→ kmit. char.

→ stabilita