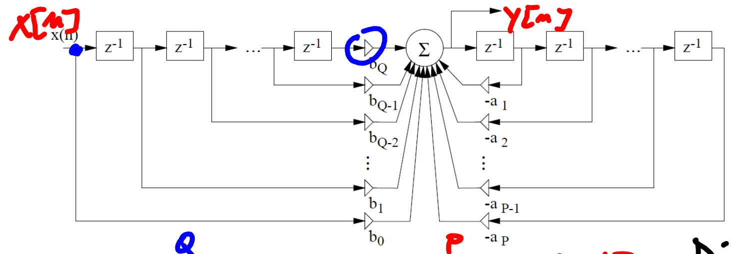


$x[n] \to X(z)$
$a\,x[n] \to a\,X(z)$
$x[n-k] \to X(z)\,z^{-k}$

$$y[n] = \sum_{k=0}^{Q} b_k\, x[n-k] - \sum_{k=1}^{P} a_k\, y[n-k]$$ Diferenční rovnice

$$Y(z) = \sum_{k=0}^{Q} b_k X(z) z^{-k} - \sum_{k=1}^{P} a_k Y(z) z^{-k}$$

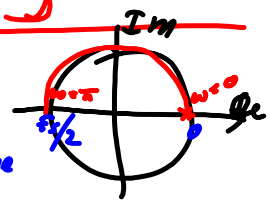
Přenosová funkce $H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$

$$Y(z) + Y(z)\sum_{k=1}^{P} a_k z^{-k} = X(z)\sum_{k=0}^{Q} b_k z^{-k}$$

$$Y(z)\left[1 + \sum_{k=1}^{P} a_k z^{-k}\right] = X(z)\sum_{k=0}^{Q} b_k z^{-k}$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{Q} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{P} a_k z^{-k}}$$

$$X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} \approx X(e^{j\omega})$$



$$H(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{k=0}^{Q} b_k e^{-j\omega k}}{1 + \sum_{k=1}^{P} a_k e^{-j\omega k}}$$

matlab/octave freqz

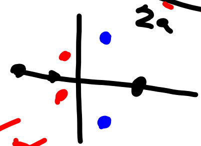
Kmitočtová (frekvenční) charakteristika filtru

$$H(z) = \frac{b_0 z^{-Q}\left(z^{Q} + \frac{b_1}{b_0} z^{Q-1} + \dots + \frac{b_Q}{b_0}\right)}{z^{-P}\left(z^{P} + a_1 z^{P-1} + \dots + a_P\right)} =$$

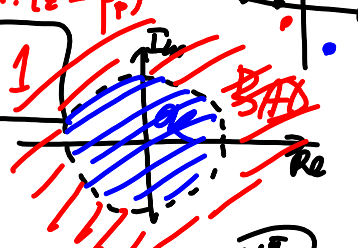
$$= b_0 z^{P-Q} \frac{(z-m_1)(z-m_2)\dots(z-m_Q)}{(z-p_1)(z-p_2)\dots(z-p_P)}$$

$ax^2+bx+c=0$

$$x_{1/2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

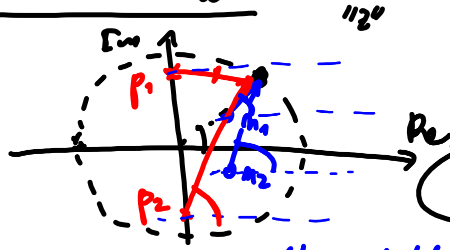


Stabilita filtru $\boxed{|p_k| < 1}$



Kmit. char. měnit

"1/2"



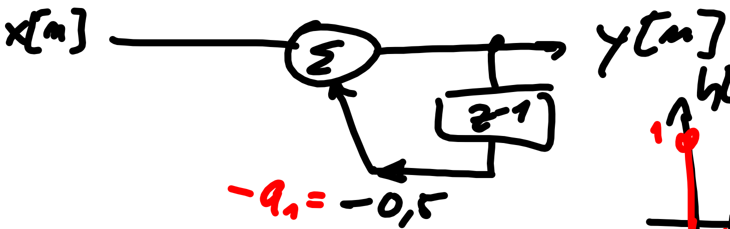
$\omega = \frac{\pi}{4}$ $\quad e^{j\omega} = e^{j\frac{\pi}{4}}$

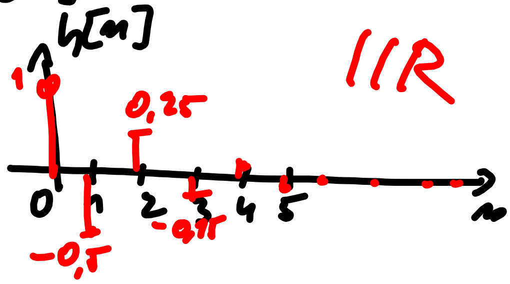
$$H(e^{j\omega}) = \frac{(e^{j\omega}-m_1)(e^{j\omega}-m_2)}{(e^{j\omega}-p_1)(e^{j\omega}-p_2)}$$

$$|H(e^{j\frac{\pi}{4}})| = \frac{\text{součin délek modrých vektorů}}{\text{součin délek červených vektorů}}$$

$\arg H(e^{j\frac{\pi}{4}}) =$ součet úhlů modrých vektorů − součet úhlů červených vektorů

$$y[n] = x[n] - 0{,}5\,y[n-1]$$





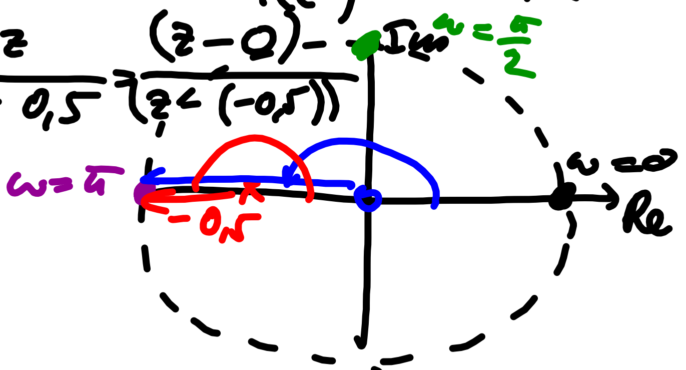
IIR

$$Y(z) = X(z) - 0{,}5\,Y(z)\,z^{-1}$$

$$\underline{Y(z)\left(1+0{,}5z^{-1}\right)} = \underline{X(z)}$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1+0{,}5z^{-1}} =$$

$$= \frac{1}{z^{-1}(z+0{,}5)} = \frac{z}{z+0{,}5} = \frac{(z-0)}{(z-(-0{,}5))}$$



$z + 0{,}5 = 0$

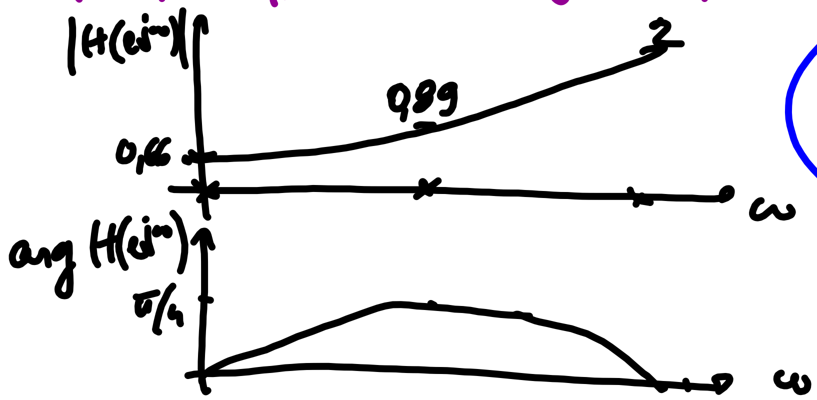
$z = -0{,}5$

$\Rightarrow$ stabilní!

$\omega = 0$ $\quad |H(e^{j0})| = \frac{1}{1{,}5} = 0{,}66 \quad \text{ang}\left(H(e^{j0})\right) = 0$

$\omega = \frac{\pi}{2}$ $\quad |H(e^{j\frac{\pi}{2}})| = \frac{1}{1{,}12} = 0{,}89 \quad \text{ang}\,H(e^{j\frac{\pi}{2}}) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$

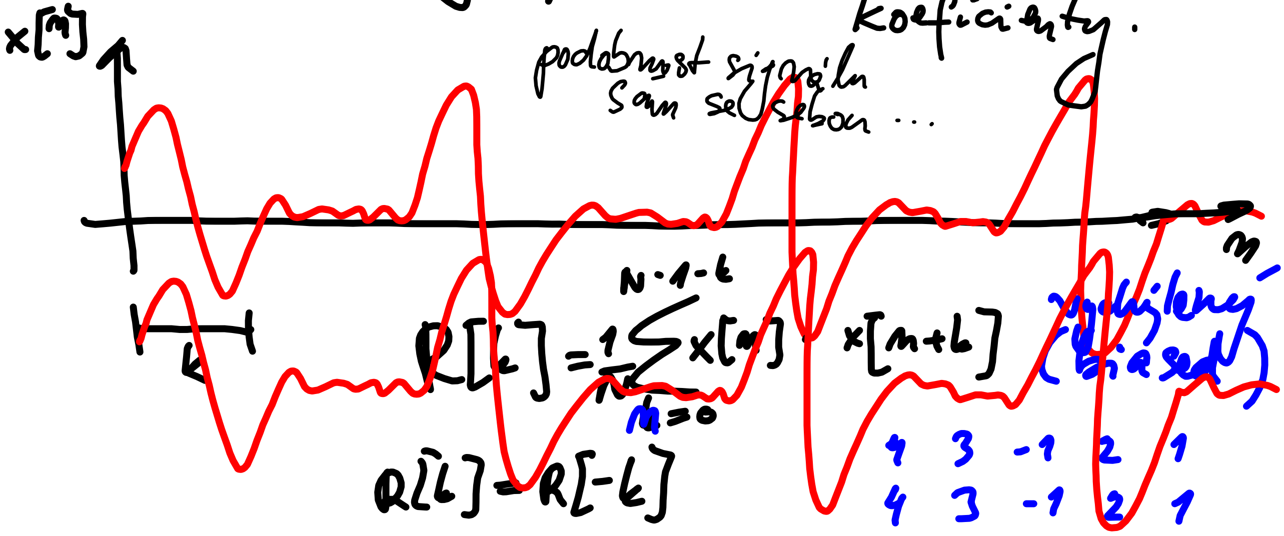
$\omega = \pi$ $\quad |H(e^{j\pi})| = \frac{1}{0{,}5} = 2 \quad \text{ang}\,H(e^{j\pi}) = \pi - \pi = 0$



Horní propust!

Náhodné signály 2 … autokorelační koeficienty.

podobnost signálu sám se sebou …



$$R[k] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1-k} x[n]\, x[n+k]$$ vychýlený (biased)

$$R[k] = R[-k]$$

4 3 -1 2 1

4 3 -1 2 1

$$R[k] = \frac{1}{N-|k|}\sum_{n=0}^{N-1-k} x[n]\, x[n+k]$$ nevychýlený (unbiased)

střední výkon:

$$P = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x^2[n] = R[0]$$

$$P = D + a^2$$

$$D = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} (x[n]-a)^2 = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} x^2[n] - a^2$$

pro signály $a = 0$

$$P = R[0] = D$$

Spektrální analýza n. s. s diskrétním časem.

spektrální hustota výkonu:

$$G(e^{j\omega}) = DTFT\left(R[k]\right)$$ ... prakticky: DFT (FFT)

$$\boxed{G(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R[k] e^{-j\omega k}}$$ Wiener-Chinchin

$$\boxed{R[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} G(e^{j\omega}) e^{+j\omega k}}$$

odhad přímo ze signálu: $$\boxed{G(e^{jk\frac{2\pi}{N}}) = \frac{|X[k]|^2}{N}}$$

často nepřesný

⇒ spočítat jich hodně (třeba rozdělit sig. na hodně úseků) a zprůměrovat.

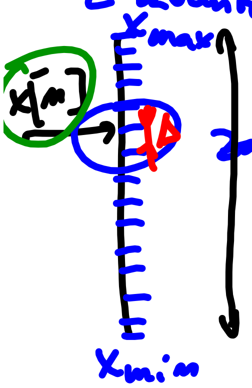
Welchova metoda

Kvantování

$P = R[0] = D$

L kvantovacích hladin

$L = 2^b \leftarrow$ počet bitů



zaokrouhlení $x_q[n]$

$e[n] = x_q[n] - x[n]$

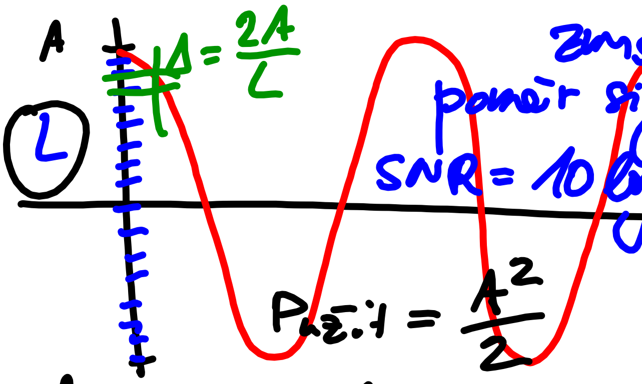
kvantovací krok:

$$\Delta = \frac{x_{max} - x_{min}}{L}$$

$a = 0$

výkon chybového signálu:

$$P = D = \int_{-\infty}^{\infty} (g - \cancel{a})^2 \cdot p(g)\, dg = \frac{1}{\Delta} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} g^2\, dg = \frac{\Delta^2}{12}$$



zmíšení signálu kvantovánku

poměr signálu k šumu

$$SNR = 10 \log_{10} \frac{P_{užit}}{P_{škodl}} \quad [dB]$$

$$P_{užit} = \frac{A^2}{2} \qquad P_{škodl} = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{\left(\frac{2A}{L}\right)^2}{12} = \frac{A^2}{3L^2}$$

$$SNR = 10 \log_{10} \frac{\frac{A^2}{2}}{\frac{A^2}{3L^2}} = 10 \log_{10} \frac{3L^2}{2} = \leftarrow$$

závisí jen na počtu kv. hladin!

b bitů…

$L = 2^b$

$$= 10 \log_{10} \frac{3(2^b)^2}{2} = \underbrace{10 \log_{10} \frac{3}{2}}_{1{,}76} + \underbrace{10 \log_{10} 2^{2b}}_{20b \log_{10} 2} = \boxed{1{,}76 + 6b}$$

- IKR
- Speech
- graph (CV) - Cphoto
- Robo
- Biometrik
- Janoš

SUMMARY jak svině ...

spojitý čas | diskrétní čas

výstup = možná konstanta · sumační op. · vstup $e^{\pm j}$ čas frekvence

+ frekvence → čas
− čas → frekvence

$x(t)$ je periodický — Fourierova řada

$f_1 = \frac{1}{T_1}$ $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$

kruhová frekv [rad/s]

$$c_k = \frac{1}{T_1}\int_0^{T_1} x(t)\,e^{-jtk\omega_1}\,dt$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\,e^{+jtk\omega_1}$$

$x[n]$ periodicita!!! N vzorků

$\omega_1 = \frac{2\pi}{N}$ normovaná kruhová frekv. [rad]

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\cdot e^{-jnk\frac{2\pi}{N}}$$

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k]\,e^{+jnk\frac{2\pi}{N}}$$

periodické po N vzorcích

Diskrétní F. řada

0 … N−1

norm ω frekv. 0, $\frac{2\pi}{N}$ … $\frac{N-1}{N}2\pi$; 2π

normovaná frekv. 0, $\frac{1}{N}$ … $\frac{N-1}{N}$; 1

kruhová 0, $\frac{2\pi F_s}{N}$ … $2\pi F_s \cdot \frac{N-1}{N}$

obyčejná 0, $\frac{F_s}{N}$ … $F_s \frac{N-1}{N}$

spektrální funkce — Neperiodické

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,e^{-jt\omega}\,dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\,e^{+jt\omega}\,d\omega$$

Fourierova transformace

Fourierova t. s diskrétním časem

$$\tilde{X}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\,e^{-jn\omega}$$

← libovolné norm. ω frekvence

periodická se $2\pi \approx F_s$!!!

$$x[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{X}(e^{j\omega})\,e^{+jn\omega}$$

pokud jsou signály reálné:

$c_k = c^*_{-k}$

$X(j\omega) = X^*(-j\omega)$

$\tilde{X}[k] = \tilde{X}^*[-k]$

$\tilde{X}(e^{j\omega}) = \tilde{X}^*(e^{-j\omega})$

+ periodicita:

$\tilde{X}[k] = \tilde{X}[N+k]$

$\tilde{X}(e^{j\omega}) = \tilde{X}(e^{j(\omega+2\pi)})$

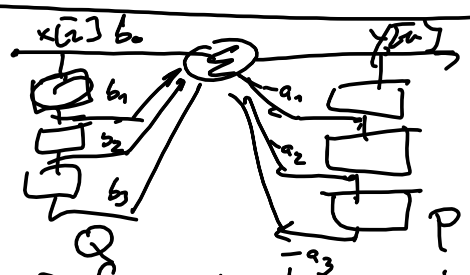
DFT = DFŘ bez periodicit

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\,e^{-jnk\frac{2\pi}{N}}$$

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X[k]\,e^{+jnk\frac{2\pi}{N}}$$

FILTRY

spoj. čas.	disk. čas.



spoj. čas.

Diferenciální rovnice

$$\sum_{k=0}^{Q} b_k \cdot \frac{d^k x(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{P} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k}$$

Přenosová funkce

$$H(s) = \frac{\sum_{k=0}^{Q} b_k \cdot s^k}{\sum_{k=0}^{P} a_k \cdot s^k}$$

disk. čas.

Diferenční rovnice

$$y[n] = \sum_{k=0}^{Q} b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^{P} a_k y[n-k]$$

$$H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{Q} b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^{P} a_k z^{-k}}$$

čitatel ⇒ nulové body

jmenovatel ⇒ póly

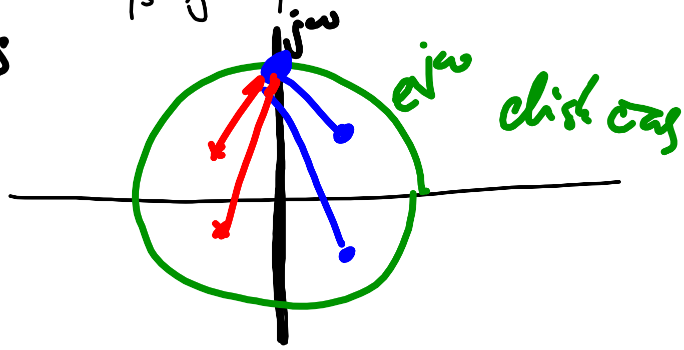
$$Re(p_k) < 0$$

$$|p_k| < 1$$

$$H(j\omega) = H(s)\Big|_{s \to j\omega}$$

$$H(e^{j\omega}) = H(z)\Big|_{z \to e^{j\omega}}$$

spoj. čas



disk. čas