operace s disk. signály
okno délky N vzorků $R_N[n]$

n	-2	-1	0	1	2 ...	N-1	N
$R_N[n]$	0	0	1	1	1 ...	1	0

periodisace signálu délky N

$x[n]$ 1 1 -1 -1

$x[\mathrm{mod}_4(n)]$ 1 1 -1 -1 1 1 -1 -1 . . . .

periodisace s posunutím

$x[\mathrm{mod}_4(n-1)]$ -1 1 1 -1 -1 1 1 -1 -1

kruhový posunutí - pouze buffer o délce N

$R_N[n]\, x[\mathrm{mod}_4(n-1)]$

-1 1 1 -1

Konvoluce

$x_1[n] = [1 \quad 2 \quad 3 \quad 4]$
$x_2[n] = [1 \quad 1 \quad -1 \quad -1]$

n	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$x_1[n]$				1	2	3	4			
$x_2[n]$				1	1	-1	-1			

Lineární konvoluce

$$y[n] = x_1[n] * x_2[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1[k]\, x_2[n-k]$$

$x_1[n-k]\, x_2[k]$

lineární filtrace FIR filtrem

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
$y[n]$	1	3	4	4	-1	-7	-4	0	0	

$2N-1$

$$(x^3 + 2x^2 + 3x + 4)(x^3 + x^2 - x - 1) = \dots$$

Cyklická konvoluce

$$y[n] = x_1[n] \circledast x_2[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x_1[k]\, x_2[\mathrm{mod}_4(n-k)]$$

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	
$x_1[k]$			1	2	3	4						
$x_2[\mathrm{mod}_4(n-k)]$	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1		
	0	-4	0	4	0	-4	0	4	0	-4	0	4	0 ...

Kruhová konvoluce

$$y[n] = x_1[n] \, (N) \, x_2[n] = R_N[n] \sum_{k=0}^{N-1} x_1[k]\, x_2[\mathrm{mod}_4(n-k)]$$

pouze v intervalu $n \in 0 \dots N-1$, jinde ne

$$X_1[k] \cdot X_2[k] \approx x_1[n] \, (N) \, x_2[n]$$

spektrum

$\boxed{\text{ČZSa}}$

Frekvenční analýza disk. signálů

F. transformace s diskrétním časem: DTFT

$$\tilde{X}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]\, e^{-j\omega n}$$

normovaná kruh. frekvence

$\tilde{X}(e^{j\omega})$ → periodické s násobky 2π

$\frac{2\pi F_s}{F_s} = 2\pi$ odpovídá v norm. kruh. frekvenci vzorkovací frekvence !!

Příklad:

n	0	1	2	3
$x[n]$	2	2	0	0

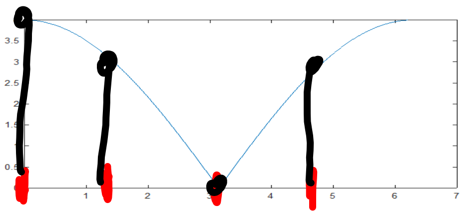
$$\tilde{X}(e^{j\omega}) = 2\underbrace{e^{-j\omega 0}}_{1} + 2e^{-j\omega 1} = 2 + 2e^{-j\omega} = 2(1+e^{-j\omega}) =$$

$$\tilde{X}(e^{j\omega}) = \tilde{X}^*(e^{j(2\pi-\omega)}) \quad = 2e^{-j\frac{\omega}{2}}\left(e^{j\frac{\omega}{2}} + e^{-j\frac{\omega}{2}}\right)$$

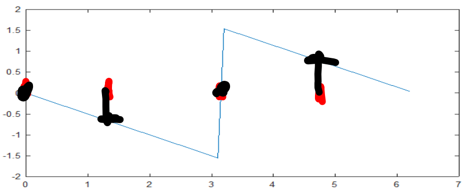
$1 \cdot \arg -\frac{\omega}{2}$

$\cos x = \frac{e^{jx}+e^{-jx}}{2}$

. . . . .



DTFT



Frekv. analýza periodického disk. signálu

$x[n] \longrightarrow \tilde{x}[n]$ perioda N vzorků

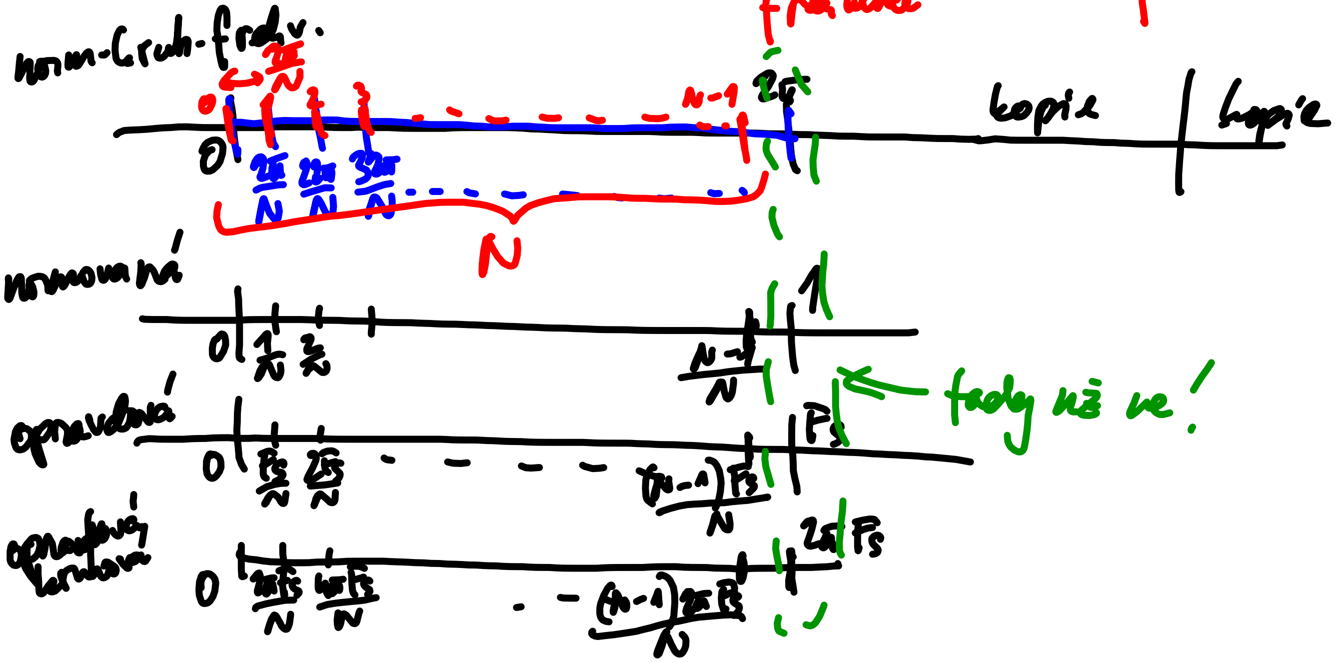
n	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	...				
$\tilde{x}[n]$	0	0	2	2	0	0	2	2	0	0	2	2	0	0	...

v čase		ve frekvenci
vzorkování ✓	duál	periodisace ✓ (každou F_s ... resp. 2π)
periodisace ✓		vzorkování (diskretisace) ✓

Jak to bylo v analogu:
$x(t)$ s periodou T_1 ... koeficienty F. řady $k\omega_1$ $\quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$

Teď v digitálu:
$x[n]$ s periodou N vzorků ... koeficienty diskrétní FŘ $k\omega_1$ $\quad \omega_1 = \frac{2\pi}{N}$ základní kruhová frekvence

normovaná kruh. frekvence



Diskrétní Fourierova řada pro periodické disk. signály

D.T.F.T.:

$$\tilde X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

DFŘ

$$\boxed{\tilde X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}}$$

Vlastnosti:

1. periodické s norm. kruh. frek. 2π

to je po každém násobku N:

$$\tilde X[k+mN] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde x[n] e^{-j(k+mN)\frac{2\pi}{N}n} =$$

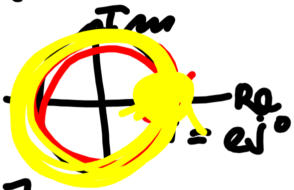
libovolný násobek

$e^{a+b} = e^a e^b$

$$= \underbrace{\sum \tilde x[n] e^{-jk\frac{2\pi}{N}n}} \cancel{e^{-jmN\frac{2\pi}{N}n}}$$

$$e^{-jmn2\pi} = 1$$

[redacted]



2. Symetrie $\tilde X[k] = \tilde X^*[-k]$

3. Periodicita a symetrie dohromady $\tilde X[k] = \tilde X^*[N-k]$

Invezní DFŘ

$$\tilde x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde X[k] e^{+jnk\frac{2\pi}{N}}$$

výstup = násobná konstanta sum. op. vstup $e^{\pm j}$ čas frekv.

Příklad: DFŘ signálu 2 2 0 0 s periodou $N=4$

$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{3} x[n]\, e^{-j\frac{k2\pi}{N}n}$ $\quad e^{-j\frac{k2\pi}{4}n} = e^{-jkn\frac{\pi}{2}}$

n		0	1	2	3	$\tilde{X}[k]$
$x[n]$		2	2	0	0	
$k=0$	e^{-j0}	1	1	1	1	4
$k=1$	$e^{-jn\frac{\pi}{2}}$	1	$-j$ ($-\frac{\pi}{2}$)	-1	j	$2-2j$
$k=2$	$e^{-j\frac{2n\pi}{2}} = e^{-jn\pi}$	1	-1	1	-1	0
$k=3$	$e^{-j\frac{3n\pi}{2}}$	1	j	-1	$-j$	$2+2j$

Ověření: 1) $\tilde{X}[k] = \tilde{X}^*[N-k]$ OK, $2-2j$ a $2+2j$ jsou komplex. sdruž.

2) vztah s DTFT neperiodického signálu:
DFŘ ji musí vzorkovat na $k\frac{2\pi}{N}$

Diskrétní Fourierova transformace DFT
"the ultimate tool"

Teorie signál o délce N $\longrightarrow$ spektrum o délce N (komplexní)

$x[n]$ o délce N $\xrightarrow{\text{periodizace}}$ $\tilde{x}[n]$ $\xrightarrow{\text{DFŘ}}$ $\tilde{X}[k]$ $\xrightarrow{\text{omezení jen na } N \text{ vzorků}}$ $X[k] = R_N[n]\tilde{X}[k]$

N koef. od 0 do 2π, periodické

okénkovací funkce

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n]\, e^{-jkn\frac{2\pi}{N}}$$

k - teoreticky od $-\infty$ do ∞

k pouze od $0 \dots N-1$.

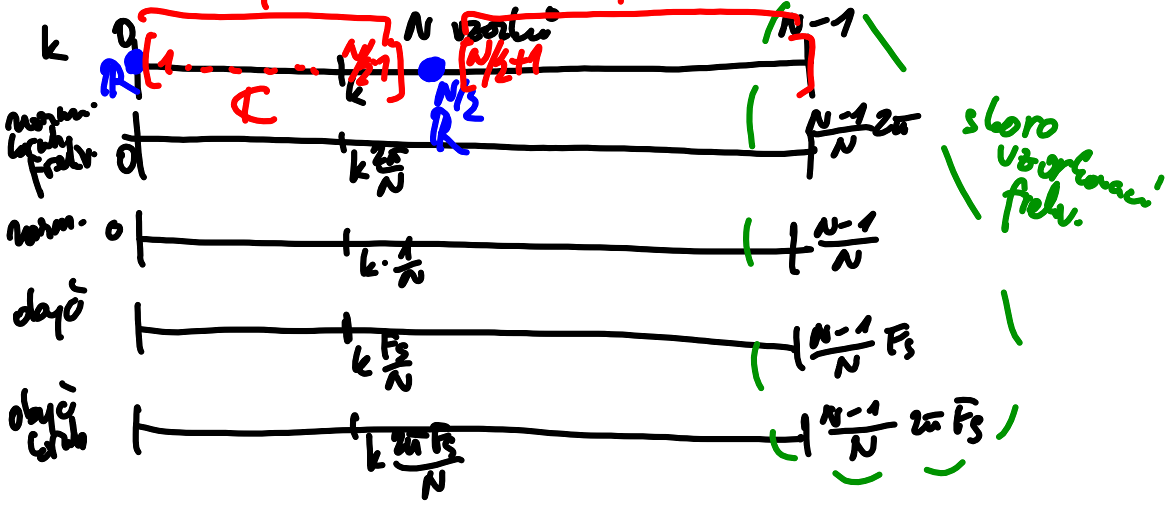
DFT:

$$\boxed{X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}}$$

dft pokud $N = 2^k$ fft

z frekv. do času:

$$\boxed{x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k]\, e^{+j\frac{2\pi}{N}kn}}$$

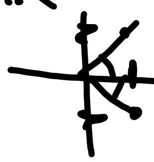


Funkce symetrie uvnitř intervalu $k = 0 \dots N-1$:

$$X[k] = X^*[N-k]$$

$X[0]$ - nemá "partnera" $\sum x[n] e^{j0}$ ← čistě $\mathbb{R}$ 1

$X[\frac{N}{2}] = X^*[N - \frac{N}{2}] = X^*[\frac{N}{2}]$ ← čistě $\mathbb{R}$ 1



$X[\underbrace{1 \dots \tfrac{N}{2}-1}]$ - komp. sdr. s $X[\frac{N}{2}+1 \dots N-1]$

$2\left(\frac{N}{2}-1\right) = N-2$

$\Sigma = 1 + 1 + N - 2 = N$

DFT ze cosinusovky s periodou N $\quad \omega_1 = \frac{2\pi}{N}$

$$x[n] = \underbrace{C_1 \cos\left(\frac{2\pi}{N} n + \varphi_1\right)}$$

$\downarrow$ DFT.

$$\cos\alpha = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}$$

IDFT

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum X[k] e^{+j\frac{2\pi}{N}kn} = \frac{1}{N} X[1] e^{j\frac{2\pi}{N}n} + \frac{1}{N} X[N-1] e^{j\frac{2\pi}{N}(N-1)n} \Rightarrow$$

$$= \frac{C_1}{2} e^{j\frac{2\pi}{N}n} e^{j\varphi_1} + \underbrace{\frac{C_1}{2} e^{-j\frac{2\pi}{N}n - j\varphi_1}}_{\frac{C_1}{2} e^{j\frac{N-1}{N}2\pi n} \cdot e^{-j\varphi_1}}$$

$k=1$ ✓

$\cdot e^{j\frac{2\pi}{N}N} = \cdot 1$

$-\frac{2\pi}{N}$ je záporná bad!!!

$k = N-1$

$$X[1] = \frac{NC_1}{2} e^{j\varphi_1} \qquad X[N-1] = \frac{NC_1}{2} e^{-j\varphi_1}$$

$x_1[n] \longrightarrow X_1[k]$ $\qquad$ $x_2[n] \longrightarrow X_2[k]$

$y[n] = x_1[n] \, \text{Ⓝ} \, x_2[n]$ $\qquad$ $Y[k] = X_1[k] X_2[k]$

n	0	1	2	3
$x_1[n]$	2	2	0	0
$x_2[n]$	1	−1	0	0
$x_1[n] \, \text{Ⓝ} \, x_2[n]$	2	0	−2	0

2

0 1 $\qquad$ 2

−1

0

DFT:

	$X[k]$	$X_2[k]$	$X_1[k] \cdot X_2[k]$
$k=0$	4	0	0
1	$2-2j$	$1+j$	4
2	0	2	0
3	$2+2j$	$1-j$	4

~~DFT~~ vs. FFT Fast Fourier.

$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$

násob.

N výstupů

N^2 komplex. násobení

N^2 komplex. sčítání

$2N^2$

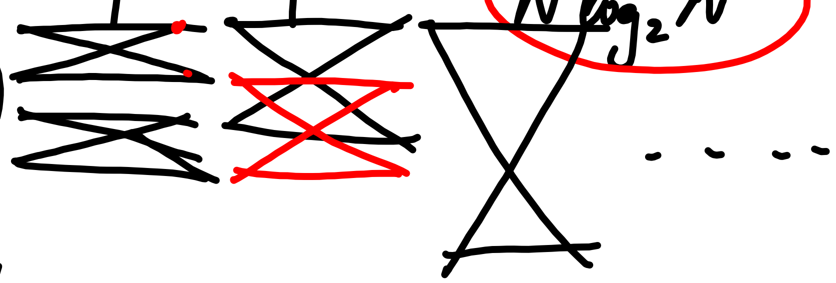
kroky i $\log_2 N$

0 1 . . . . . $\log_2 N$

N operací

$N \log_2 N$

butterfly alg.
(decomposition)



Cooley - Tukey

Jak "namontovat" DFT na analýzu sig. se spoj. čas.

period: FŘ

$c_k = \frac{1}{T_1} \int_{T_1} x(t) e^{-jk\omega_1 t} dt$

neperiod FT

$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$

DFT

$\boxed{X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}}$