ISS numerical exercise 2 — Spectral analysis

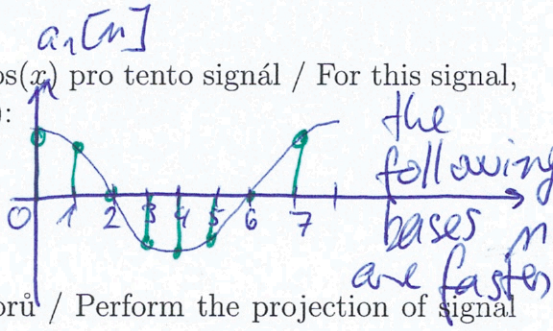
František Grézl, October 2022

Mějme diskrétní signál o délce $N = 8$ vzorků / Let us have a discrete signal with $N = 8$ samples: $x[n] = [1;\ 1;\ 1;\ 0;\ 0;\ 0.5;\ 0.5;\ 0]$.

1. Zkonstruujte bázové vektory odvozené z harmonické funkce $\cos(x)$ pro tento signál / For this signal, construct basis vectors derived from harmonic function $\cos(x)$:

$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ will be denoted g

$$a[n] = \cos\left(2\pi\frac{k}{N}n\right)$$



2. Proveďte projekci vektoru $x[n]$ do kosinových bázových vektorů / Perform the projection of signal $x[n]$ into cosine bases:

$$c_k = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]a[n]$$

$x[n]$	1	1	1	0	0	0.5	0.5	0	c_k
$a_0[n]$	1	1	1	1	1	1	1	1	
$a_0[n]x[n]$	1	1	1			0,5	0,5		4
$a_1[n]$	1	g	0	$-g$	-1	$-g$	0	g	
$a_1[n]x[n]$	1	g	0	g		$-0,5g$	0	g	$1+0,5g$
$a_2[n]$	1	0	-1	0	1	0	-1	0	
$a_2[n]x[n]$	1	0	-1			0	$-0,5$		$-0,5$
$a_3[n]$	1	$-g$	0	g	-1	g	0	$-g$	
$a_3[n]x[n]$	1	$-g$	0	g		$0,5g$		g	$1-0,5g$
$a_4[n]$	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	
$a_4[n]x[n]$	1	-1	1			$-0,5$	0,5		1

every 2nd from a_1

every 3rd from a_1

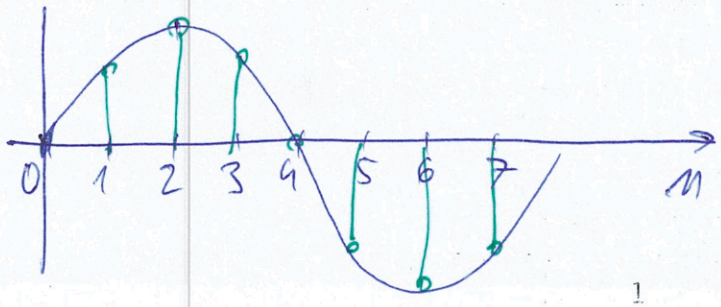
every 4th from a_1

3. Zkonstruujte bázové vektory odvozené z harmonické funkce $\sin(x)$ pro tento signál / For this signal, construct basis vectors derived from harmonic function $\sin(x)$:

$$b[n] = \sin\left(2\pi\frac{k}{N}n\right)$$

4. Proveďte projekci vektoru $x[n]$ do sinových bázových vektorů / Perform the projection of signal $x[n]$ into sine bases:

$$d_k = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]b[n]$$



k	c_k	d_k
0	4	0
1	1,35	0,85
2	$-0,5$	1,5
3	0,64	$-0,$
4	1	0

$x[n]$	1	1	1	0	0	0.5	0.5	0	d_k
$b_0[n]$	0	0	0	0	0	0	0	0	
$b_0[n]x[n]$									
$b_1[n]$	0	g	1	g	0	-g	-1	-g	
$b_1[n]x[n]$	0	g	1	g		-0,5g	-0,5	g	0,5+0,5g
$b_2[n]$	0	1	0	-1	0	1	0	-1	
$b_2[n]x[n]$	0	1	0			0,5	0		1,5
$b_3[n]$	0	g	-1	g	0	-g	1	-g	
$b_3[n]x[n]$	0	g	-1	g		-0,5g	0,5	g	-0,5+0,5g
$b_4[n]$	0	0	0	0	0	0	0	0	
$b_4[n]x[n]$									

every 2nd

every 3rd

every 4th

5. ~~Spočítejte amplitudu a fázi obecné funkce $B_k \cos(\frac{2\pi}{N}kn + \phi_k)$ pro všechna k. U úhlů ověřte správnost výsledků. / Compute the magnitude and phase of general function $B_k \cos(\frac{2\pi}{N}kn + \phi_k)$ for all k. Fro angles, check the correctness of results:~~

$$B_k = \sqrt{c_k^2 + d_k^2}$$

$$\phi_k = \tan^{-1} \frac{d_k}{c_k}$$

k	B_k	ϕ_k
0	4	0
1	1,59	0,56 rad
2	1,58	1,89 rad (correction needed!)
3	0,65	-0,21 rad
4	1	0

6. Zkonstruujte bázové vektory odvozené z komplexní exponenciály $e^{j\alpha}$ pro tento signál / For this signal, construct basis vectors derived from complex exponential $e^{j\alpha}$:

$$a[n] = e^{j2\pi \frac{k}{N} n}$$

7. Proveďte projekci vektoru $x[n]$ do bázových vektorů daných komplexní exponenciálou / Perform the projection of signal $x[n]$ into bases given by complex exponentials:

$$c_k = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]a[n]$$

$x[n]$	1	1	1	0	0	0.5	0.5	0	c_k
$a_0[n]$	1	1	1	1	1	1	1	1	
$a_0[n]x[n]$	1	1	1			0,5	0,5		4
$a_1[n]$									
$a_1[n]x[n]$	1	g+jg				-0,5g-0,5jg	-0,5j		1+0,5g+
$a_2[n]$									j(0,5+0,5
$a_2[n]x[n]$	1	j	-1			0,5j	-0,5		-0,5+1,5j
$a_3[n]$									
$a_3[n]x[n]$	1	-0,5g+jg	-j			0,5g-j0,5g	0,5j		1-0,5g+ j(-0,5+0,5
$a_4[n]$	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	
$a_4[n]x[n]$	1	-1	1			-0,5	0,5		1

8. Porovnejte výsledky rozkladu do sin a cos bází s rozkladem do komplexních exponenciál / Compare the results with the decomposition into cosines and sines.

R correspond to values obtained from cos

9. Zkonstruujte komplexně sdružené bázové vektory odvozené z komplexní exponenciály $e^{-j\alpha}$ pro tento signál / For this signal, construct basis vectors derived from complex-conjugated complex exponentials $e^{-j\alpha}$:

Im correspond to values obtained from sin.

$$a^*[n] = e^{-j2\pi\frac{k}{N}n}$$

10. Proveďte projekci vektoru $x[n]$ do bázových vektorů daných zápornou komplexní exponenciálou / Perform the projection of signal $x[n]$ into bases given by these negative complex exponentials:

$$c_k = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]a^*[n]$$

$x[n]$	1	1	1	0	0	0.5	0.5	0	c_k
$a_0^*[n]$	1	1	1	1	1	1	1	1	
$a_0^*[n]x[n]$									4
$a_1^*[n]$									
$a_1^*[n]x[n]$	1	g-jg	-j			-0,5g+j0,5g	0,5j		1+0,5g
$a_2^*[n]$									+j(-0,5
$a_2^*[n]x[n]$									-0,5j
$a_3^*[n]$									
$a_3^*[n]x[n]$									...
$a_4^*[n]$	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	
$a_4^*[n]x[n]$									1

11. Porovnejte výsledky získané rozkladem do kladných exponenciál a do záporných exponenciál / Compare results obtained by projections to positive and negative complex exponentials.

complex conjugated.