Fourierova transformace

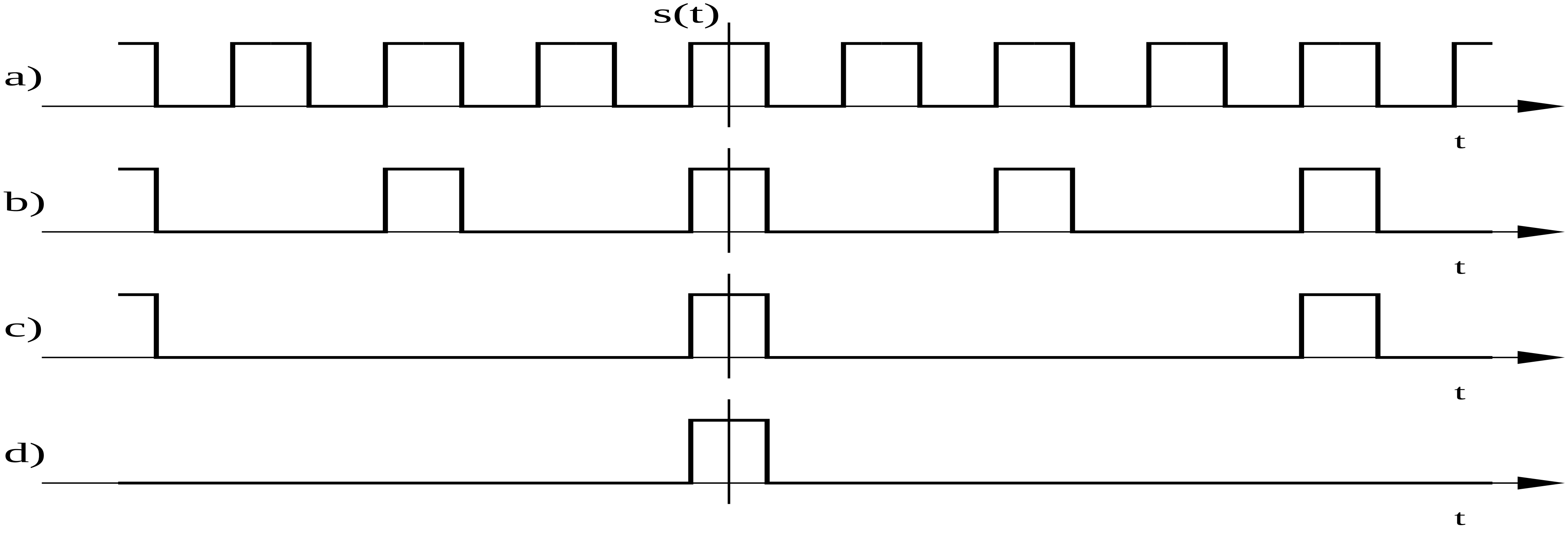
Jan Černocký

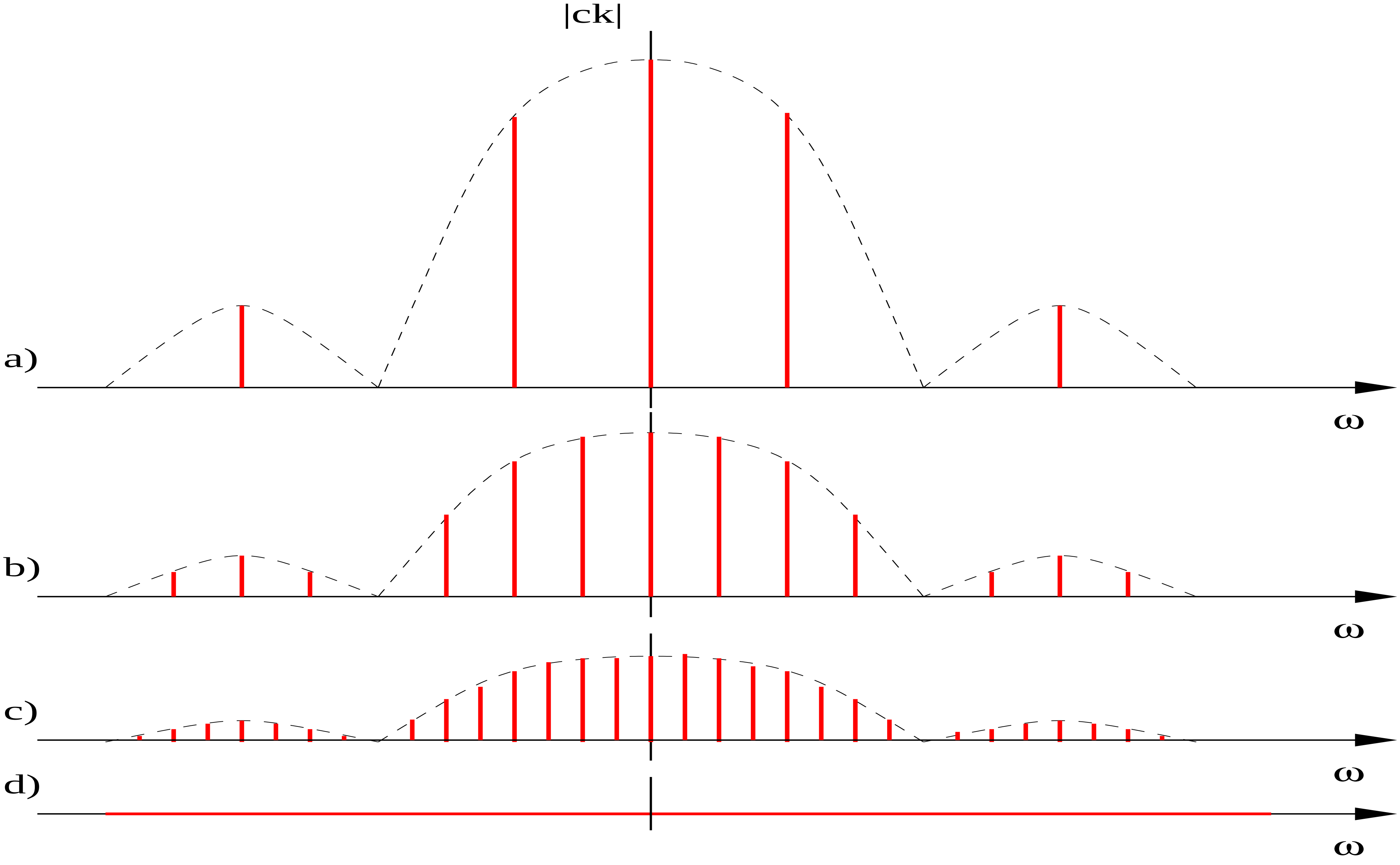
ÚPGM FIT VUT Brno, cernocky@fit.vutbr.cz

- Fourierova transformace
- Vlastnosti spektrální funkce
- Spektrální funkce důležitých signálů.
- Poučky o spektrech
- Energie a Parsevalův teorém.

Důvody k zavedení FT:

- Chceme popsat v kmitočtové oblasti i jiné signály než signály periodické.
- I tyto jiné signály budeme vyjadřovat součtem harmonických složek, protože máme harmonické složky rádi (reakce systému na $e^{j\omega t}$ se dobře počítá, atd.). Bude obtížnější si to představit, protože složek bude nekonečně mnoho a budou nekonečně malé. . . .




|ck|
a)
ω
b)
ω
c)
ω
d)
ω

Přechod od FŘ k FT

Koeficienty FŘ:

$$c_k = \frac{1}{T_1} \int_{-\frac{T_1}{2}}^{+\frac{T_1}{2}} x(t) e^{-jk\omega_1 t} dt.$$

Nyní budeme T_1 "roztahovat až do nekonečna":

$$T_1 \to \infty, \quad \omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} \to d\omega, \quad k\omega_1 \to \omega$$

$$c_k \to dc, \quad \frac{1}{T_1} \to \frac{d\omega}{2\pi},$$

dosadíme do rovnice pro výpočet koeficientů a dostaneme:

$$dc = \frac{d\omega}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt.$$

$2\pi \frac{dc}{d\omega}$ můžeme volně nazvat "nekonečně malý přírůstek koeficientu na nekonečně malém přírůstku kruhové frekvence krát dvě pí"... Raději zavedeme pojem **spektrální funkce** $X(j\omega)$:

$$\boxed{X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt,}$$

a funkci $X(j\omega)$ nazveme **Fourierův obraz** nebo jen **obraz** signálu $x(t)$. Podobně jako koeficientům FŘ říkáme i spektrální funkci $X(j\omega)$ zkráceně **spektrum**. Fourierovu transformaci značíme někdy $\mathcal{F}$: $x(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} X(j\omega)$.

Základní vlastnosti spektrální funkce

Pokud obraz existuje, má vlastnost:

$$X(j\omega) = X^{\star}(-j\omega)$$

což plyne z:

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\cos(\omega t)dt - j\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\sin(\omega t)dt.$$

Další vlastností spektrální funkce jsou zvláštní případy:

$$x(t) = x(-t) \Rightarrow X(j\omega) = \Re\{X(j\omega)\}$$

sudý signál má tedy pouze reálné spektrum.

$$x(t) = -x(-t) \Rightarrow X(j\omega) = j\Im\{X(j\omega)\}$$

lichý signál má pouze imaginární spektrum.

Zpětná Fourierova transformace

Vyjdeme ze "syntézy signálu z koeficientů FŘ":

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_1 t} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi \frac{c_k}{\omega_1} e^{jk\omega_1 t} \omega_1.$$

A opět přechodem $T_1 \to \infty$ dostáváme:

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega) e^{+j\omega t} d\omega.}$$

Konvergence FT

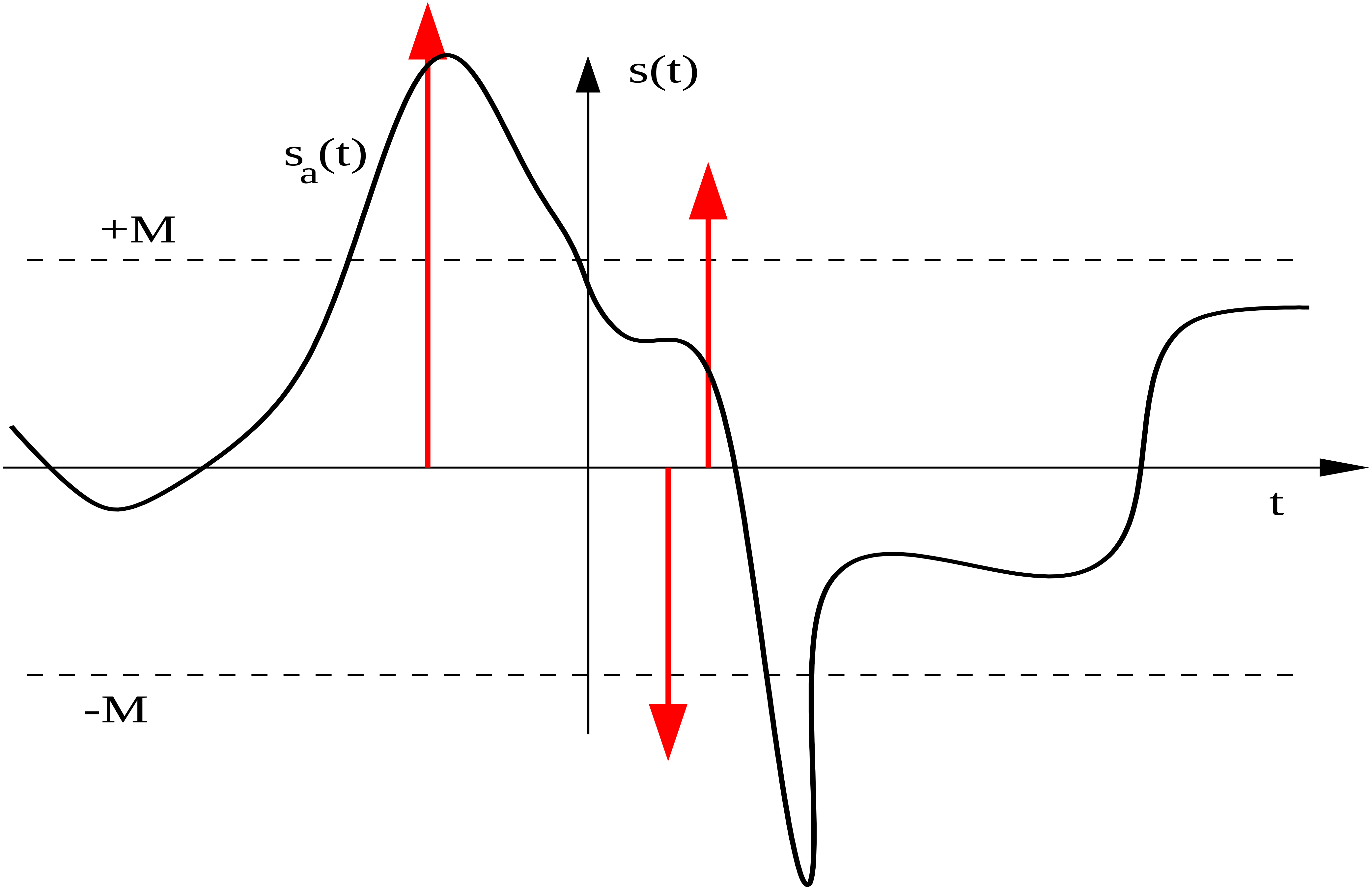
Pokud nám nebude vadit, že spektrální funkce bude obsahovat jednotkové impulsy, stačí pro konvergenci FT následující podmínky:

- signál musí být omezen konstantou $M < \infty$:

$$|x(t)| < M$$

  jeho energie nemusí být tedy konečná. Dokážeme spočítat i FT stejnosměrného signálu či periodických signálů!

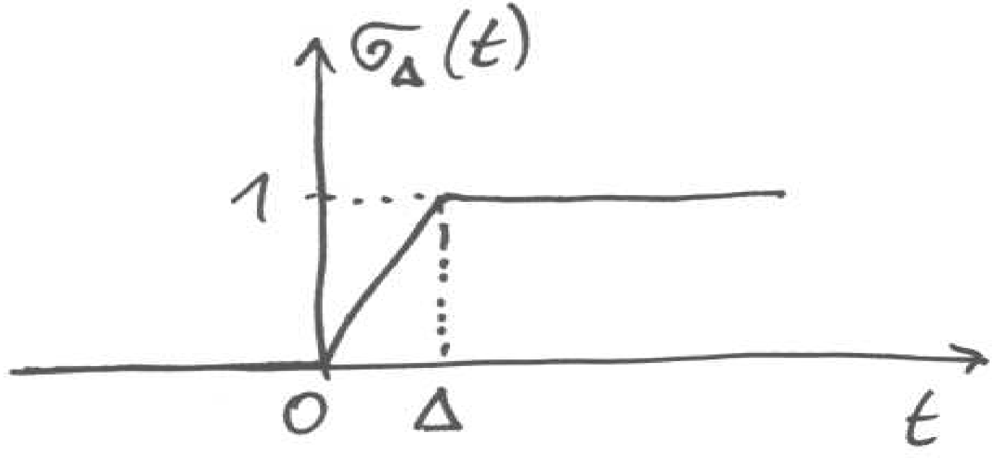
- signál může obsahovat jednotkové impulsy – různě posunuté a s různou mocností. Tato vlastnost se nám bude velice hodit při vzorkování, kde budeme hledat spektrum periodického sledu jednotkových impulsů.

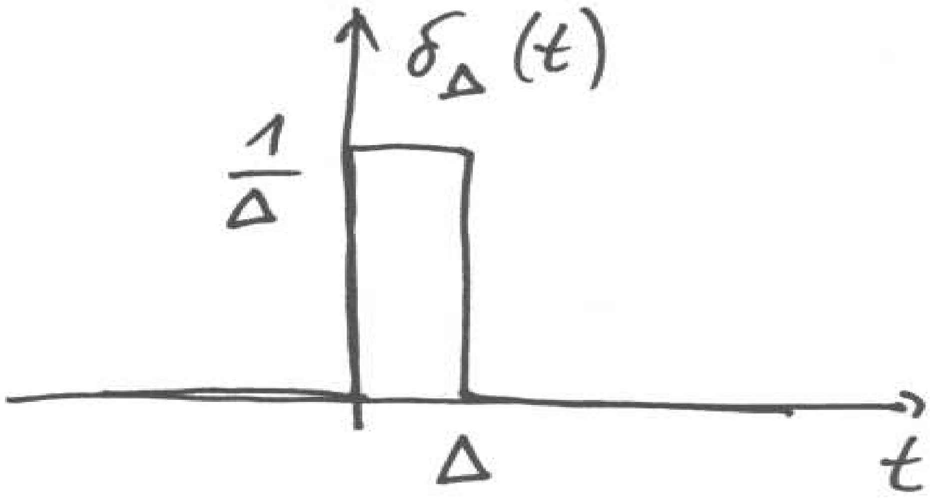

s(t)
$s_a(t)$
+M
-M
t

SPEKTRÁLNÍ FUNKCE DŮLEŽITÝCH SIGNÁLŮ

Jednotkový impuls

O jednotkovém impulsu jsme si již povídali na první přednášce, ale v rychlosti: můžeme si jej představit jako funkci $\delta_\Delta(t) = \frac{d\sigma_\Delta(t)}{dt}$, u které Δ stlačujeme do 0:

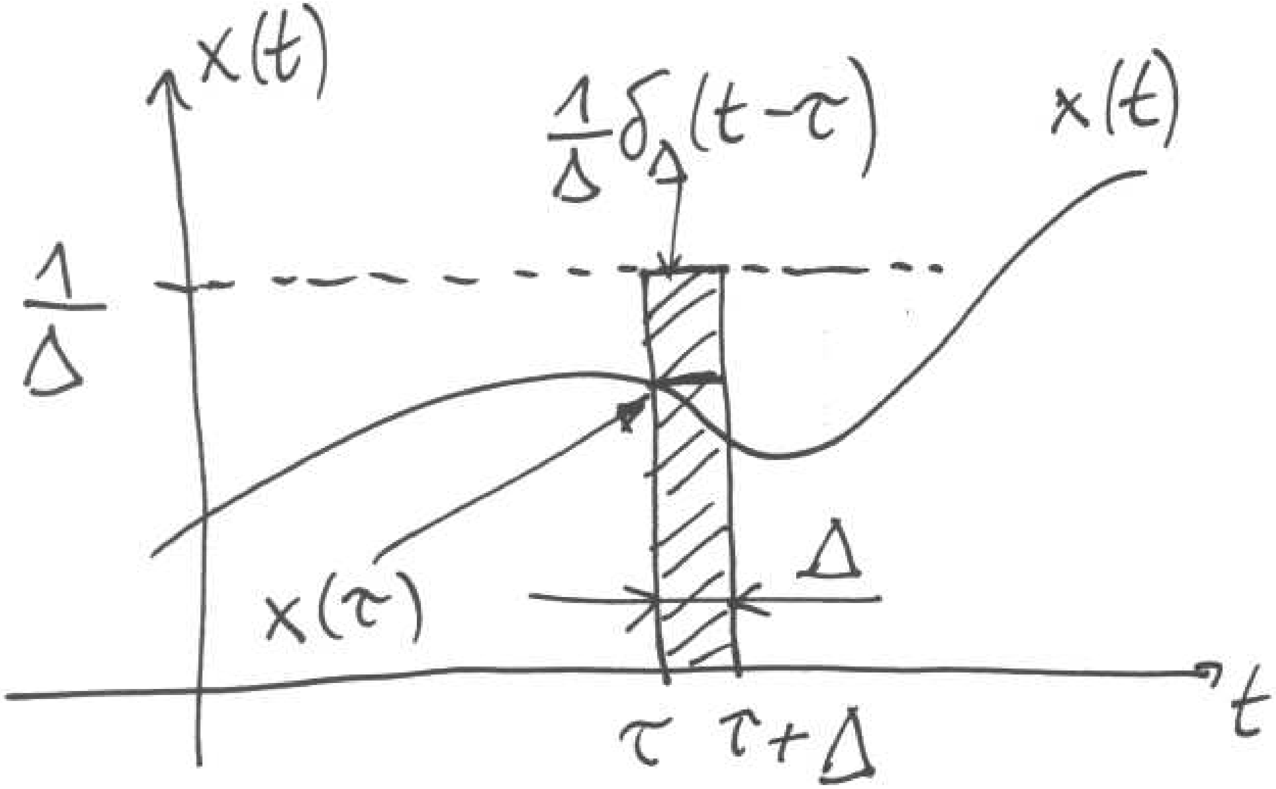




Jednotkový impuls má tzv. "vzorkovací schopnost" – vyhovuje vztahu:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-\tau)dt = x(\tau)$$

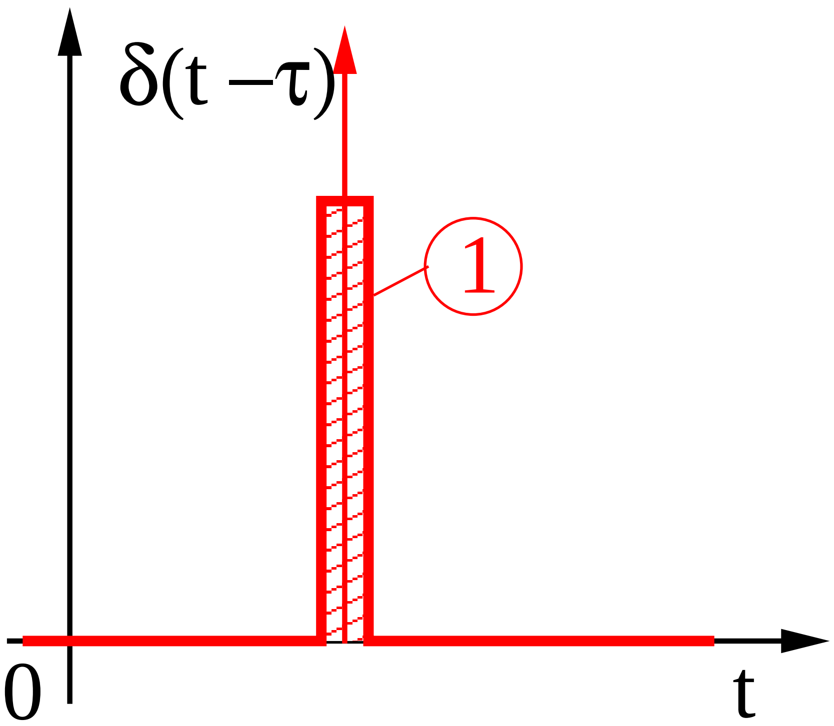
Proč ? Pokud vynásobíme $\delta_\Delta(t-\tau)$ signál $x(t)$ a integrujeme, výsledkem je plocha obdélníčku o rozměrech $\Delta\frac{1}{\Delta}x(\tau) = x(\tau)$. Pokud je Δ dostatečně krátké, můžeme tam signál pokládat za konstantu. Toto platí i pro $\Delta \to 0$.

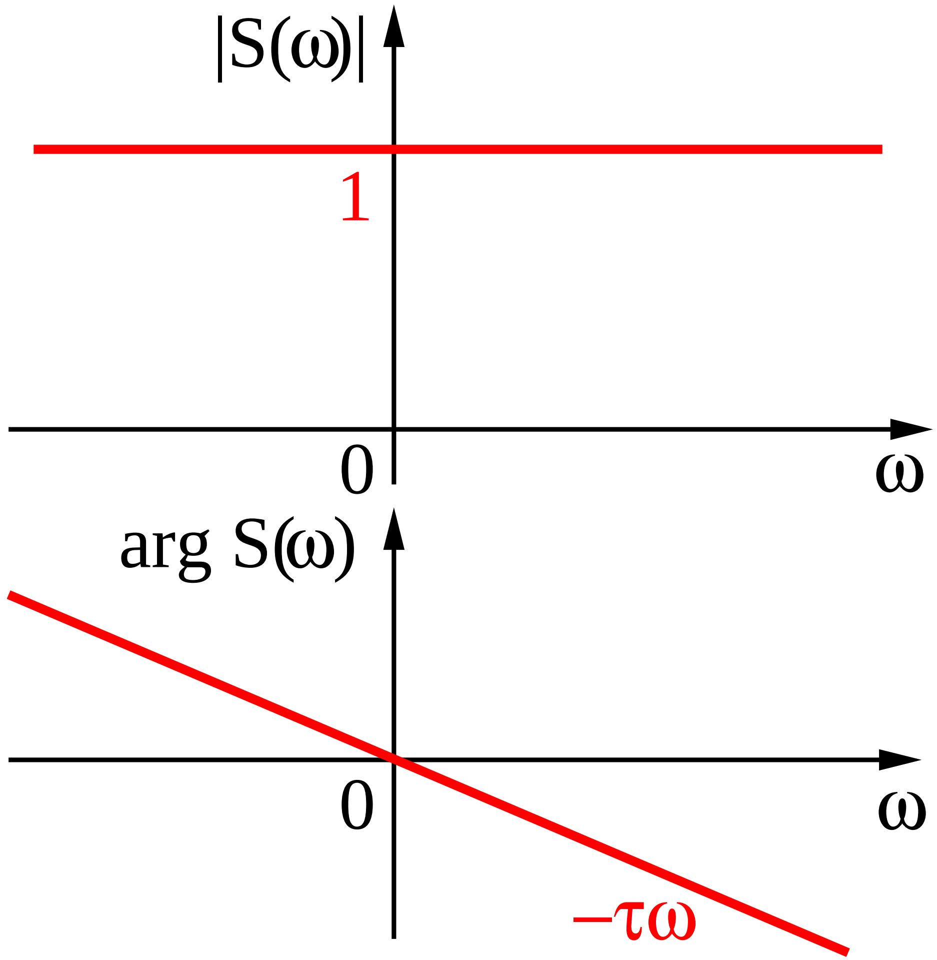


$$\int_{\infty}^{+\infty} x(t)\delta_\Delta(t-\tau)dt = \int_{\tau}^{\tau+\Delta} x(t)\delta_\Delta(t-\tau)dt \approx \int_{\tau}^{\tau+\Delta} x(\tau)\delta_\Delta(t-\tau)dt = \Delta\frac{1}{\Delta}x(\tau) = x(\tau)$$

Spektrální funkce jednotkového impulsu

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t-\tau)e^{-j\omega t}dt = e^{-j\omega\tau}$$



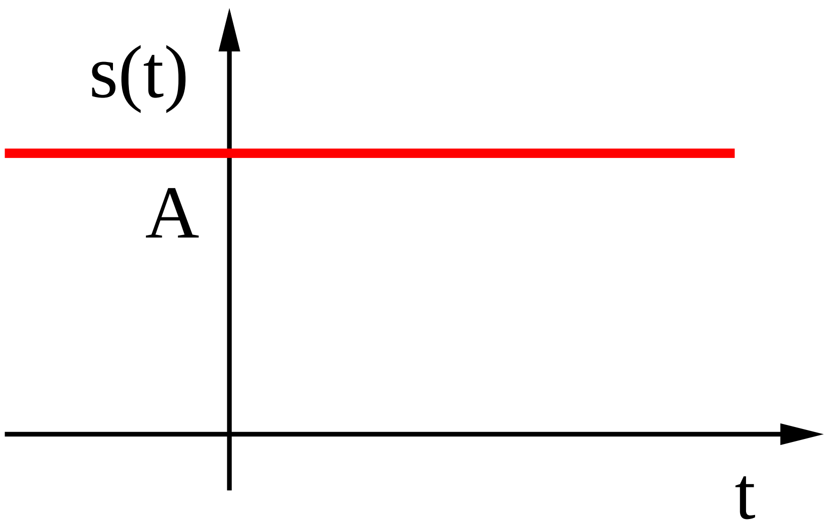


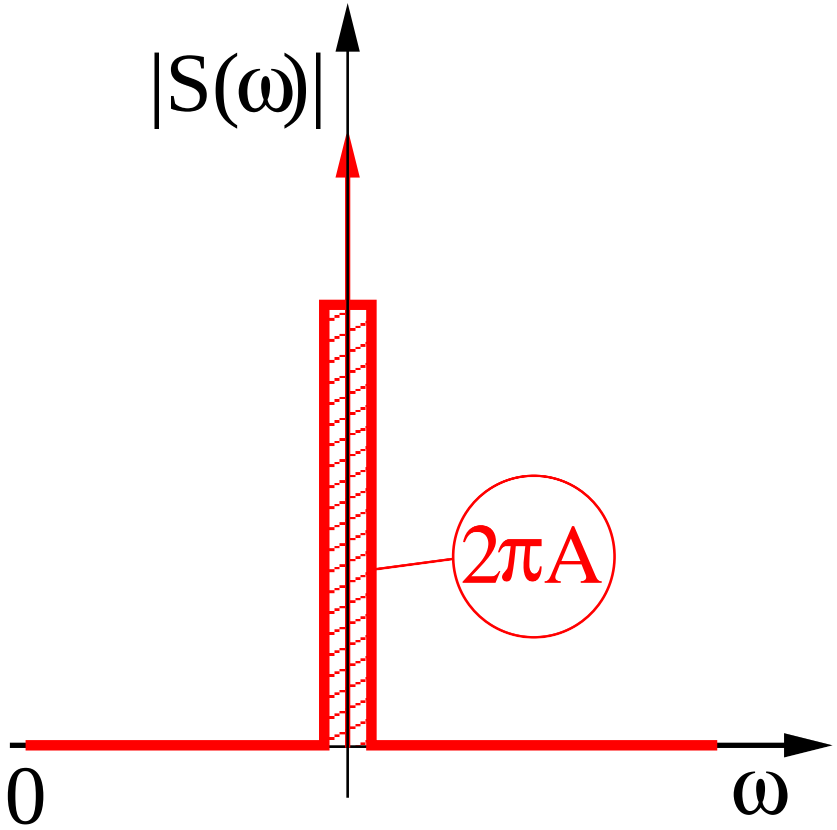
Stejnosměrný signál

$$X(j\omega) = 2\pi A\delta(\omega)$$

Dokážeme pomocí zpětné FT:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} 2\pi A \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega) e^{j\omega t} d\omega = A.$$





Periodický signál zapsaný pomocí FŘ

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk\omega_1 t}$$

Podívejme se nejprve, jak bude vypadat signál, jehož spektrální funkce je

$$X(j\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} 2\pi \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - \omega_0) e^{j\omega t} d\omega = \ldots$$

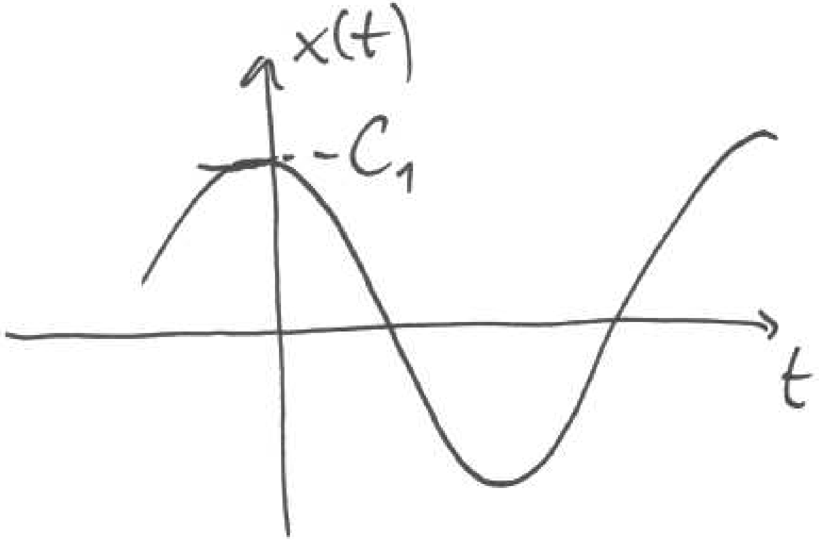
po změně proměnných:

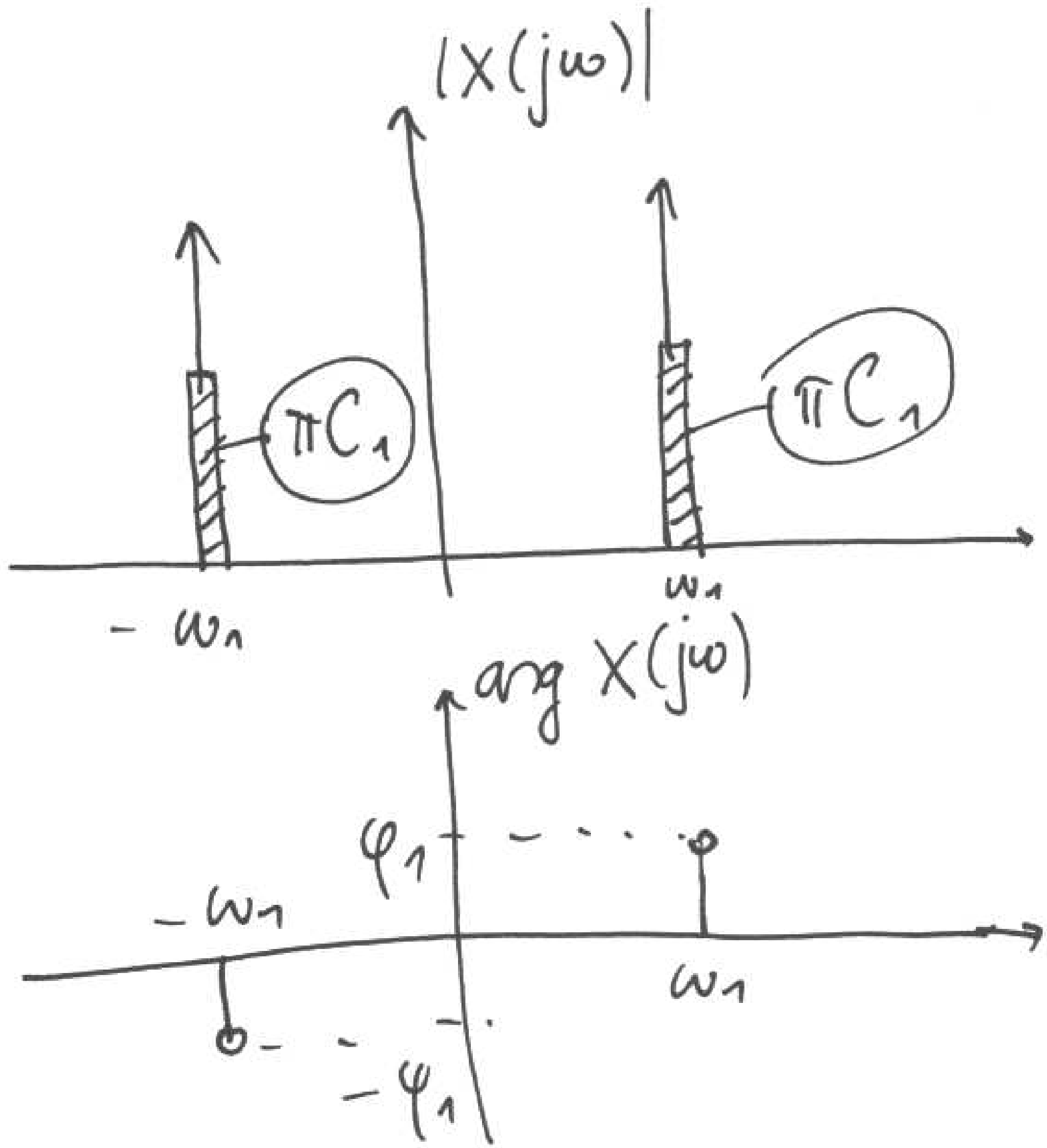
$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(r) e^{j(r+\omega_0)t} dr = e^{j\omega_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(r) e^{jrt} dr = e^{j\omega_0 t}$$

Je to komplexní exponenciála kroutící se na frekvenci ω_0. Pro FT periodického signálu zapsaného pomocí FŘ můžeme tedy psát:

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi c_k \delta(\omega - k\omega_1).$$

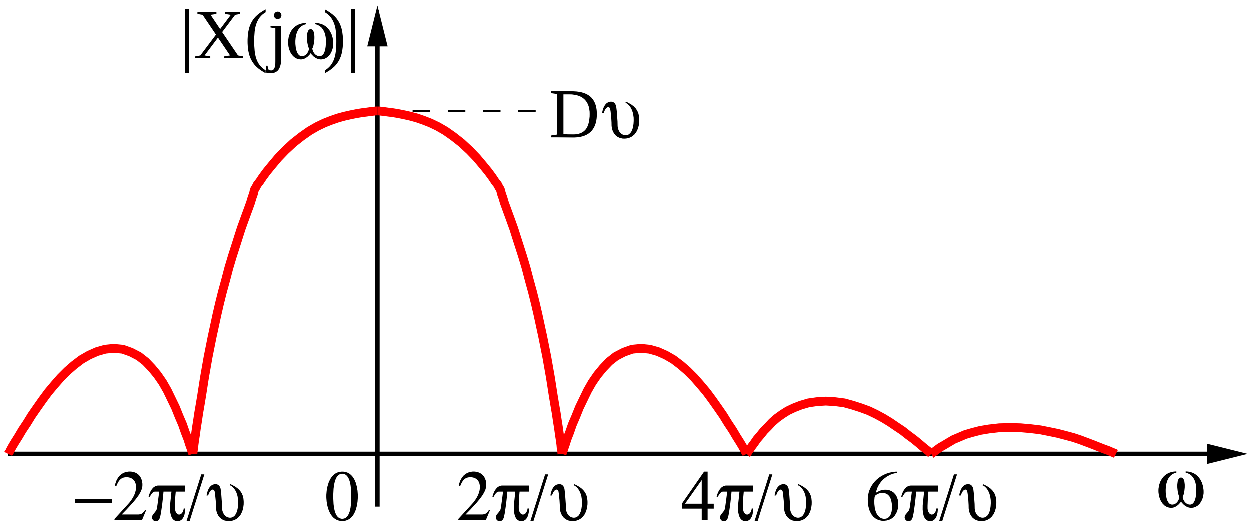
Příklad pro harmonický signál $x(t) = C_1 \cos(\omega_1 t + \phi_1) = c_{-1} e^{-j\omega_1 t} + c_1 e^{j\omega_1 t}$

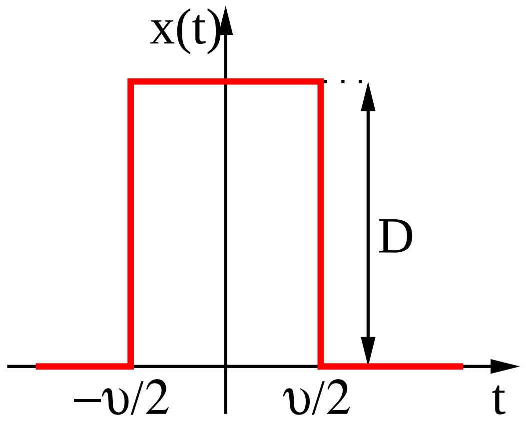


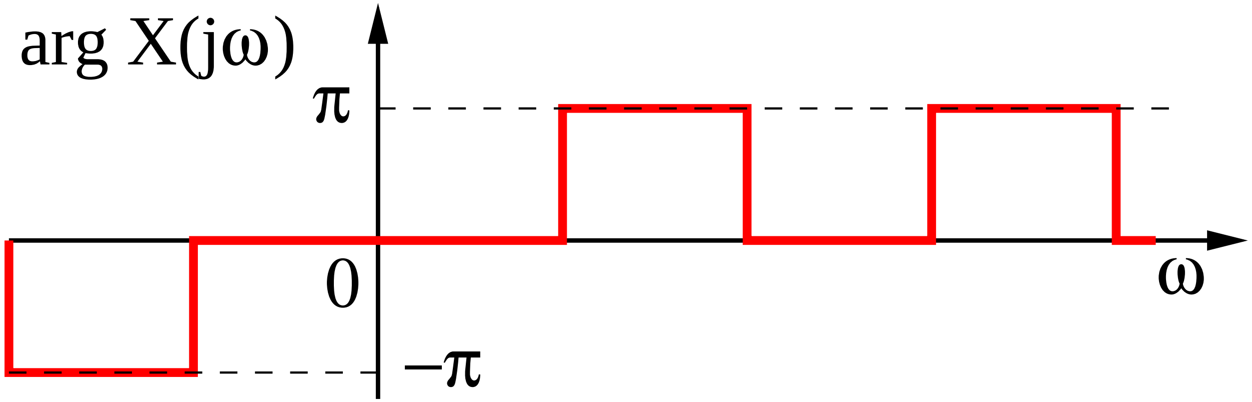


Obdélníkový impuls s využitím ŠP: $\int_{-b}^{b} e^{\pm jxy} dy = 2b \operatorname{sinc}(bx)$. Dosadíme $b = \frac{\vartheta}{2}$, $y = t$, $x = \omega$, obdržíme:

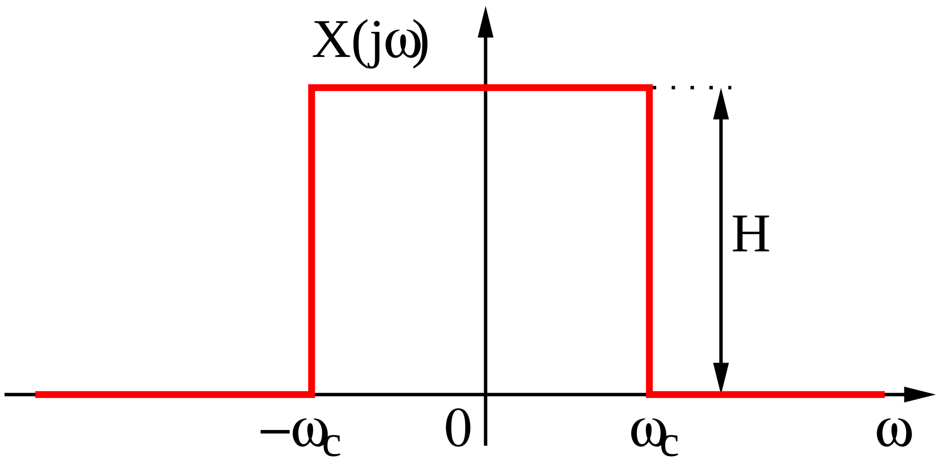
$$X(j\omega) = D \int_{-\frac{\vartheta}{2}}^{+\frac{\vartheta}{2}} e^{-j\omega t} dt = D2\frac{\vartheta}{2}\operatorname{sinc}\left(\frac{\vartheta}{2}\omega\right) = D\vartheta\operatorname{sinc}\left(\frac{\vartheta}{2}\omega\right)$$

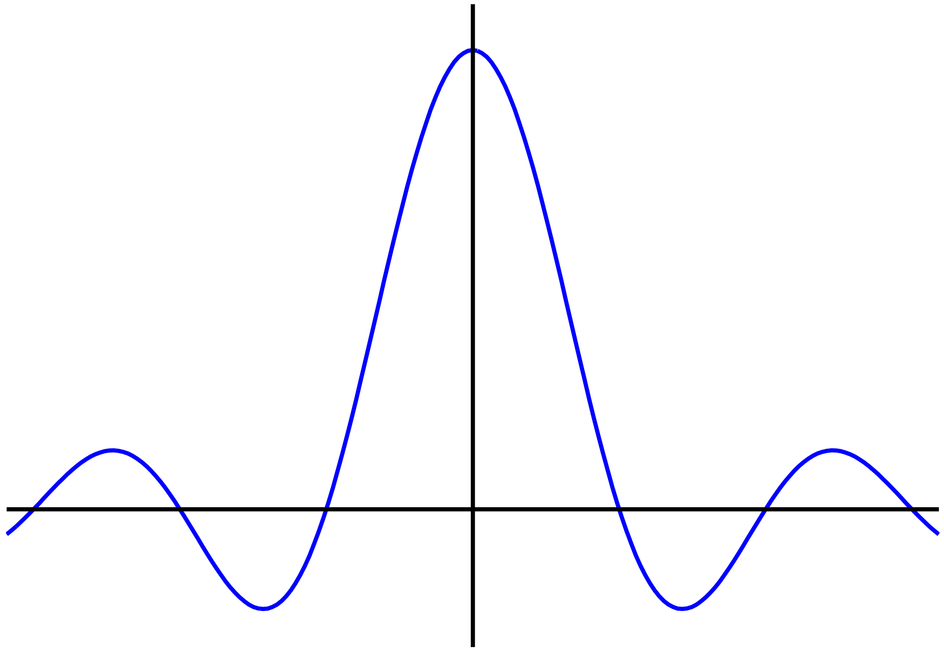






Zpětný obraz obdélníkové spektrální funkce





$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{+j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} He^{+j\omega t}d\omega = \frac{H}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{+j\omega t}d\omega =$$

$$= \frac{H}{2\pi}2\omega_c \mathrm{sinc}(\omega_c t) = \frac{H\omega_c}{\pi}\mathrm{sinc}(\omega_c t)$$

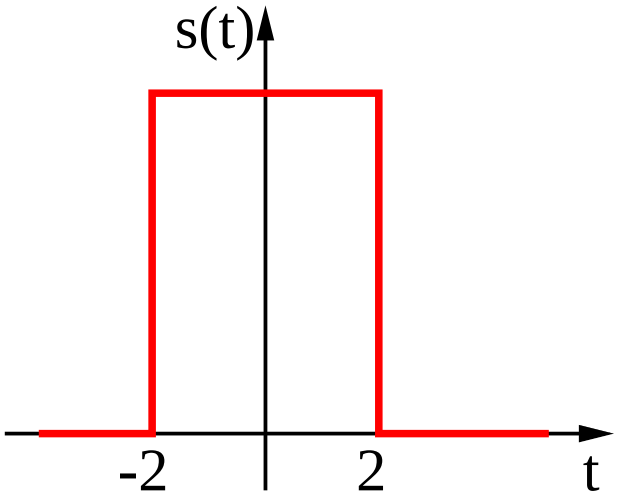
jaká je maximální hodnota signálu ? body, kde signál protíná časovou osu ?

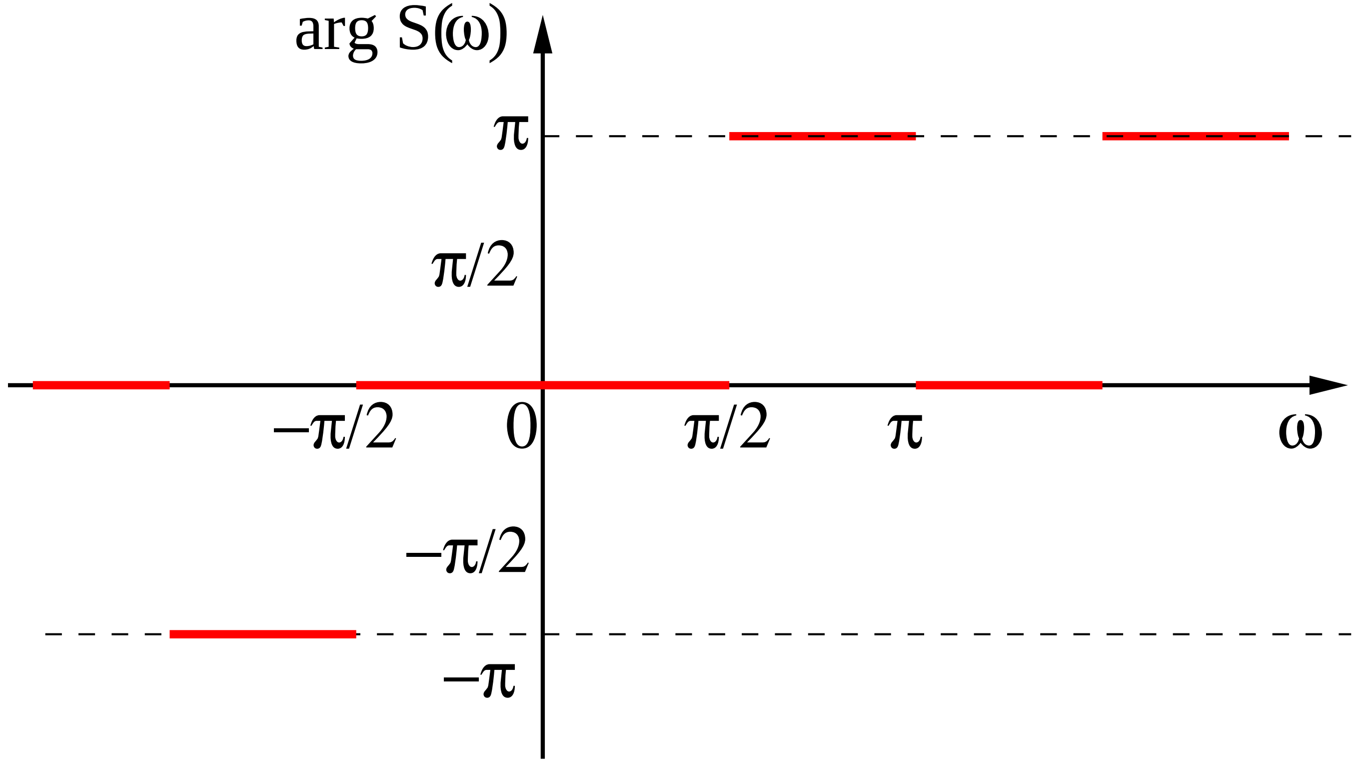
Poučky o spektrech aperiodických signálů

	$x(t)$	$X(j\omega)$
linearita	$ax_a(t) + bx_b(t)$	$aX_a(j\omega) + bX_b(j\omega)$
posunutí v čase	$x(t-\tau)$	$X(j\omega)e^{-j\omega\tau}$
změna časového měřítka	$s(mt) \quad m > 0$	$\frac{1}{m}X\left(\frac{\omega}{m}\right)$
konvoluce	$x_1(t) \star x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau$	$X_1(j\omega)X_2(j\omega)$

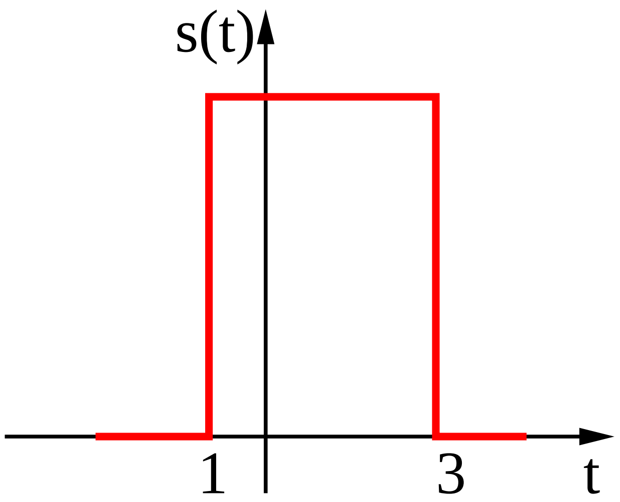
Posunutí

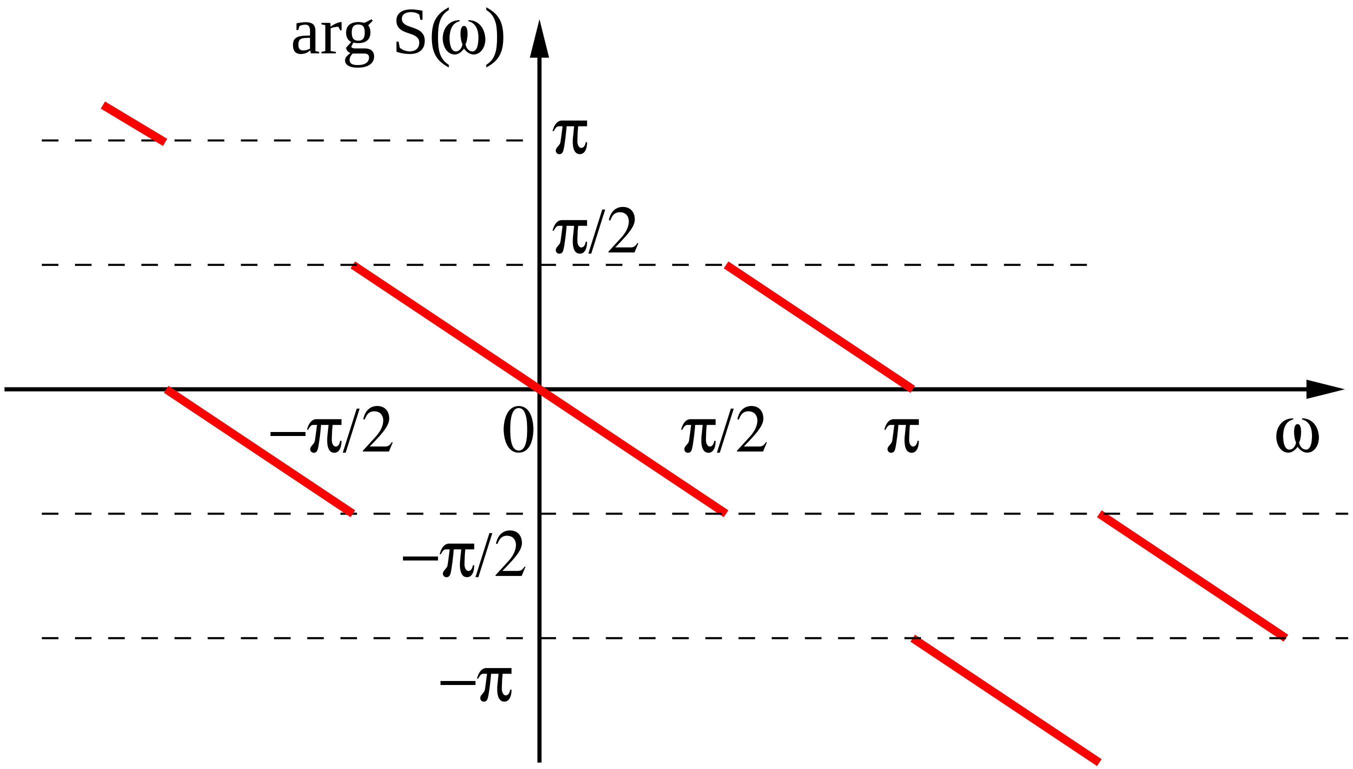
podobně jako u FŘ se bude měnit pouze **argument** spektrální funkce a to o $-\omega\tau$. Příklad:



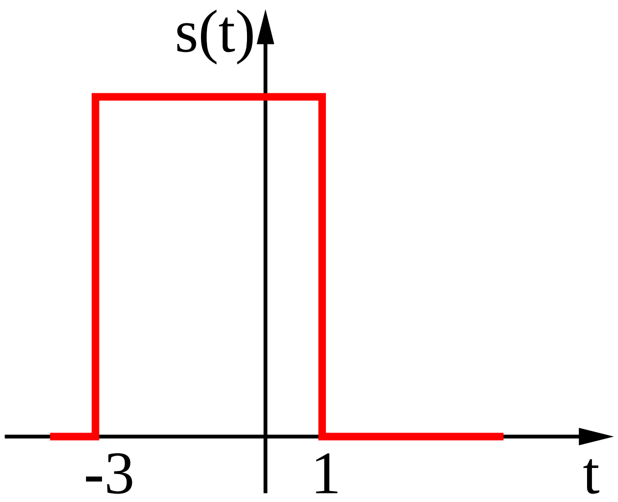


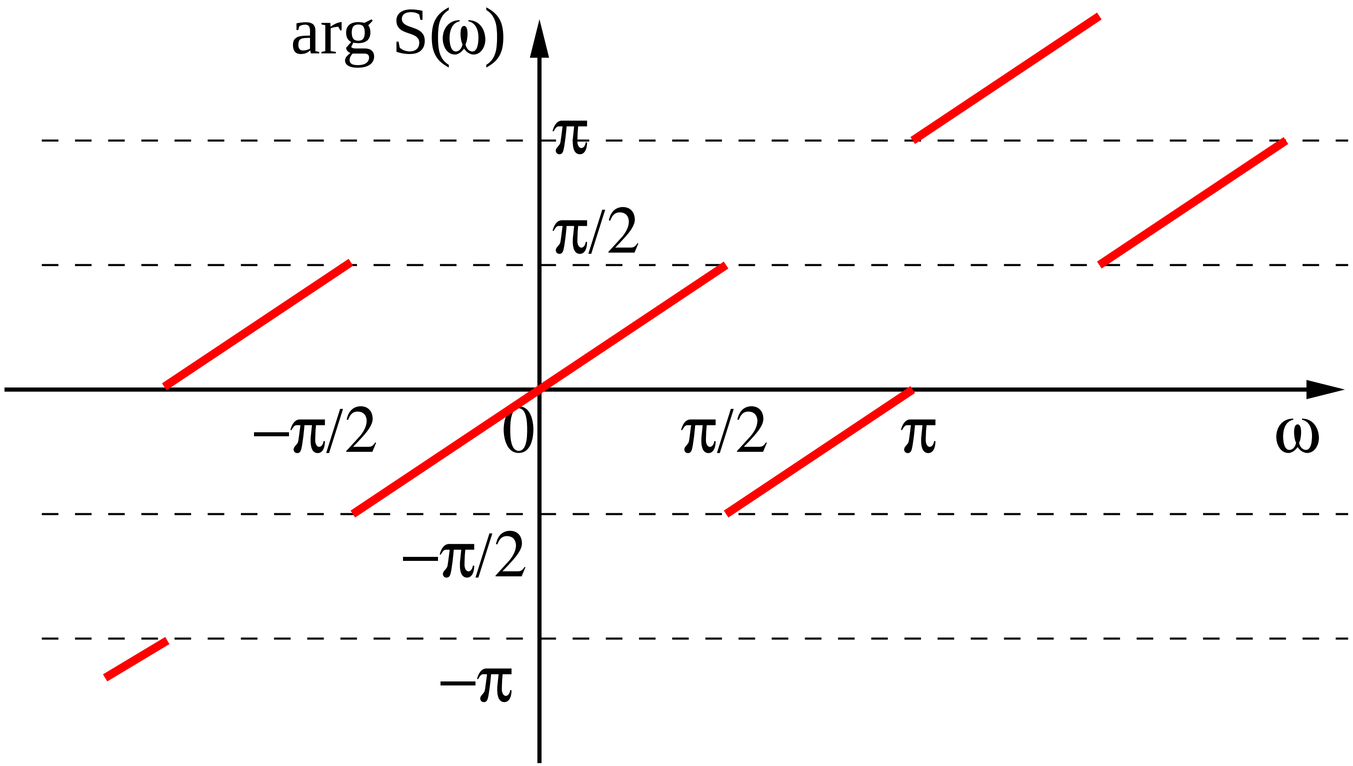
zpoždění o 1 s: $X(j\omega)$ násobena funkcí $e^{-j\omega}$, od argumentu se tedy bude odečítat ω:



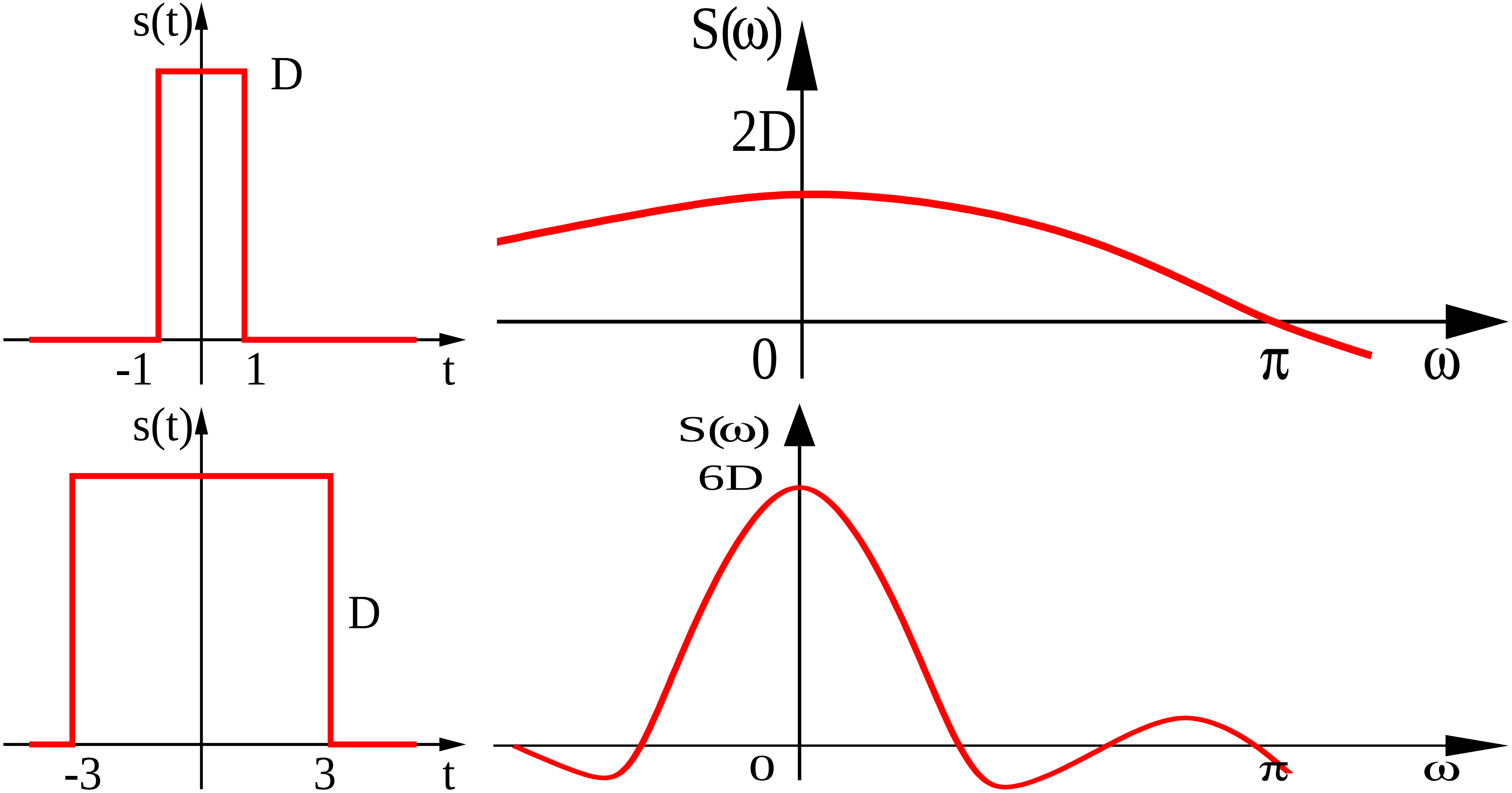


předběhnutí o 1 s: $X(j\omega)$ násobena funkcí $e^{j\omega}$, k argumentu se tedy bude přičítat ω:





Příklad změny časového měřítka

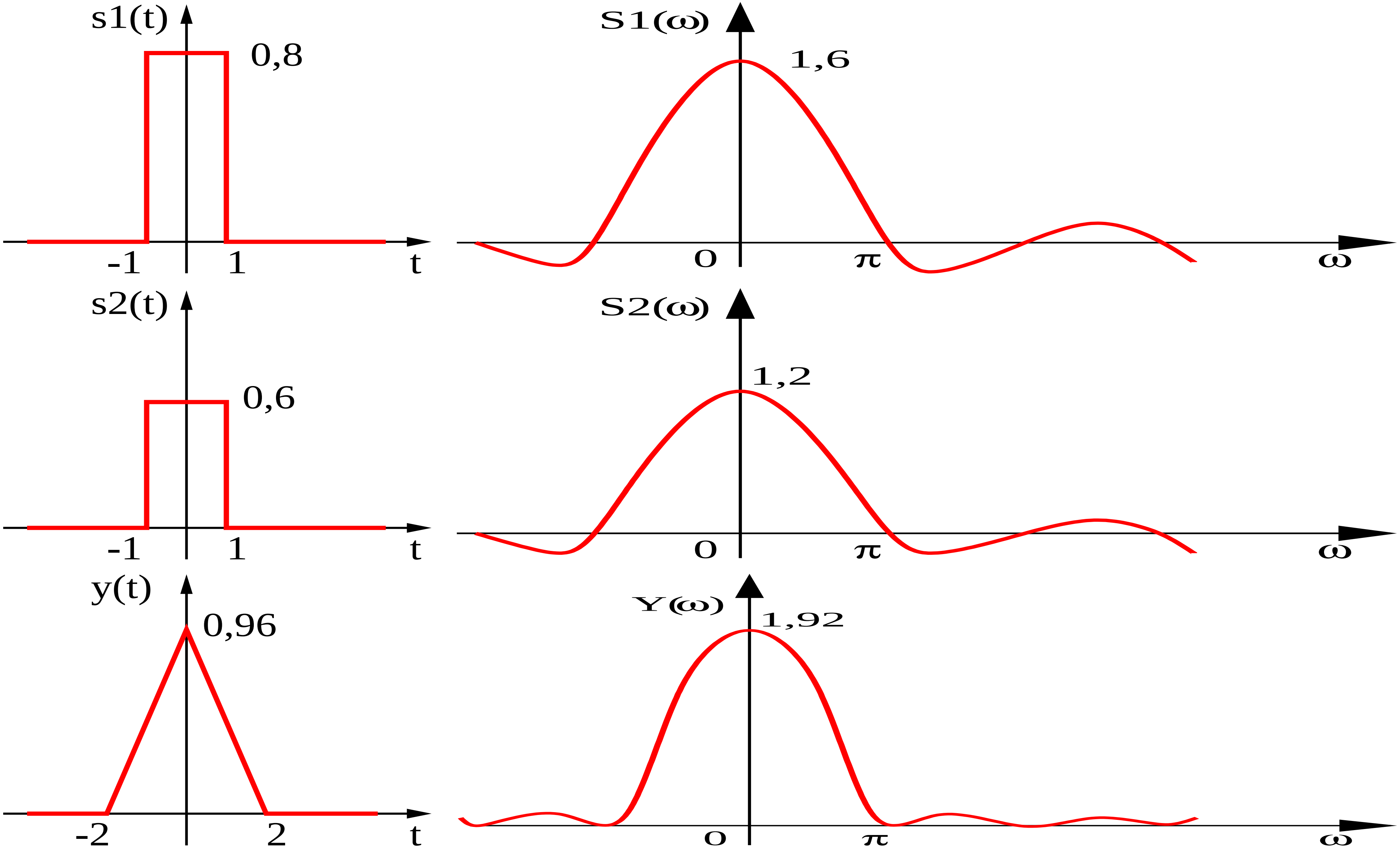


Poučka o spektru konvoluce

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau\right]e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)\left[\int_{-\infty}^{\infty} x_2(t-\tau)e^{-j\omega t}dt\right]d\tau =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)\left[X_2(j\omega)e^{-j\omega\tau}\right]d\tau = X_2(j\omega)\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = X_1(\omega)X_2(\omega)$$

Příklad spektra konvoluce



Parsevalův teorém - celková energie signálu pomocí spektrální funkce

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t} d\omega \right] dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) \underbrace{\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j\omega t} dt \right]}_{X(-j\omega)} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)X(-j\omega)d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} L_d(\omega)d\omega$$

$L_d(\omega)$ nazýváme **(dvoustranná) spektrální hustota energie**

$$L_d(\omega) = \frac{|X(j\omega)|^2}{2\pi}$$