Diskrétní signály a jejich frekvenční analýza.

Jan Černocký

ÚPGM FIT VUT Brno, `cernocky@fit.vutbr.cz`

- opakování – základy o diskrétních signálech.
- periodické a harmonické posloupnosti
- operace s diskrétními signály
- konvoluce
- Fourierova transformace s diskrétním časem
- Diskrétní Fourierova řada

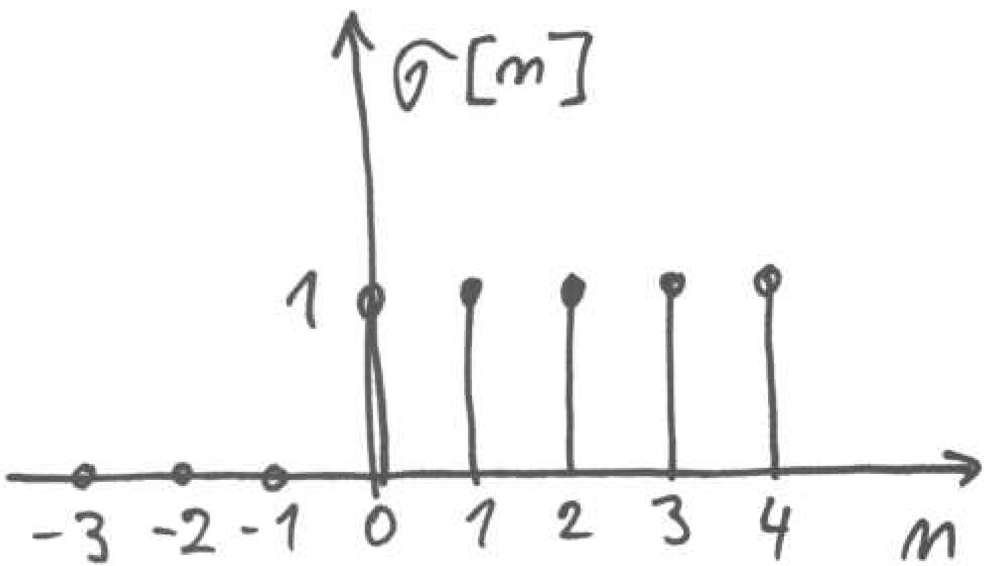
$\boxed{\textbf{Vzorkovaný signál} \Rightarrow \textbf{diskrétní signál}}$

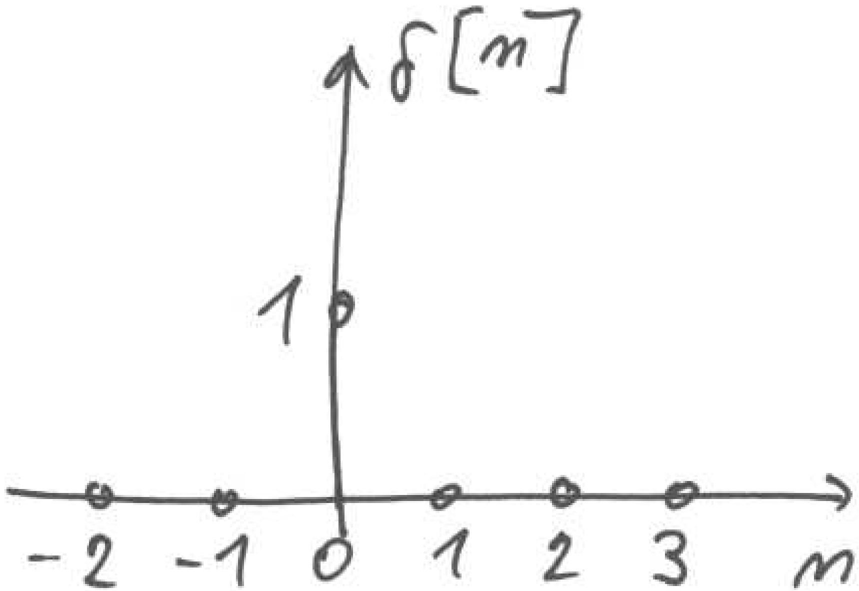
při vzorkování bereme v úvahu pouze hodnoty signálu pro násobky vzorkovací periody T: $x(nT), \quad nT = \ldots - 2T, -T, 0, T, 2T, 3T, \ldots$ U diskrétního signálu zapomeneme na skutečný čas a vzorky pouze očíslujeme (matematicky jsme provedli normování času pomocí vzorkovací periody). Diskrétní čas n je pak prakticky jen počítadlo:
$x[n], \quad n = \ldots - 2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$
Proto diskrétní signály nazýváme často **posloupnosti** (posloupnosti hodnot).

Důležité diskrétní signály

Jednotkový skok a jednotkový impuls:

$$\sigma[n] = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad n \geq 0 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases} \qquad \delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad n = 0 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$





Periodické diskrétní signály

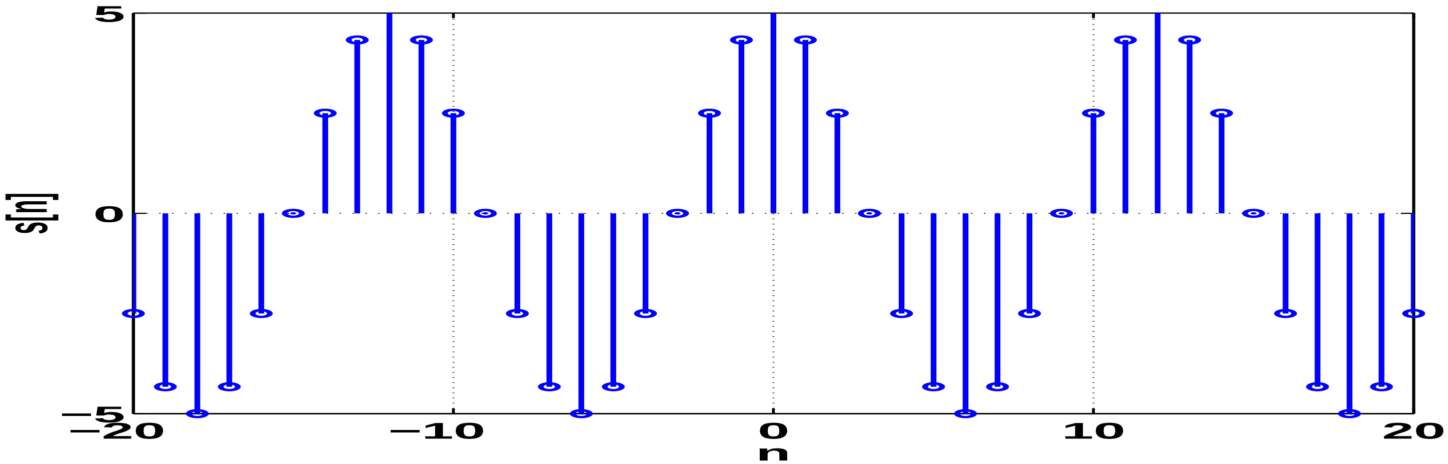
jejich chování se opakuje po N vzorcích, nejmenší ze všech možných N značíme N_1 a nazýváme **základní perioda**.

Harmonické diskrétní signály (harmonické posloupnosti)

$$x[n] = C_1 \cos(\omega_1 n + \phi_1) \tag{1}$$

- C_1 je kladná konstanta – amplituda.
- ω_1 je kladná konstanta – úhlový nebo kruhový kmitočet, který je **normovaný**. Jelikož je n bezrozměrné, je zde jednotka ω_1 pouze [rad]. Všimněte si, že tuto normovanou kruhovou frekvenci nijak nepoznáte od její kamarádky ω_1 se spojitým časem – v minulé přednášce jsme sice pro normované veličiny používali ω_1', ale to bylo výjimečné – ve skutečnosti apostrofy nikde nenajdete. Pomůcka: je-li vedle ω opravdový čas (např. $\cos(\omega_1 t)$), je to skutečná kruhová frekvence. Pokud vidíte jen diskrétní čas (počítadlo) n (např. $\cos(\omega_1 n)$, jedná se o normovanou kruhovou frekvenci.
- ϕ_1 je počáteční fáze [rad]. Hodnota signálu pro $n = 0$ je $x[0] = C_1 \cos \phi_1$.

Příklad: $x[n] = 5\cos(2\pi n/12)$, $\omega_1 = \pi/6$.



Se **základní periodou** harmonické posloupnosti máme drobný problém. Není možné ji vypočítat podobně jako u signálu se spojitým časem pomocí: $N_1 = \frac{2\pi}{\omega_1}$, protože by mohlo vyjít necelé číslo. N_1 jako počet vzorků musí být vždy celý. Musíme najít takové N_1, aby **platila podmínka periodicity**:

$$\cos\left[\omega_1(n + N_1)\right] = \cos \omega_1 n.$$

Víme, že základní perioda funkce $\cos$ je 2π a že podmínka bude splněna pouze pro rozdíl argumentů rovný celočíselnému násobku 2π:

$$\omega_1(n + N_1) - \omega_1 n = \omega_1 N_1 = k2\pi,$$

kde k je celé číslo takové, aby N_1 bylo nejmenší možné.

Vlastnosti harmonických posloupností

- **vztah se vzorkovaným signálem** $x[n] = C_1 \cos(\omega_1' n + \phi_1)$ odpovídá pro skutečný čas: $x(nT) = C_1 \cos(\omega_1 nT + \phi_1)$, kde ω_1' je na chvíli zase označení pro normovanou kruhovou frekvenci a ω_1 pro skutečnou. Jelikož hodnoty signálu musí být rovny, musí se rovnat i argumenty kosinu, z čehož odvodíme vztah pro výpočet normované frekvence:

$$\omega_1' = \omega_1 T \quad \text{a tedy} \quad \omega_1' = \frac{\omega_1}{Fs}.$$

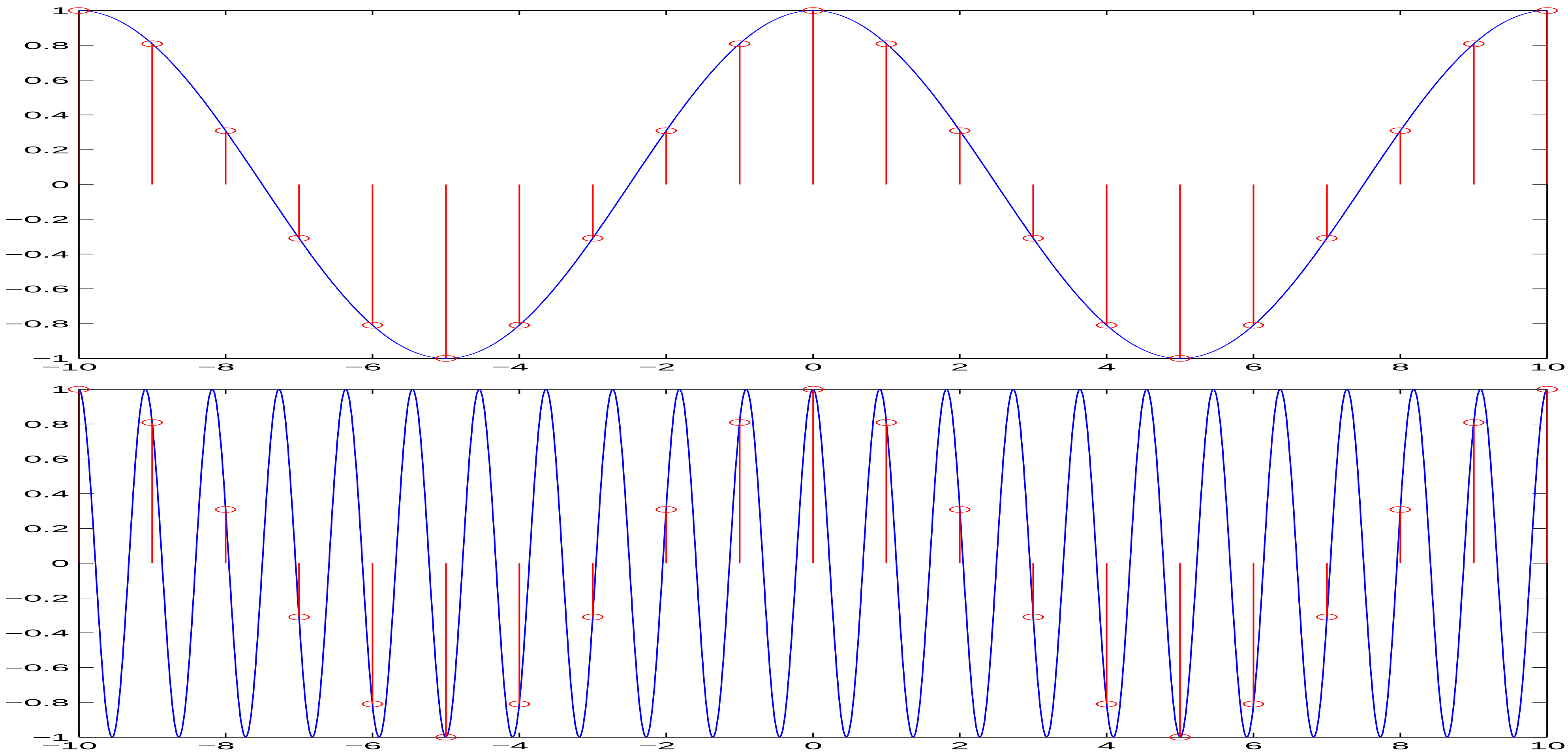
  Normujeme vzorkovací frekvencí.

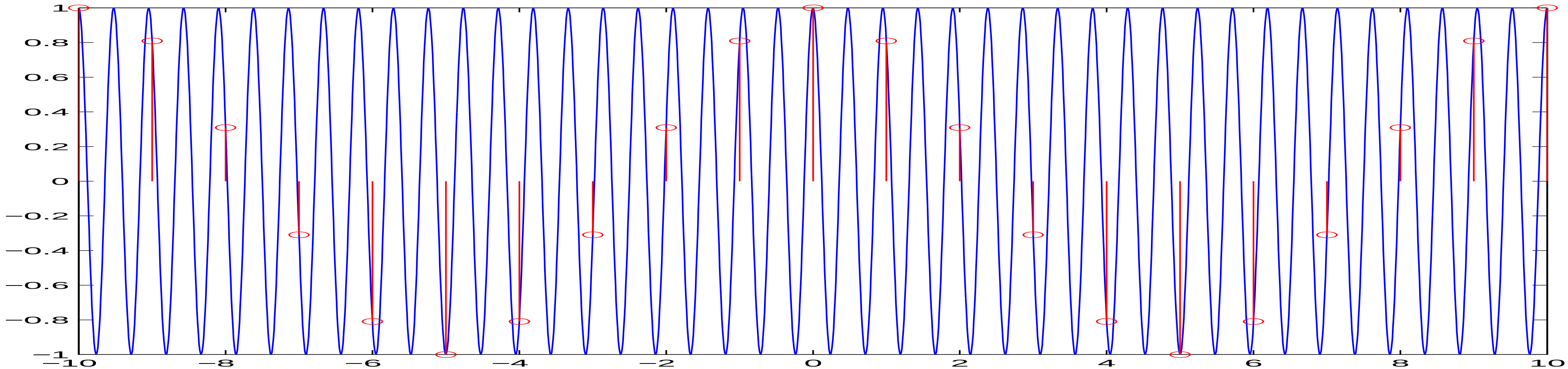
- u kosinusovek se spojitým časem jsme předpokládali, že pokud budou mít 2 kosinusovky různé ω, budou různé. Jak to bude s diskrétními kosinusovkami ? Víme, že funkce $\cos$ je periodická s 2π (normované frekvence už budou zase bez apostrofu...). Zkusíme k normované frekvenci přičíst libovolný násobek 2π:

$$\cos[(\omega_1 + 2k\pi)n + \phi_1] = \cos[\omega_1 n + 2k\pi n + \phi_1].$$

  $2k\pi n$ je ovšem násobek 2π, proto bude kosinusovka pro $\omega_1 + 2k\pi$ přesně stejná jako pro ω_1.

Jak je to možné:





- jelikož $\cos$ je **funkce sudá** bude pro kosinusovky bez počáteční fáze platit:

$$\cos(\omega_1 n) = \cos(-\omega_1 n),$$

a tedy i

$$\cos(\omega_1 n) = \cos[(-\omega_1 + k2\pi)n].$$

Exponenciální posloupnost

$$x[n] = e^{j\omega_1 n}$$

Je také stejná pro všechny kruhové frekvence $\omega_1 + 2k\pi$, protože

$$x[n] = e^{j(\omega_1+2k\pi)n} = e^{j(\omega_1 n+2k\pi n)} = e^{j\omega_1 n} e^{j2k\pi n} = e^{j\omega_1 n}$$

$e^{j2k\pi n}$ je totiž vždy 1.

Vyjádření harmonické posloupnosti pomocí dvou exponenciálních

Podobně, jako tomu bylo u spojitých signálů, můžeme pomocí vzorečku:

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

Vyjádřit harmonickou posloupnost pomocí sumy dvou komplexních exponenciál s koeficienty:

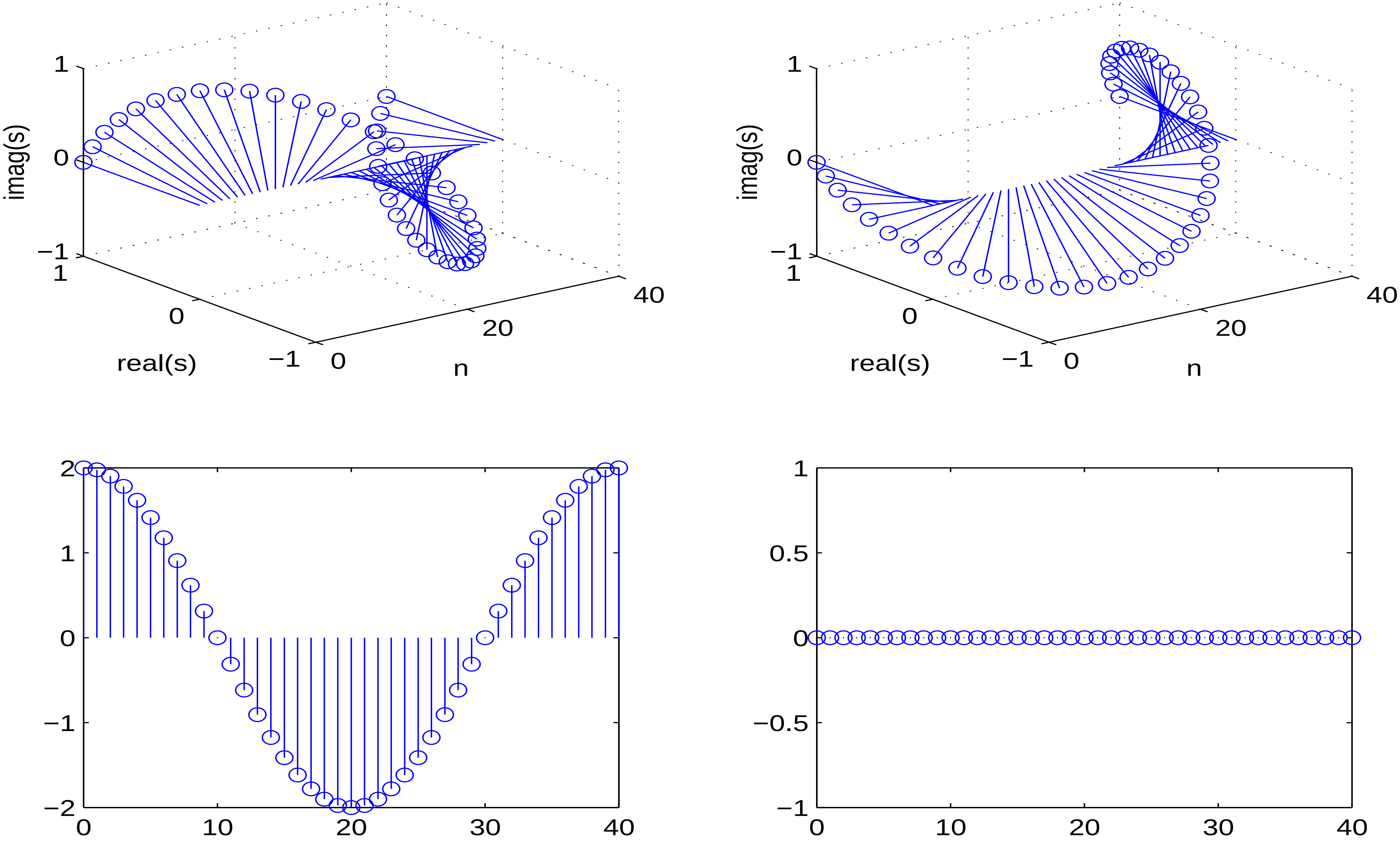
$$x[n] = C_1 \cos(\omega_1 n + \phi_1) = c_1 e^{j\omega_1 n} + c_{-1} e^{-j\omega_1 n}$$

kde pro vztah koeficientů c_1 a c_{-1} s parametry kosinusovky platí naprosto stejná pravidla jako pro spojité signály:

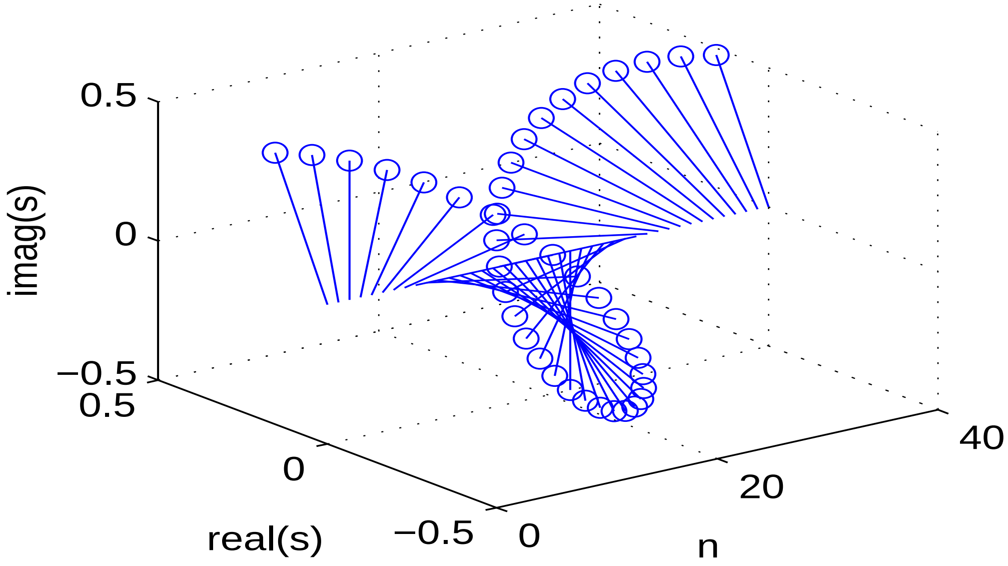
$$|c_1| = |c_{-1}| = \frac{C_1}{2} \qquad \arg c_1 = -\arg c_{-1} = \phi_1,$$

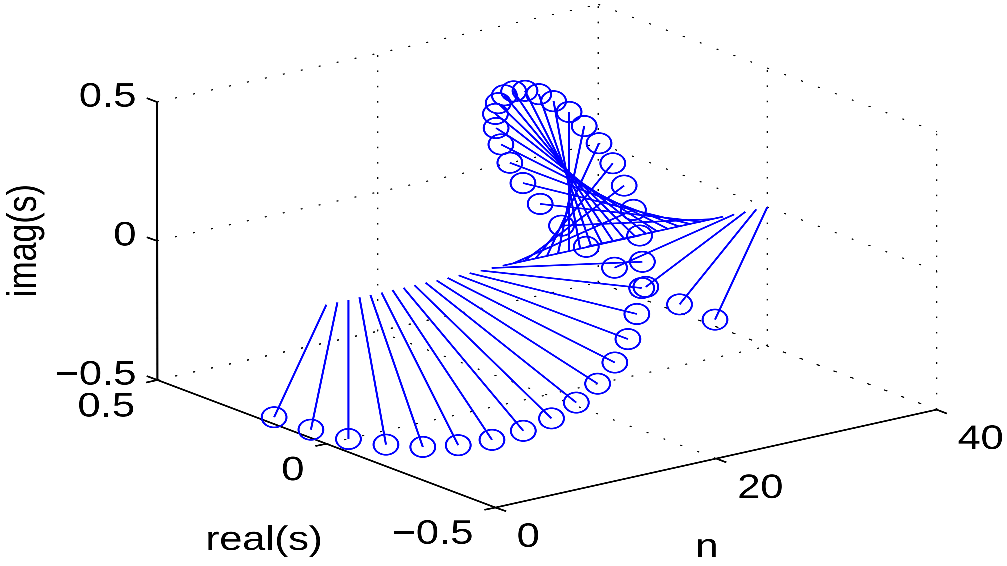
takže c_1 a c_{-1} jsou komplexně sdružené (stejné absolutní hodnoty, opačné fáze). Koeficienty c_1 a c_{-1} opět zařizují velikost a "předtočení" komplexních exponenciál.

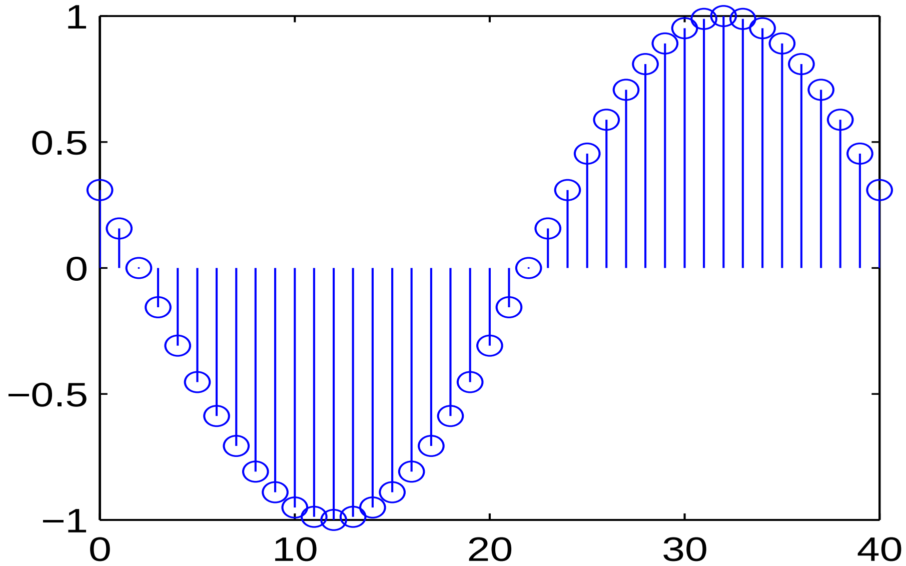
Příklad 1.: $\omega_1 = \frac{2\pi}{40}$, $c_1 = c_{-1} = 1$, $x[n] = 2\cos\frac{2\pi}{40}n$.

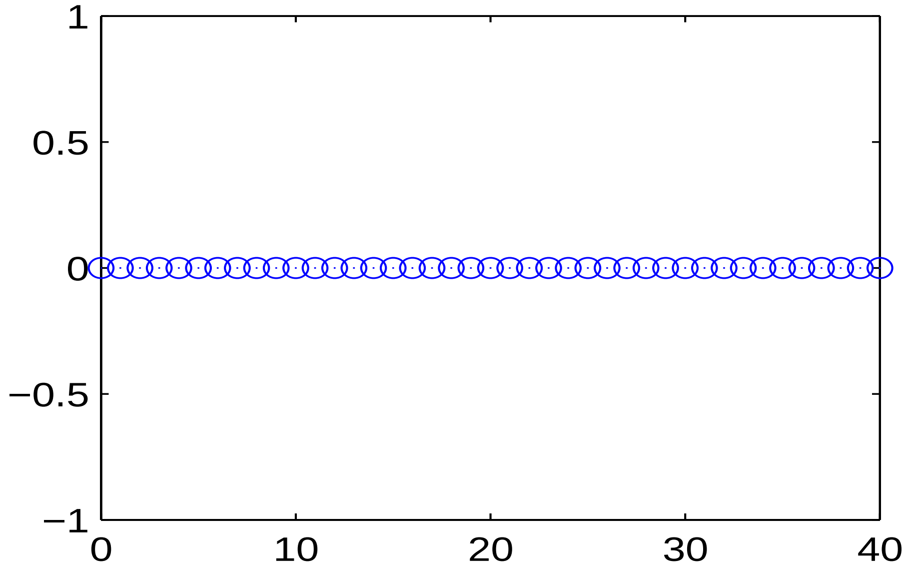


Příklad 2.: $\omega_1 = \frac{2\pi}{40}$, $c_1 = 0.5e^{j0.4\pi}$, $c_{-1} = 0.5e^{-j0.4\pi}$, $x[n] = \cos(\frac{2\pi}{40}n + 0.4\pi)$.









OPERACE S DISKRÉTNÍMI SIGNÁLY

Posloupnost délky N

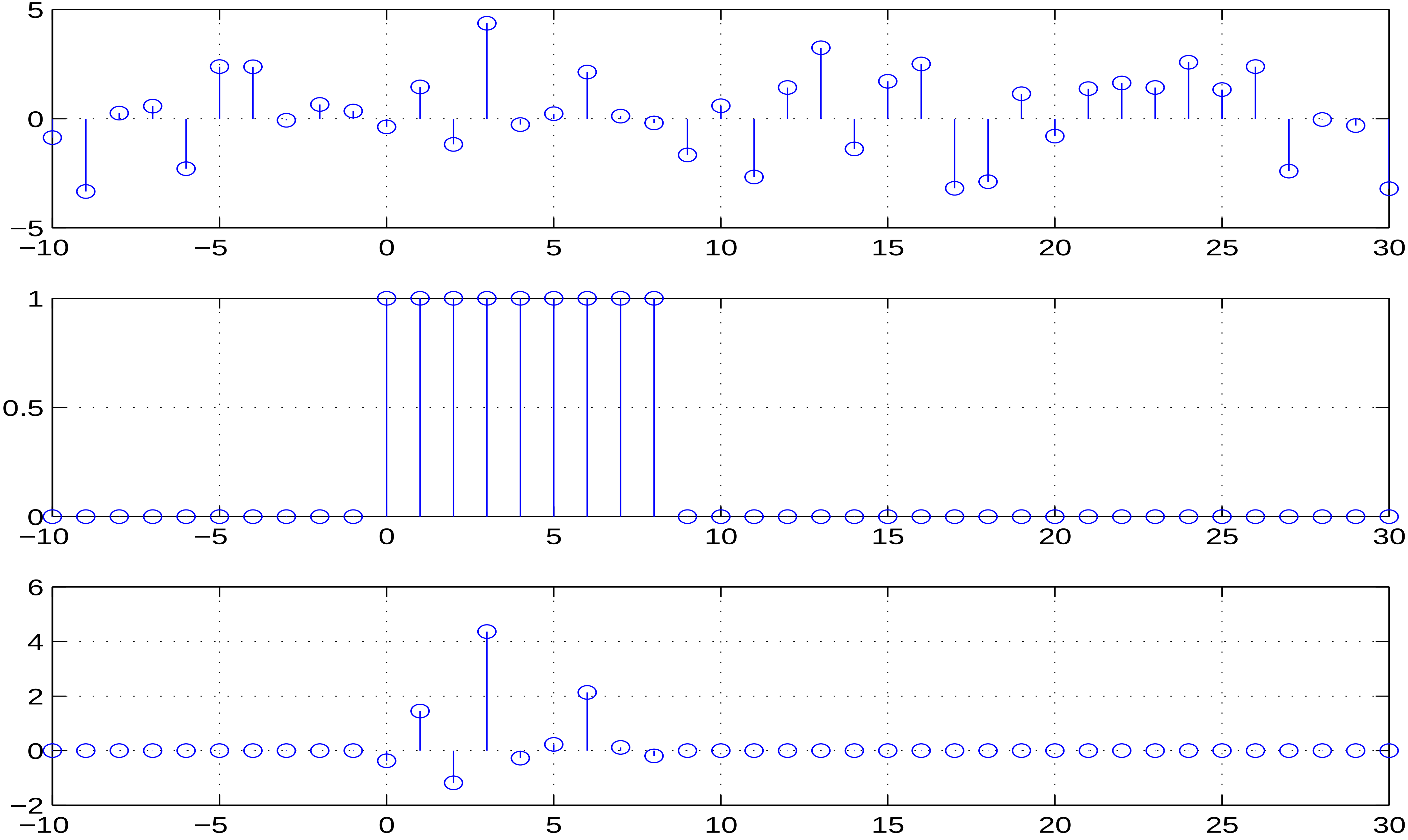
pro tuto posloupnost platí, že má významné prvky jen pro časy $n \in [0, N-1]$, jinde nuly.

Vykousnutí posloupnosti délky N

Posloupnost délky N vyrobíme z libovolného signálu s disk. časem tak, že jej pronásobíme **okénkovou funkcí** (krátce oknem) o délce N:

$$R_N[n] = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad n \in [0, N-1] \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

$$y[n] = x[n] R_N[n]$$


5
0
−5
−10
−5
0
5
10
15
20
25
30
1
0.5
0
−10
−5
0
5
10
15
20
25
30
6
4
2
0
−2
−10
−5
0
5
10
15
20
25
30

Periodizace posloupnosti délky N

Máme posloupnost $x[n]$ délky N se vzorky od 0 do $N-1$ a chceme ji zperiodizovat – tj. nalepit ji nekonečněkrát za sebou. Matematicky to můžeme zrealizovat pomocí funkce **modulo**, která počítá zbytek po celočíselném dělení:

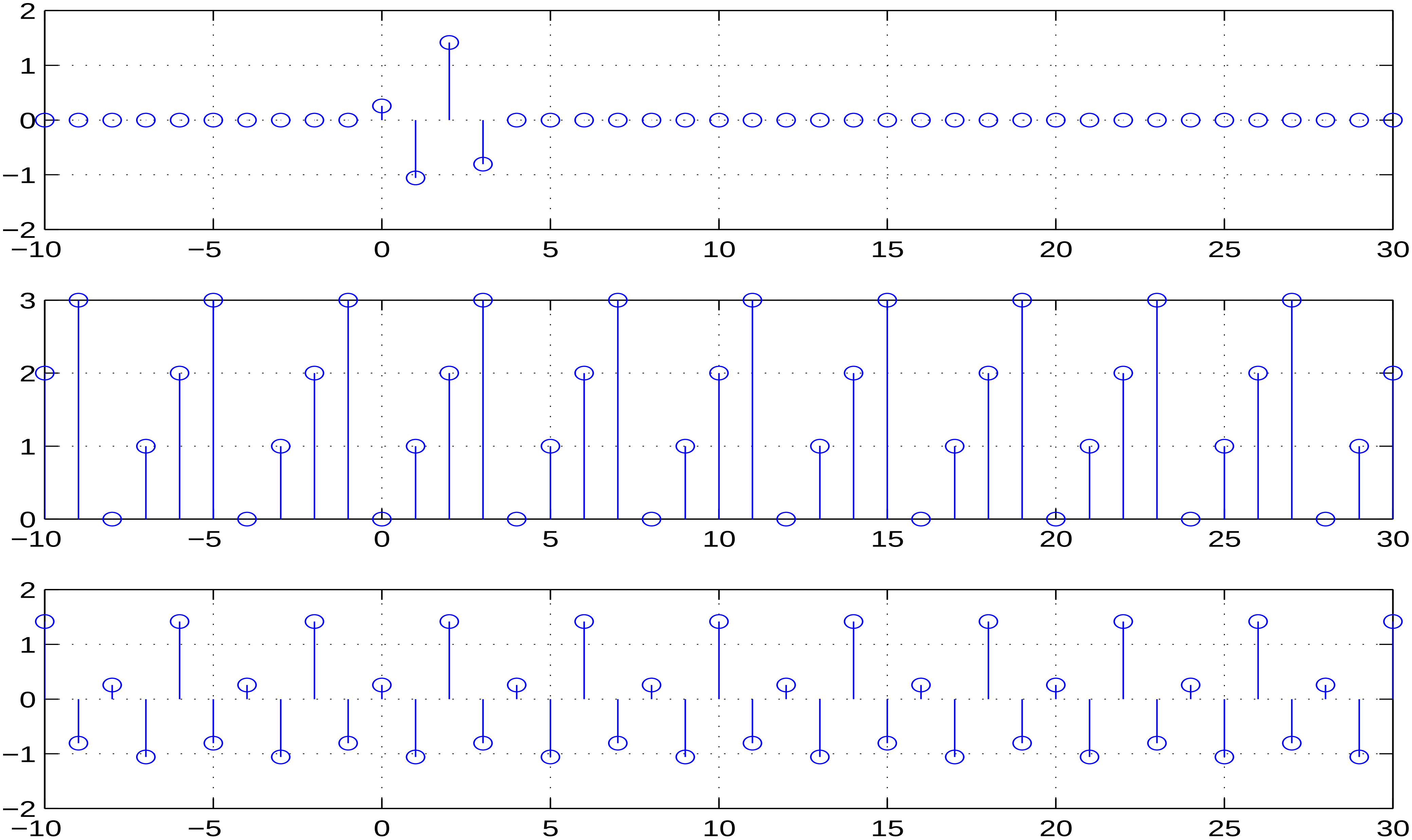
$$\tilde{x}[n] = x[\mod_N n]$$

Jak je možné, že to funguje ?

Příklad: posloupnost má délku 4, zperiodizujte ji.

Vyhodnotíme-li funkci $\mod_4 n$, dostaneme:

n	...	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	...
$\mod_4 n$	...	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	...


2
1
0
−1
−2
−10
−5
0
5
10
15
20
25
30
3
2
1
0
−10
−5
0
5
10
15
20
25
30
2
1
0
−1
−2
−10
−5
0
5
10
15
20
25
30

Periodické posunutí posloupnosti délky N

zpozdí-li se diskrétní signál o počet vzorků m, můžeme to zapsat jako:

$$x[n] \longrightarrow x[n-m]$$

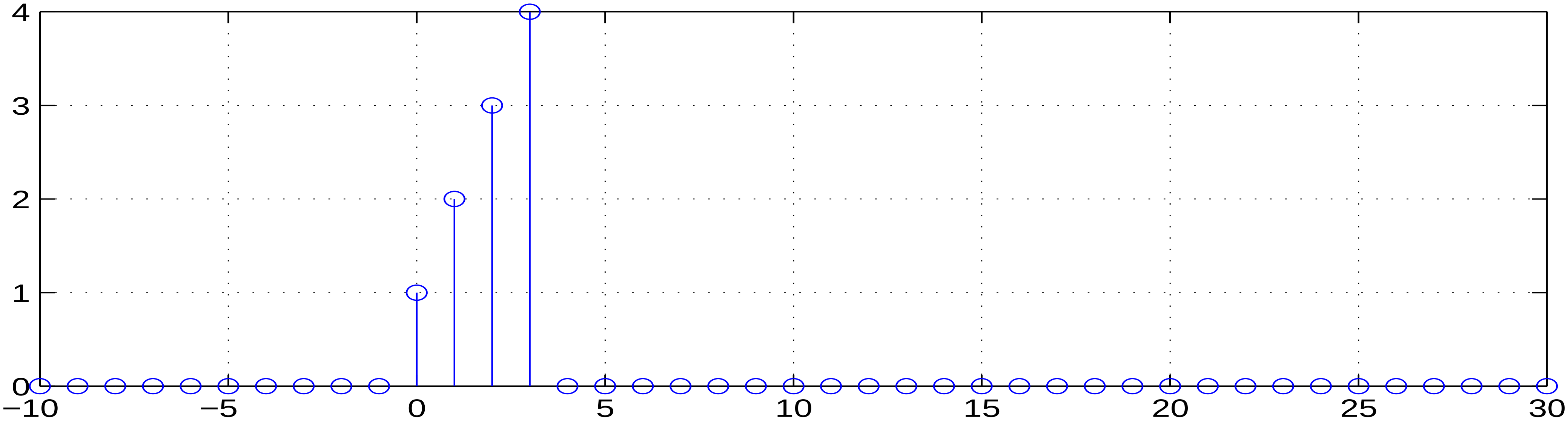
U **periodického posunutí** posunujeme posloupnost délky N, a na čas použijeme opět funkci modulo:

$$x[n] \longrightarrow x[\mod_N(n-m)]$$

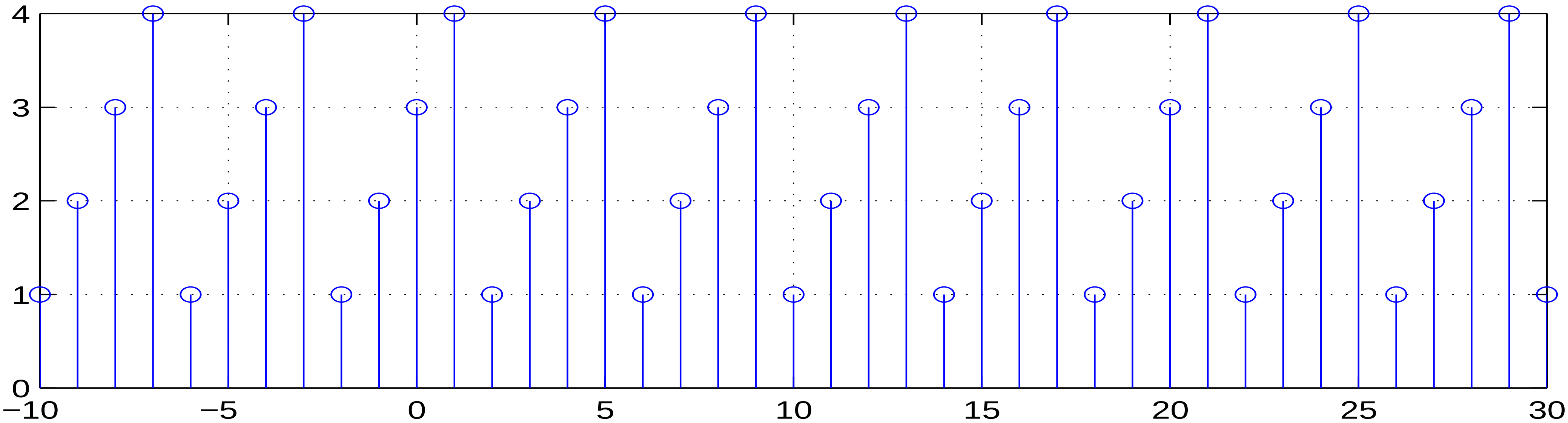
Příklad: posloupnost má délku 4, periodicky zpožďujeme o 2:

n	...	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	...
$\mod_4 n$	...	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	...
$\mod_4(n-2)$	...	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	...

operaci si můžeme představit tak, že se signál "pootočí" o m v bufferu délky N a pak se tento buffer začne opakovat.



4
3
2
1
0
−10
−5
0
5
10
15
20
25
30



4
3
2
1
0
−10
−5
0
5
10
15
20
25
30

Kruhové posunutí posloupnosti délky N

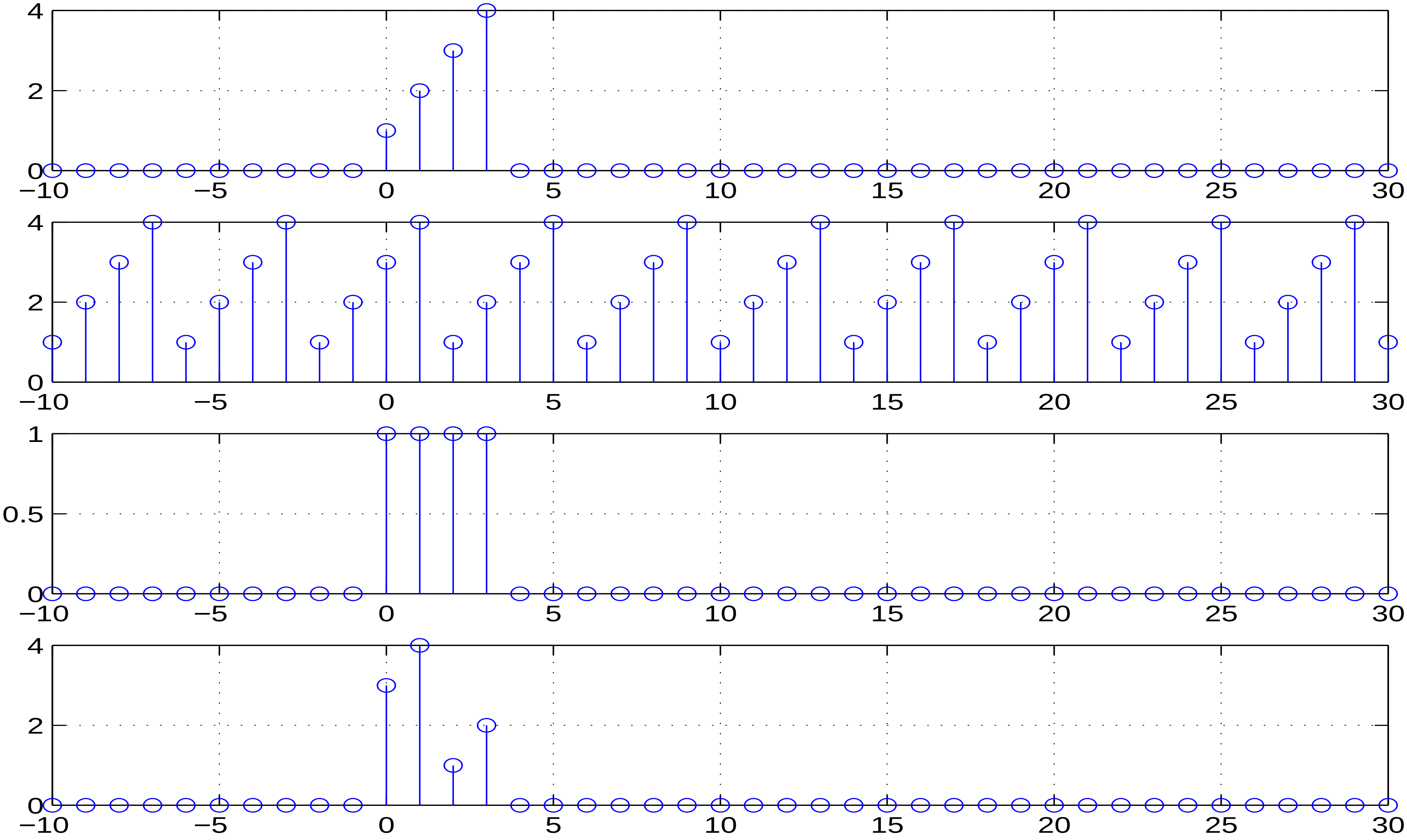
je podobné jako periodické, ale výsledkem není periodická posloupnost. Z výsledku periodického posunutí vybereme opět jen interval $n \in [0, N-1]$ okénkovou funkcí:

$$x[n] \longrightarrow R_N(n)x[\mod{}_N(n-m)]$$

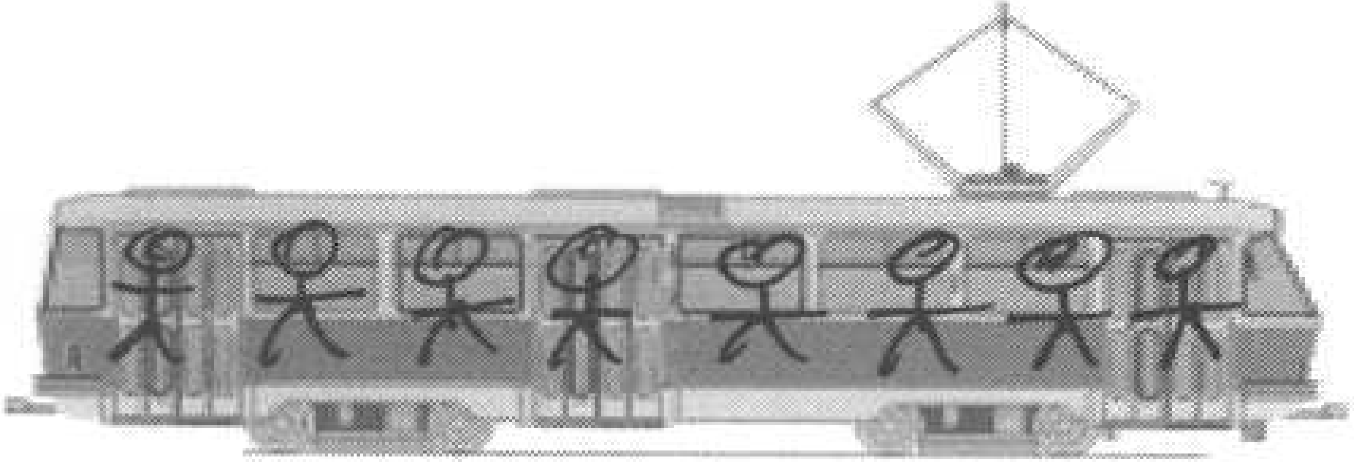
operaci si můžeme představit jako **šalinu plnou lidí**, které se snažíme posunout doprava o m. Z předních dveří samozřejmě vypadne m nešťastníků, ti ale hbitě vůz oběhnou a nastoupí opět zadními dveřmi. V šalině je stále stejný počet lidí, ale kruhově se posunuli.

Příklad: posloupnost má délku 4, kruhově zpožďujeme o 2:

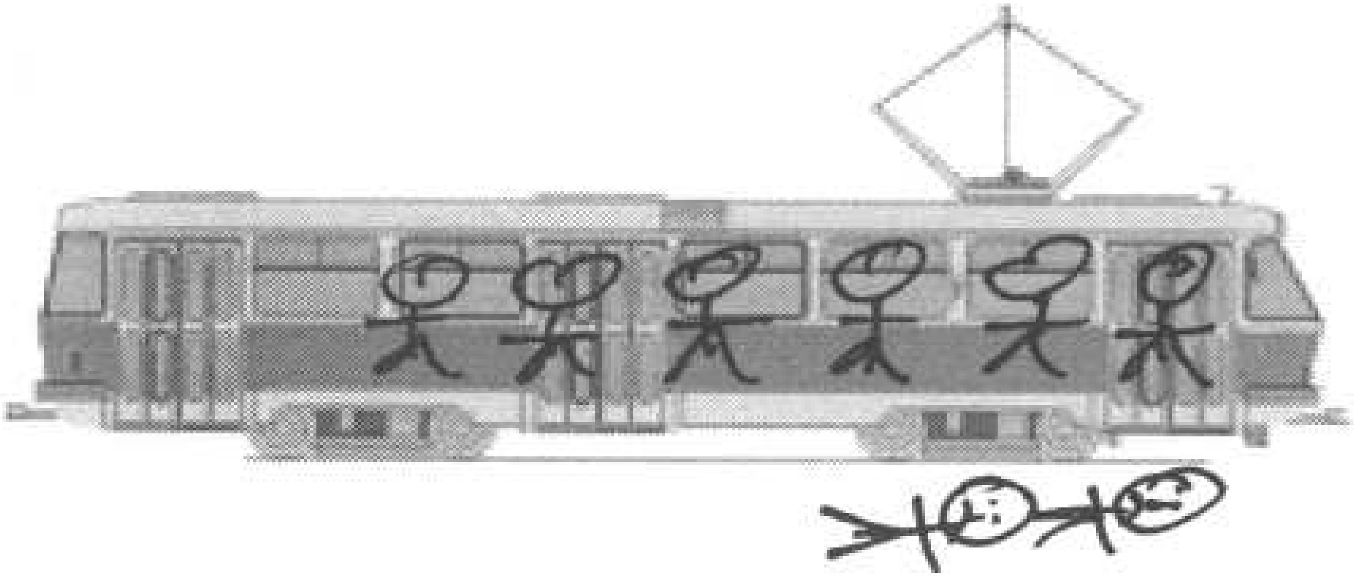
n	...	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	...
$\mod{}_4 n$	...	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	...
$\mod{}_4(n-2)$	...	1	2	3	0	1	2	3	0	1	2	3	0	1	...
$R_4[n] \mod{}_4(n-2)$	...	-	-	-	-	-	2	3	0	1	-	-	-	-	...

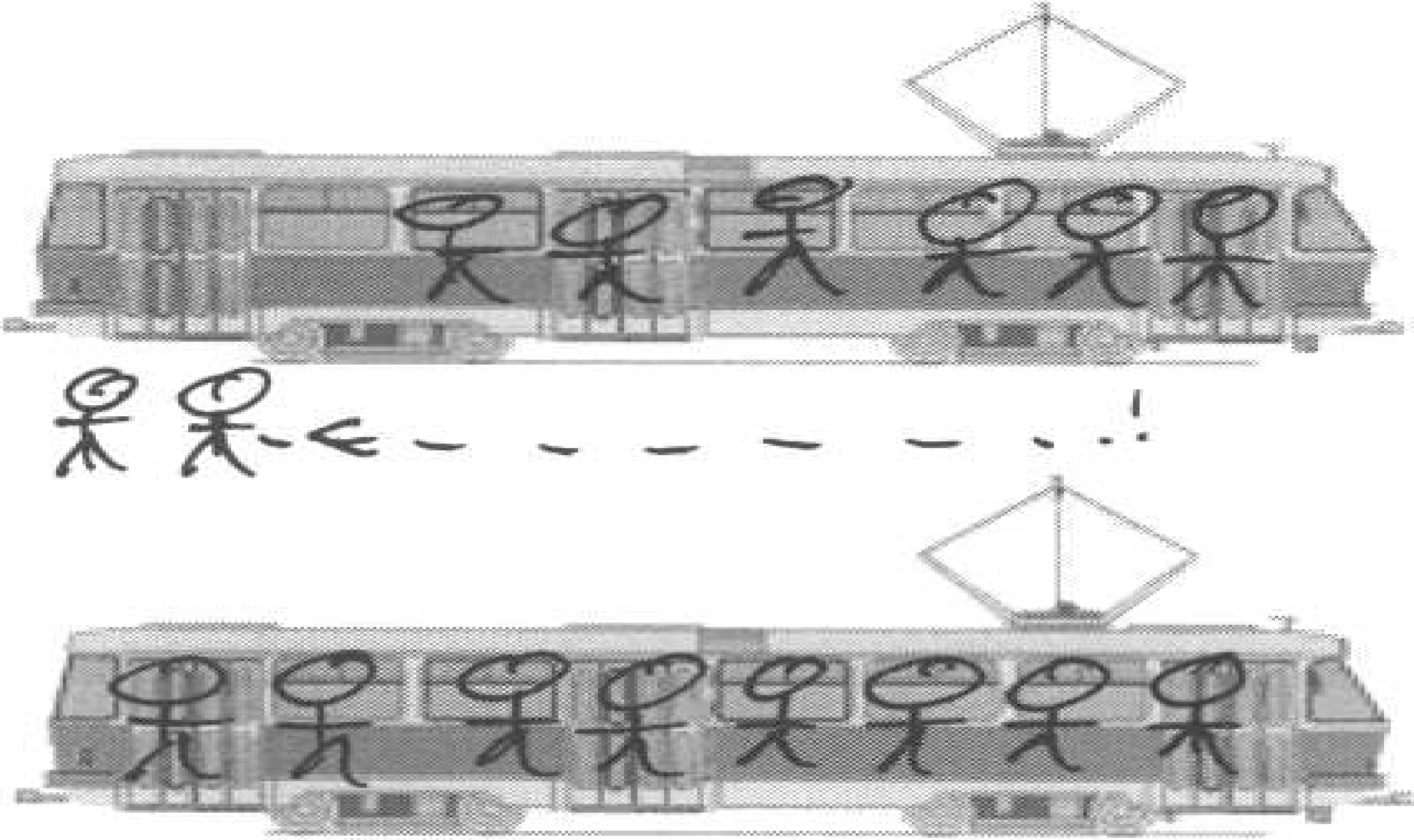


4
2
0
−10
−5
0
5
10
15
20
25
30
4
2
0
−10
−5
0
5
10
15
20
25
30
1
0.5
0
−10
−5
0
5
10
15
20
25
30
4
2
0
−10
−5
0
5
10
15
20
25
30



posun o 2 místa





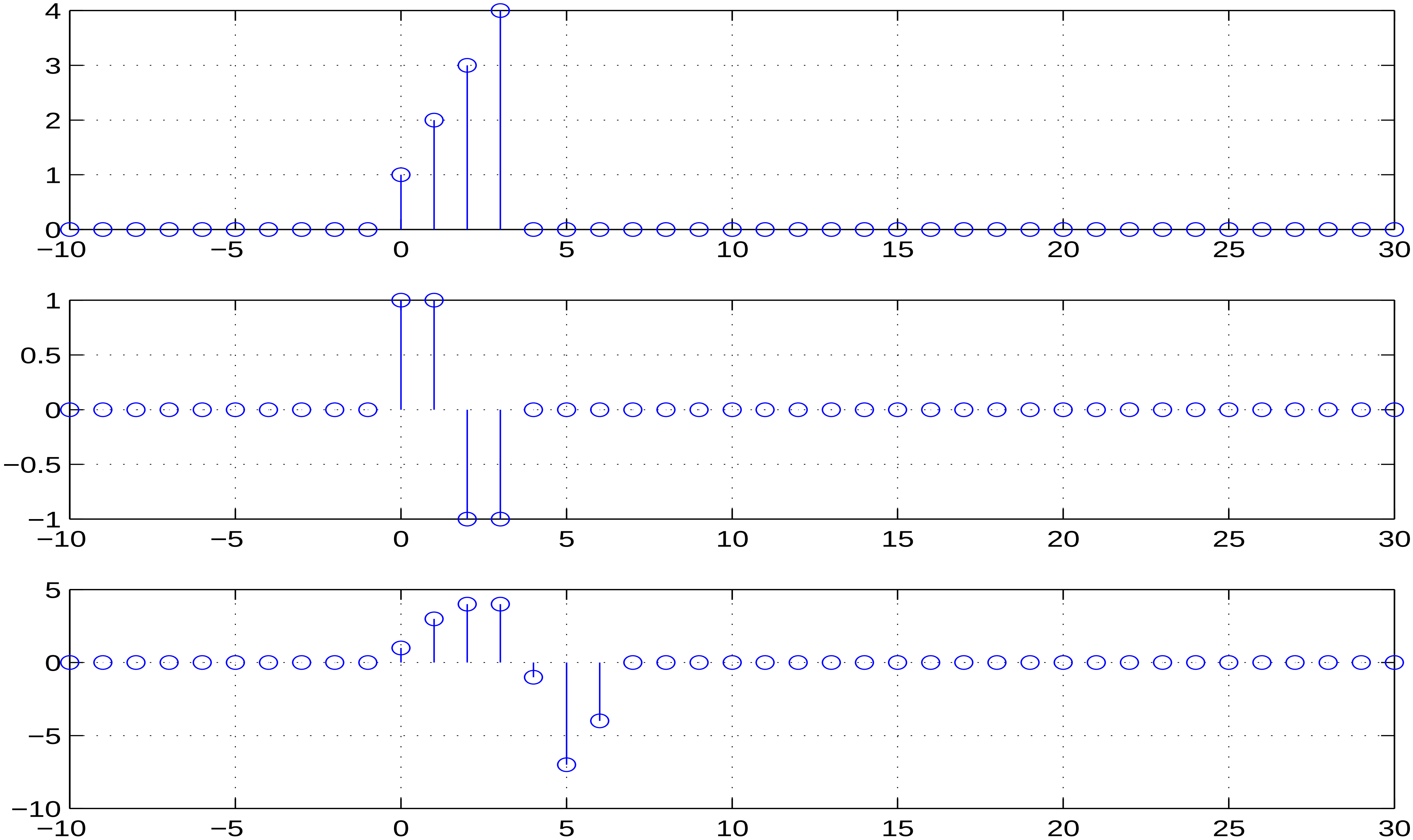
KONVOLUCE

u signálů se spojitým časem jsme definovali jednu konvoluci. U diskrétních signálů jich budeme mít více v závislosti na tom, jaký typ posunutí (obyčejné, periodické, kruhové) použijeme ve výrazu $x[n-m]$.

Lineární konvoluce

kterou jsme již viděli (papírky!) je definována jako: $x[n] \star y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k]$ a pro posloupnosti délky N to bude: $x[n] \star y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]y[n-k]$

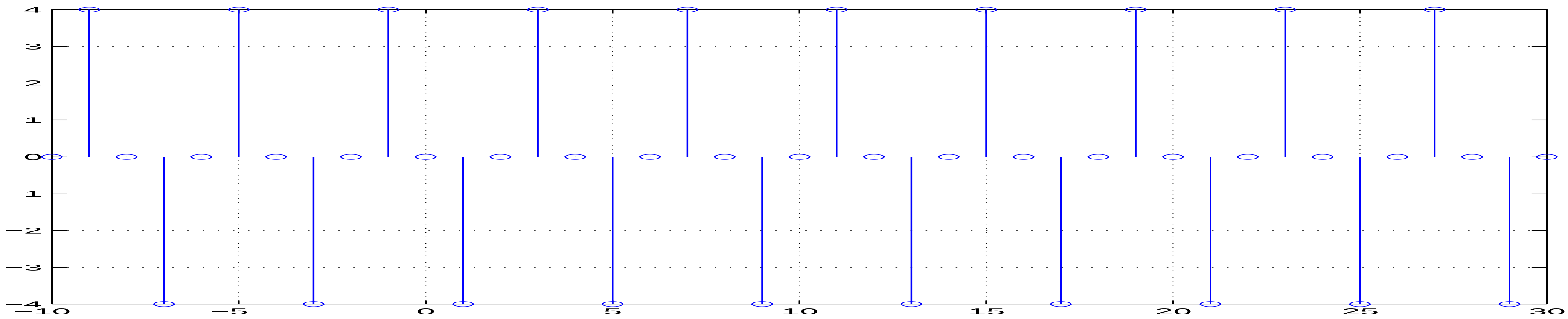
Její délka bude pouze $2N-1$, jinde budou nuly, protože signály se pro n mimo $[0, 2N-1]$ posunou tak, že už se nebudou vůbec překrývat. Z praktického hlediska je ovšem tato konvoluce nejužitečnější, protože nám umožňuje **filtraci** (vzpomeňte si, že pro LTI systém je výstup dán konvolucí vstupu s impulsní odezvou a pro filtry typu FIR (další přednáška) se skutečně tato konvoluce prakticky implementuje!).


4
3
2
1
0
−10
−5
0
5
10
15
20
25
30
1
0.5
0
−0.5
−1
−10
−5
0
5
10
15
20
25
30
5
0
−5
−10
−10
−5
0
5
10
15
20
25
30

Periodická konvoluce

obsahuje u výrazu $[n-k]$ modulo, které nás bude neustále vracet do intervalu $[0, N-1]$, tato konvoluce tedy bude mít nekonečnou délku a základní motiv délky N se bude periodicky opakovat.

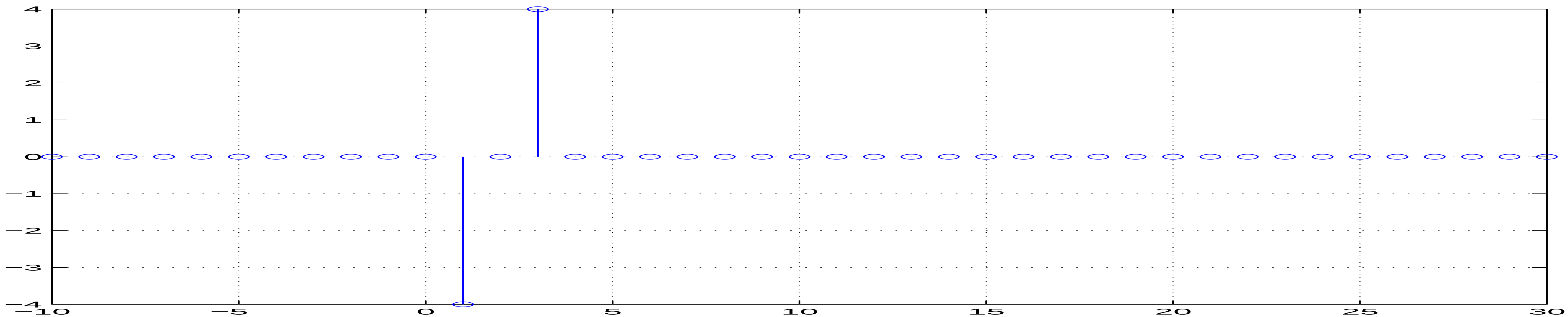
$$x[n]\tilde{\star}y[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x[k]y[\mod_N(n-k)]$$



Kruhová konvoluce

je podobná periodické, ale opět vyřízneme okénkem pouze jeden motiv $[0, N-1]$.

$$x[n] \circledN y[n] = R_N[n] \sum_{k=0}^{N-1} x[k] y[\mod_N(n-k)]$$



Kruhová konvoluce se opět dobře ukazuje na papírcích, tentokrát ale budeme potřebovat sešívačku nebo lepidlo:

- napište si obě posloupnosti na papírky, označte nultý vzorek.
- papírky slepte do kroužku.
- jedno z koleček otočte vzhůru nohama, sesaďte nulté vzorky.
- pro výpočet n-tého vzorku kruhové konvoluce otočte obrácené kolečko o n pozic **doprava**. Pak vynásobte a sečtěte vše, co leží nad sebou.
- při výpočtu kruhové konvoluce nesmíte udělat obráceným kolečkem více než jednu otáčku, dostali byste se z intervalu $[0, N-1]$.
- Jak je to s periodickou konvolucí ?

U spojitých signálů jsme viděli, že obrazem konvoluce ve spektru je součin spektrálních funkcí. Podobně tomu bude i u signálů diskrétních – u hojně používané diskrétní Fourierovy transformace (DFT) to bude právě kruhová konvoluce, které bude odpovídat součin dvou DFT.

SPEKTRÁLNÍ ANALÝZA DISKRÉTNÍCH SIGNÁLŮ

Fourierova transformace s diskrétním časem – DTFT

v přednášce o vzorkování jsme viděli, že budeme-li signál se spektrální funkcí $X(j\omega)$ vzorkovat, bude spektrální funkce vzorkovaného signálu:

$$X_s(j\omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_1),$$

kde T je vzorkovací perioda. Nepříjemné je, že většinou máme k disposici pouze vzorkovaný (diskrétní) signál, nevíme tedy, jaká byla původní spektrální funkce.

Zkusíme ale odvodit přímo spektrální funkci diskrétního signálu. Víme, že vzorkování jsme provedli násobením s periodickým sledem Diracových impulsů:

$$x_s(t) = x(t)s(t) = x(t) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT)$$

Vzorkovaný signál je dán pouze hodnotami původního signálu v časech nT. Zkusíme

Fourierovu transformaci takového signálu:

$$X_s(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT)e^{-j\omega t} dt$$

Pro danou kruhovou frekvenci ω není $e^{-j\omega t}$ nic jiného než funkce času. Pokud ovšem tuto funkci násobíme periodickým sledem Diraků, i tato funkce bude "vzorkována" - budeme brát v úvahu pouze hodnoty v násobcích nT:

$$X_s(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\delta(t - nT)e^{-j\omega nT} dt$$

Jako obvykle prohodíme pořadí integrálu a sumy a uvědomíme si, že:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-\tau)dt = x(\tau), \quad \text{a tedy} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} x(nT)\delta(t - nT)e^{-j\omega nT} dt = x(nT)e^{-j\omega nT}$$

Výsledek je tedy:

$$X_s(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)e^{-j\omega nT}$$

což můžeme interpretovat pro danou frekvenci ω jako "suma komplexních exponenciál násobených velikostí jednotlivých vzorků". Pro dané ω se $X_s(j\omega)$ **dá spočítat**, jelikož vzorků většinou není nekonečně mnoho. Ve vzorci nám ovšem stále ještě vadí vzorkovací perioda, přejdeme k normovaným veličinám:

$$n = \frac{nT}{T} \qquad \omega' = \frac{\omega}{F_s}$$

a dostaneme:

$$\omega nT = \omega' F_s n \frac{1}{F_s} = \omega' n$$

takže (už zase bez apostrofů):

$$X_s(j\omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}$$

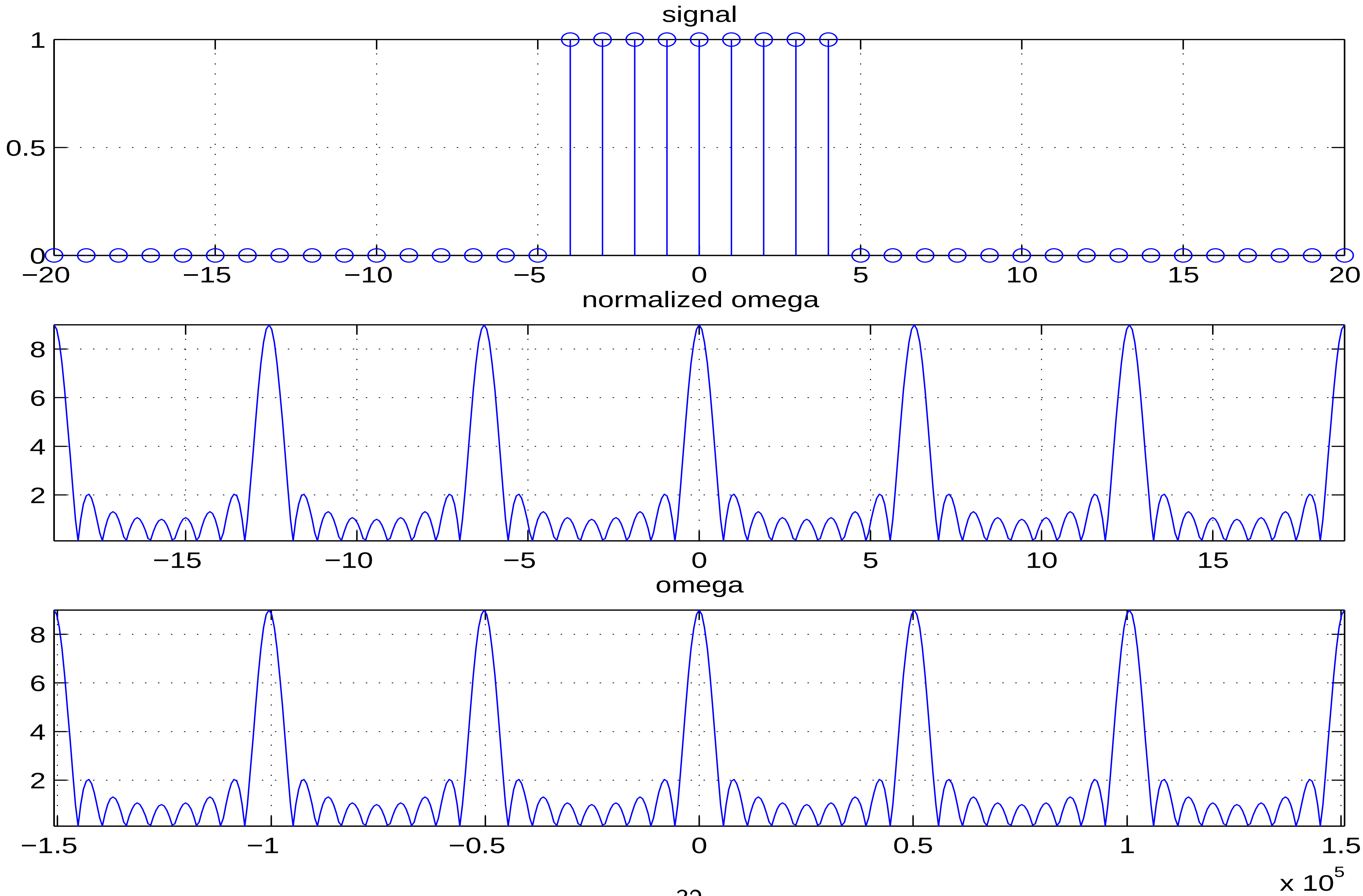
Pokud rovnici přepíšeme zcela do diskrétního signálu (bez času), zavedeme pro značení spektrální funkce notaci $X(e^{j\omega})$:

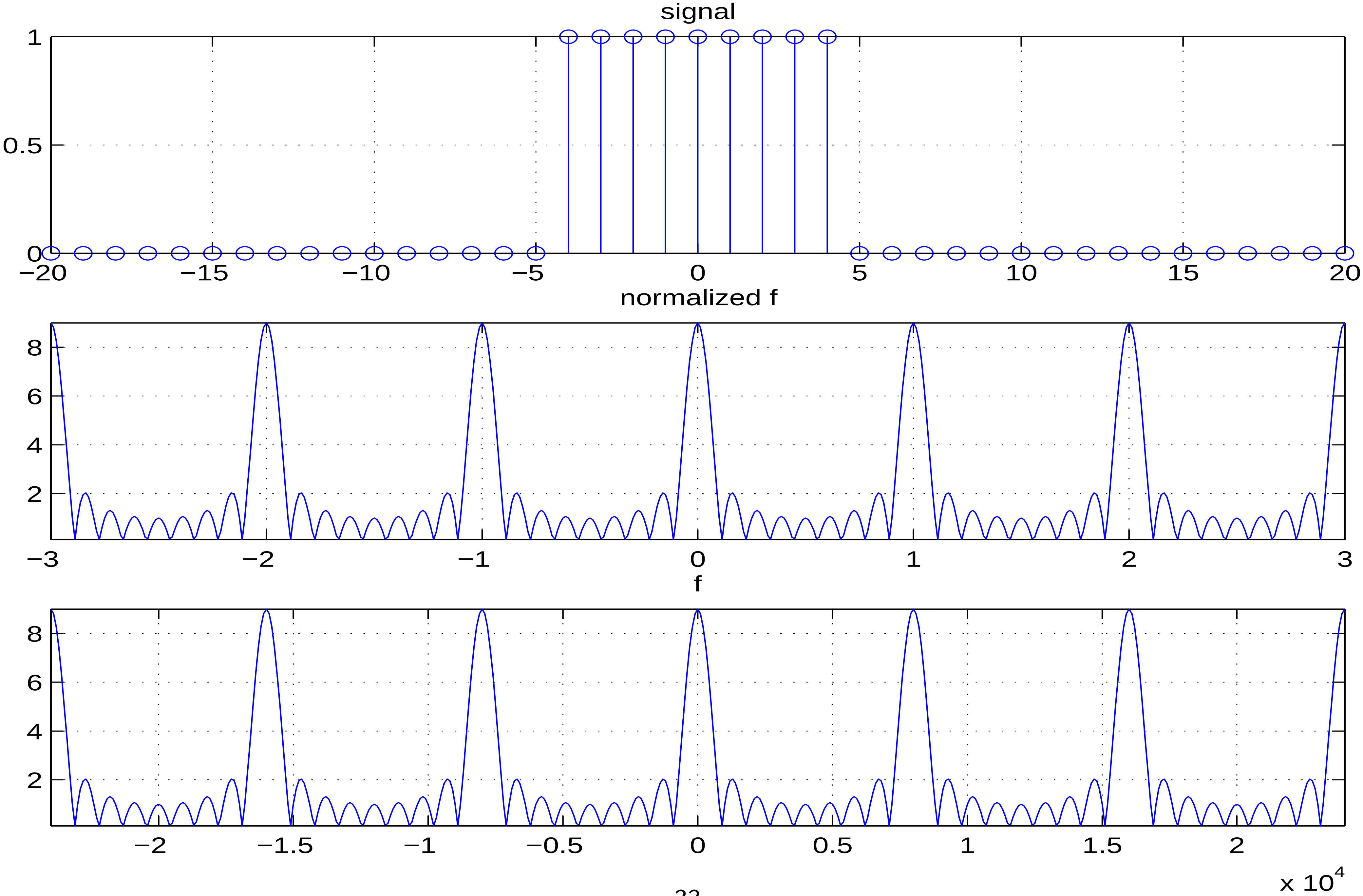
$$\boxed{\tilde{X}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\omega n}}$$

Uvedený vztah se nazývá **Fourierova transformace s diskrétním časem**, budeme však spíše používat anglický pojem **Discrete-time Fourier transform** a zkratku **DTFT**. Tilda nad $\tilde{X}$ značí, že DTFT je funkce periodická. Budeme značit také $x[n] \stackrel{DTFT}{\longrightarrow} \tilde{X}(e^{j\omega})$.

Při zobrazování si dáme pozor na to, jakou požadujeme frekvenční osu. ω v $\tilde{X}(e^{j\omega})$ je normovaná (pomůcka: ve vztahu vedle ní sedí n, ale nikde žádný pořádný čas). Budeme-li chtít obyčejnou kruhovou frekvenci, musíme odnormovat násobením F_s, budeme-li chtít frekvenci v Hz, musíme ještě podělit 2π.

Příklad: diskrétní obdélníkový impuls délky 9, vzorkovací frekvence $F_s = 8000$ Hz. kontroly: šířka obdélníka v normálním čase je: $\vartheta = 9T$. Výška spektra, pokud by signál nebyl vzorkován by byla $D\vartheta$. Pokud je, násobí se $\frac{1}{T}$, měli bychom tedy najít výšku: $\frac{D\vartheta}{T} = 9$. První dotyk spektrální funkce s osou ω by pro **obyčejnou kruhovou frekvenci** měl nastat v $\frac{2\pi}{\vartheta} = 5585$ rad/s.


signal
normalized omega
omega
x 10^5


signal
1
0.5
0
−20 −15 −10 −5 0 5 10 15 20
normalized f
8
6
4
2
−3 −2 −1 0 1 2 3
f
8
6
4
2
−2 −1.5 −1 −0.5 0 0.5 1 1.5 2
x 10^4

Periodicita spektra:

- v normovaných kruhových frekvencích: 2π rad
- v obyčejných kruhových frekvencích: $2\pi F_s$ rad/s
- v normovaných frekvencích: 1
- v obyčejných frekvencích: F_s Hz

Pro doplnění a bez odvození: **zpětná Fourierova transformace s diskrétním časem:**

$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{X}(e^{j\omega}) e^{+j\omega n} d\omega$$

…všimneme si, že integrujeme pouze přes jednu "periodu" ve frekvenci, ostatní jsou totiž stejné. $[-\pi, +\pi]$ v normované kruhové frekvenci odpovídá $[-\frac{F_s}{2}, +\frac{F_s}{2}]$ ve skutečné.

Na zapamatování o DTFT:

- je periodická protože signál je diskrétní.
- je to funkce definovaná pro všechna ω, protože signál je jakýkoliv.
- je jen jedna, ale můžeme ji zobrazit s různými frekvenčními osami.

Diskrétní Fourierova řada

nám podobně jako Fourierova řada se spojitým časem poslouží k frekvenční analýze **periodických** signálů s diskrétním časem.

- Signál je diskrétní takže ve frekvenční oblasti očekáváme něco periodického.
- signál je periodický, takže ve frekvenční oblasti budeme očekávat čáry (koeficienty) a ne funkci.

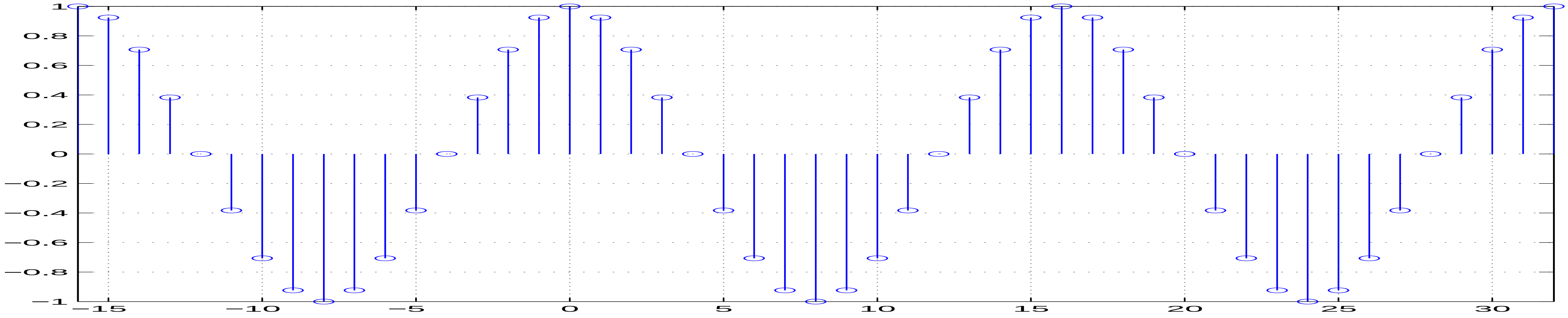
Obě podmínky dohromady napovídají, že periodický diskrétní signál bude dán **konečným počtem** koeficientů . . . to začíná vypadat zajímavě, protože se to konečně bude dát spočítat.

Máme periodickou posloupnost $\tilde{x}[n]$ s periodou N. Podobně jako u spojitých signálů budeme definovat základní kruhovou frekvenci

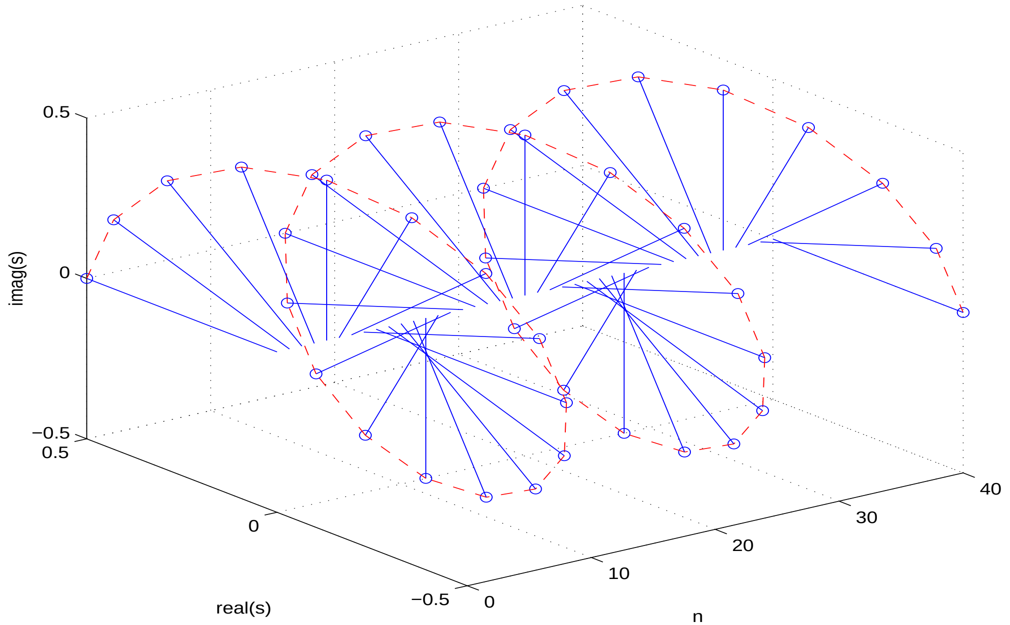
$$\omega_1 = \frac{2\pi}{N}$$

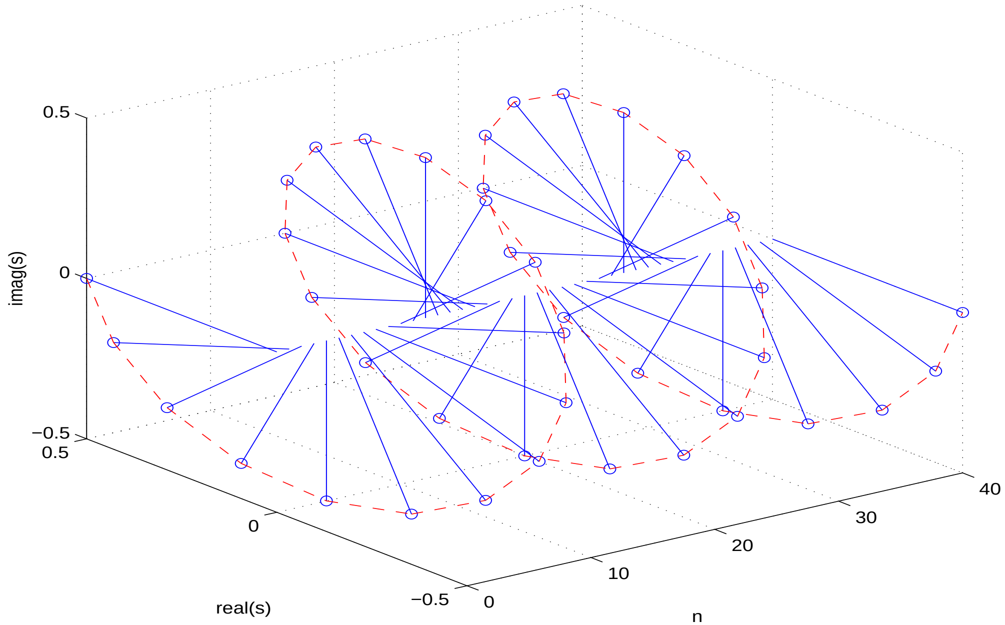
Příklad: kosinusovka s

periodou $N = 16$ má základní kruhovou frekvenci $\omega_1 = \frac{2\pi}{16} = \frac{\pi}{8}$ a je zapsána $x[n] = \cos(\frac{\pi}{8} n)$



Tato kosinusovka může být rozložena na 2 funkce: $x[n] = \cos(\frac{\pi}{8} n) = \frac{1}{2} e^{j \frac{\pi}{8} n} + \frac{1}{2} e^{-j \frac{\pi}{8} n}$





Podobně jako u spojitých signálů můžeme sumou komplexních exponenciál na násobcích základní kruhové frekvence $\omega_1 = \frac{2\pi}{N}$ vyjádřit **libovolný periodický signál s diskrétním časem**:

$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=\{N\}} \tilde{X}[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

Vzorec nazýváme **Diskrétní Fourierova řada – DFŘ** (anglicky discrete Fourier series). Koeficienty této řady – krátce **spektrum diskrétního periodického signálu** – jsou určeny

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=\{N\}} \tilde{x}[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

Rozbor:

- $\tilde{X}[k]$ je k-tý koeficient DFŘ. Násobí exponenciálu kroutící se na frekvenci $\frac{2\pi}{N}k$.
- opět vidíme znaménko "-" při přesunu z času do frekvence a "$+$" při návratu do času.

- hranice sumy $\{N\}$ znamenají sumaci přes libovolnou periodu. U spojité FŘ jsme to viděli pro signál - mohlo se integrovat přes libovolnou periodu T_1. U DFŘ, kde jsou i koeficienty periodické, to vidíme i ve spektru. Nejběžnější hranice pro n a k jsou $[0, N-1]$, ve většině případů tedy uvidíte vzorce pro DFŘ zapsané jako:

$$\boxed{\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}} \qquad \boxed{\tilde{x}[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] e^{j\frac{2\pi}{N}kn}}$$

Proč jsou koeficienty DFŘ periodické

protože funkce $e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$ je stejná pro $k = k + gN$:

$$\frac{2\pi}{N}(k+gN)n = \frac{2\pi}{N}kn + \frac{2\pi}{N}gNn = \frac{2\pi}{N}kn + 2\pi gn$$

a víme, že funkce $e^{j\cdot}$ je periodická s 2π.

Důsledky:

- pokud je funkce $e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$ stejná jako $e^{-j\frac{2\pi}{N}(k+gN)n}$, pak jsou si rovné i koeficienty:

$$\tilde{X}[k] = \tilde{X}[k+gN]$$

- pokud je ještě navíc signál $\tilde{x}[n]$ reálný, jsou kladný a záporný koeficient komplexně sdružené:

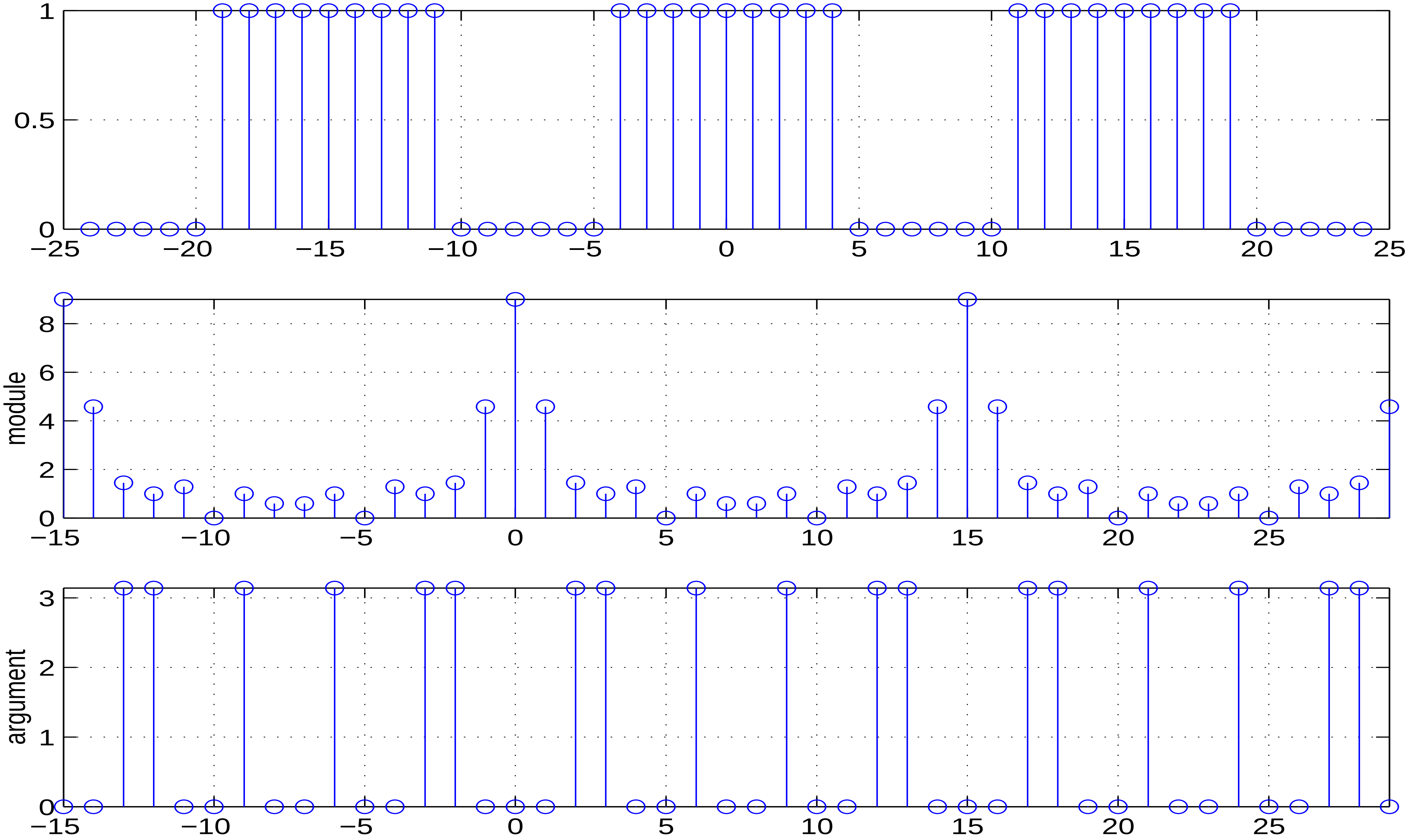
$$\tilde{X}[k] = \tilde{X}^{\star}[-k]$$

  takže také

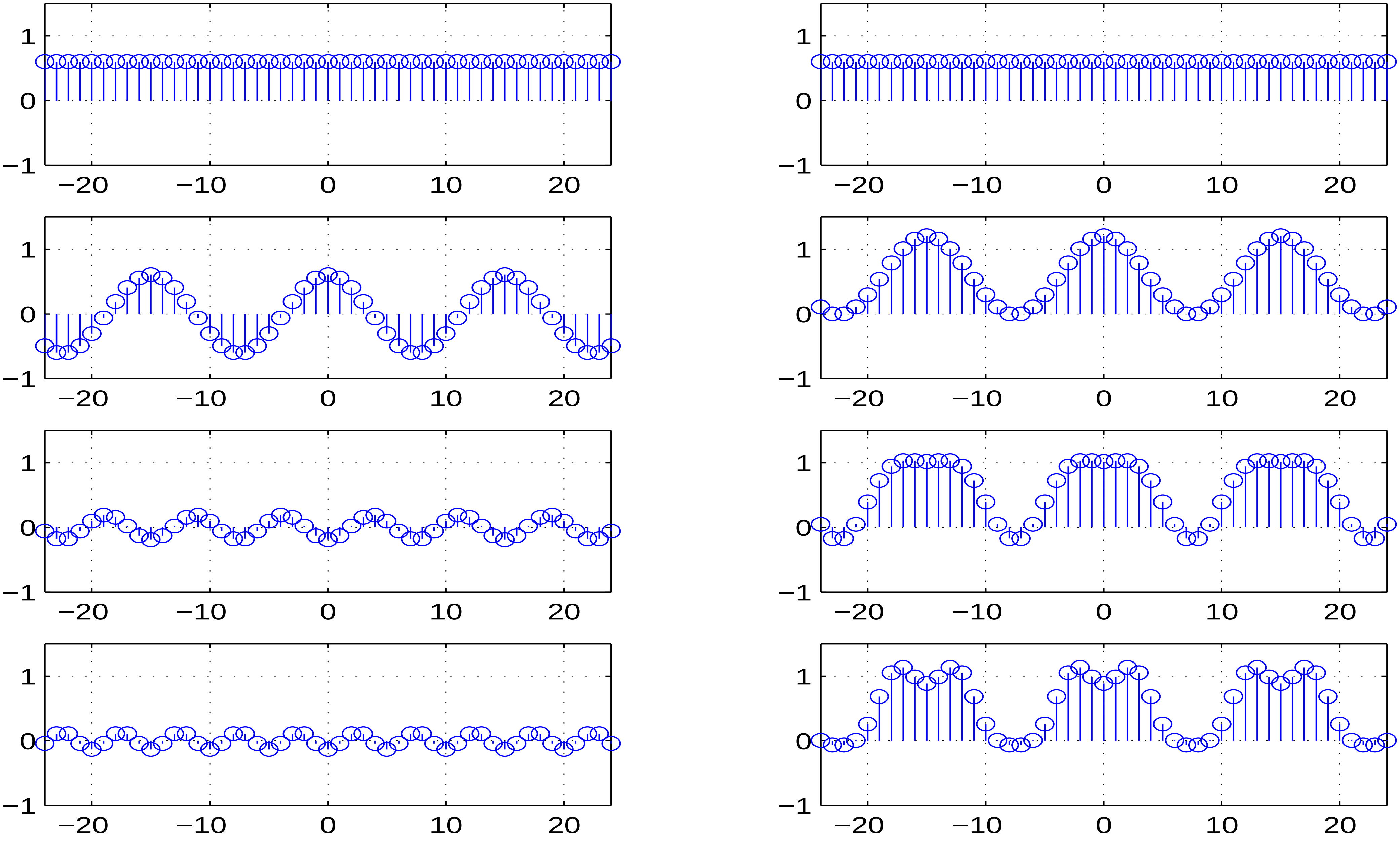
$$\tilde{X}[k] = \tilde{X}^{\star}[gN-k]$$

- Už je jasné, proč pro “syntézu signálu” rovnicí $\tilde{x}[n] = \dfrac{1}{N}\displaystyle\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}[k]e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$ uvažujeme jen jednu periodu k-áček: $k = \{N\}$ – ostatní jsou úplně stejné.

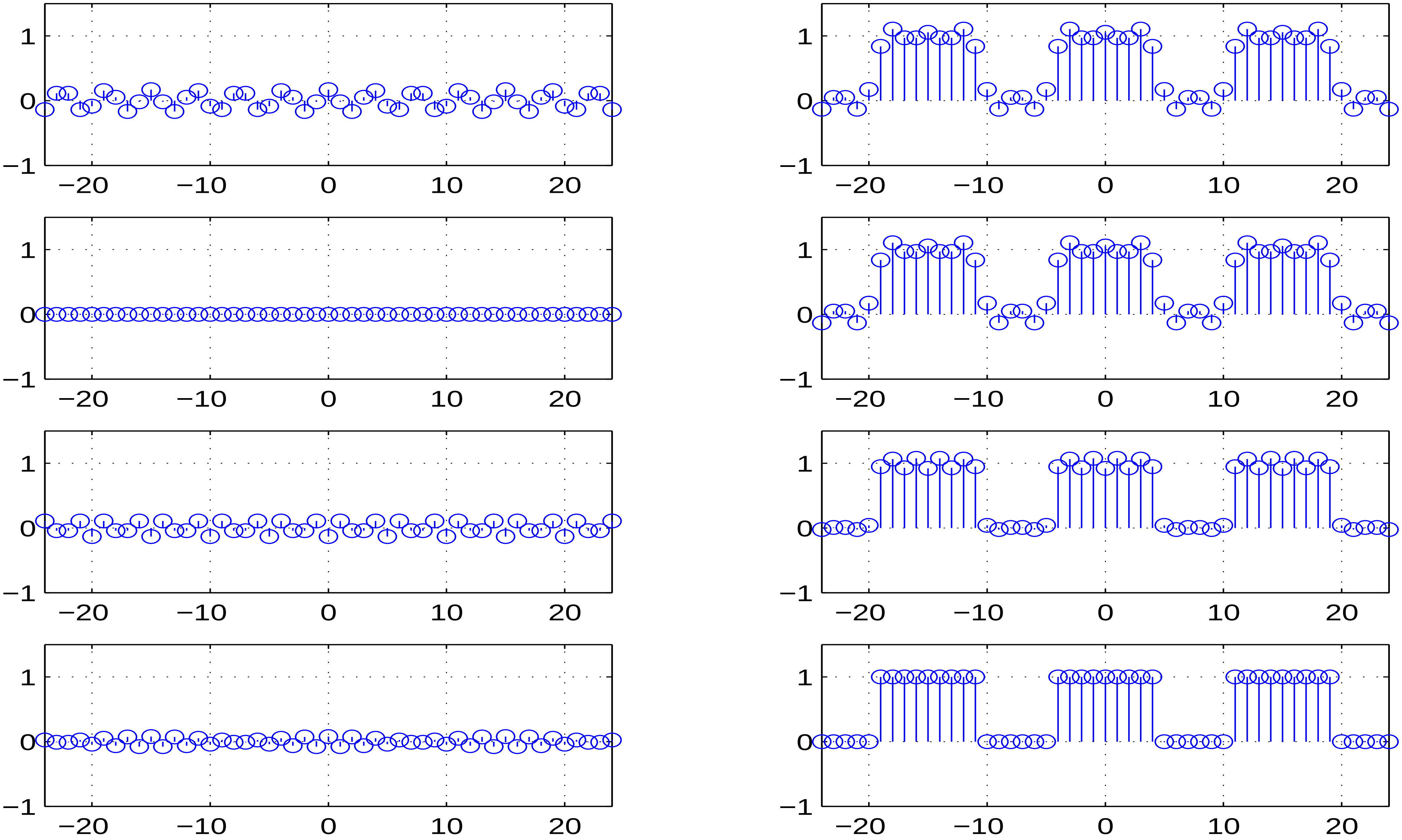
Příklad: periodického sledu obdélníkových impulsů, $N = 15$, délka obdélníka 9.



Syntéza: $k = 0, 1, 2, 3$



Syntéza: $k = 4, 5, 6, 7$, více ne, protože $k = 8$ už jsme použili, jelikož $15 - 7 = 8$.



DFŘ harmonického signálu s periodou N

viděli jsme, že kosinusovku o periodě N můžeme zapsat jako:

$$x[n] = \cos(\frac{2\pi}{N}n) = \frac{1}{2}e^{j\frac{2\pi}{N}n} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{2\pi}{N}n}$$

Obecnou kosinusovku s amplitudou a počáteční fází můžeme rozložit jako:

$$x[n] = C_1\cos(\frac{2\pi}{N}n + \phi_1) = \frac{C_1}{2}e^{j\frac{2\pi}{N}n+j\phi_1} + \frac{C_1}{2}e^{-j\frac{2\pi}{N}n-j\phi_1}$$

Pokud to srovnáme se vztahem pro "syntézu signálu z DFŘ" $\tilde{x}[n] = \frac{1}{N}\sum_{n=\{N\}}\tilde{X}[k]e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$,

zjistíme, že pro harmonický signál má v jedné "periodě" N pouze dva nenulové koeficienty:

$$\tilde{X}[1] = \frac{NC_1}{2}e^{j\phi_1} \qquad \tilde{X}[-1] = \frac{NC_1}{2}e^{-j\phi_1}$$

Do "periody" $[0, N-1]$, kterou většinou používáme, se $\tilde{X}[-1]$ promítne jako $\tilde{X}[N-1]$.
Můžeme tedy psát:

$$|\tilde{X}[1]| = |\tilde{X}[N-1]| = \frac{NC_1}{2} \qquad \arg\tilde{X}[1] = -\arg\tilde{X}[N-1] = \phi$$

Příklad: $N = 15$, $C_1 = 1$, $\phi = \frac{\pi}{4}$.