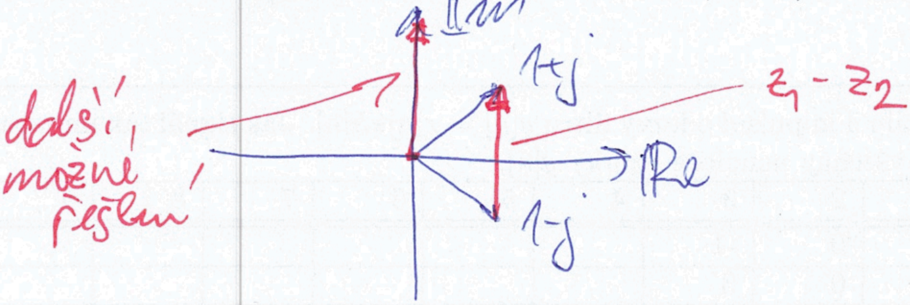
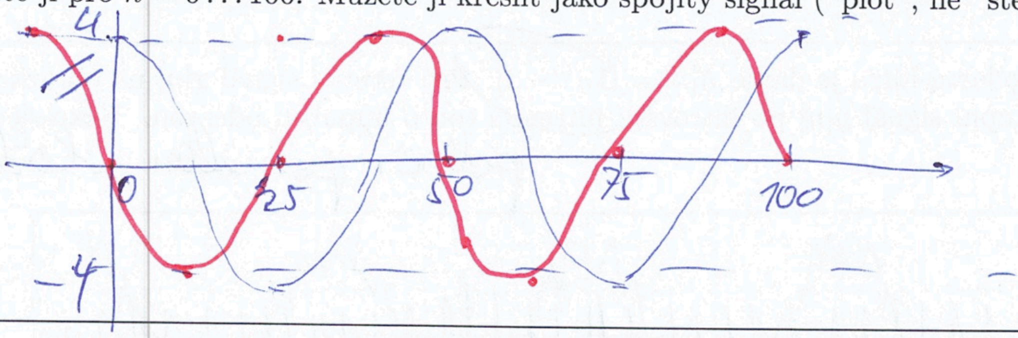
Půlsemestrální zkouška ISS, 23.11.2022, zadání A

Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: REF ....
(prosím čitelně!)

Příklad 1 Nakreslete v komplexní rovině rozdíl $z_1 - z_2$ komplexních čísel $z_1 = 1 + j$ a $z_2 = 1 - j$ jako vektor. Tento vektor nemusí mít začátek v počátku $(0 + j0)$, ale musí mít správný modul a argument.

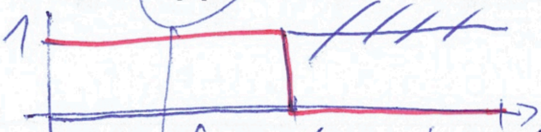


Příklad 2 Je dána cosinusovka s diskrétním časem: $x[n] = 4\cos(2\frac{2\pi}{100}n + \frac{\pi}{2})$
Nakreslete ji pro $n = 0 \dots 100$. Můžete ji kreslit jako spojitý signál ("plot", ne "stem").



Příklad 3 Signál $x[n]$ o délce $N = 256$ vzorků je definován jako $x[n] = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = 0 \dots 127 \\ 0 & \text{pro } n = 128 \dots 255 \end{cases}$

Analyzační signál je komplexní exponenciála: $a[n] = e^{-j\frac{8\pi}{256}n}$. Určete koeficient podobnosti / korelace / síly projekce $c = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]a[n]$.

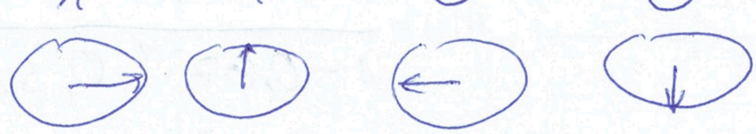


komplexní exp. 4 periody za 256 vzorků, tedy 2 periody za 128 vzorků.

$c =$ Σ 2 celé periody komplex. exp. $= 0$

Příklad 4 Signál $x[n]$ o délce $N = 4$ vzorky má pro $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3$ hodnoty $x[n] = 1,\ -1,\ 0,\ 0$. Určete zadaný koeficient jeho diskrétní Fourierovy transformace (DFT) a napište ho ve **složkovém** tvaru.
Pomůcka: $X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$.

1 −1 0 0



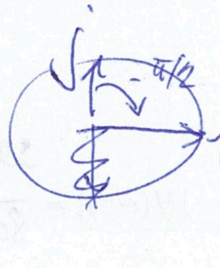
$X[3] =$ $1 - j$

Příklad 5 Vypočítaný koeficient DFT pro signál $x[n]$ o délce $N = 8$ vzorků je $X[1] = j$. Určete hodnotu tohoto DFT koeficientu, pokud se signál zpozdí: $y[n] = x[n-2]$. Signál $x[n]$ je krátký, takže při jeho posunutí nedojde k "vytečení" z intervalu $n = 0 \dots N-1$.

zpoždění m

$Y[k] = X[k]e^{-j\frac{2\pi}{N}km}$

$Y[1] = X[1]e^{-j\frac{2\pi}{8}\cdot 1\cdot 2} = j\, e^{-j\frac{\pi}{2}}$



$Y[1] =$ 1

Příklad 6 Signál s diskrétním časem $x[n]$ je periodický a má základní periodu 40 vzorků. Vzorkovací frekvence je $F_s = 8$ kHz. Určete skutečnou základní frekvenci tohoto signálu v Hertzích.

normovaná frekv $= \frac{1}{40}$

skutečná = normovaná $\cdot F_s = \frac{1}{40} \cdot 8000 = 200$

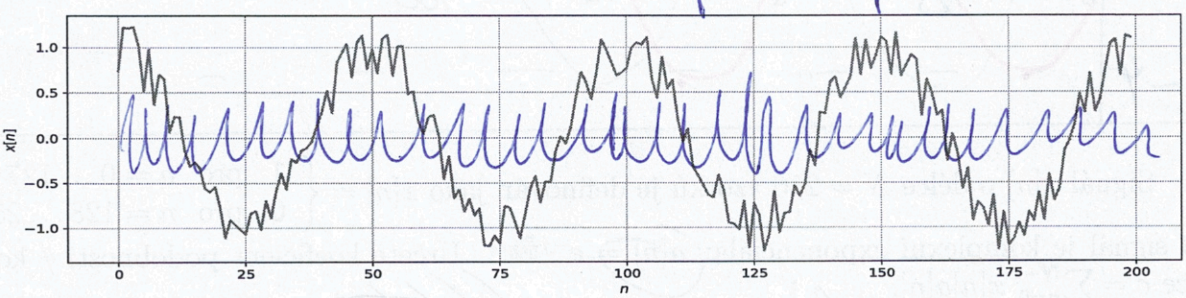
$f =$ ....200.... Hz

Příklad 7 Vypočtěte konvoluci signálu a impulsní odezvy filtru $y[n] = x[n] \star h[n]$. Jak signál tak impulsní odezva mají délku 4 vzorky. Vyplňte všechny nenulové vzorky $y[n]$.

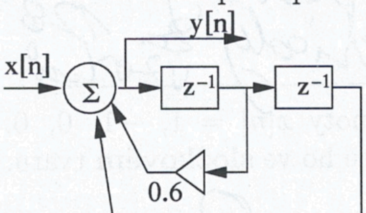
n	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x[n]$			1	1	0	-1						
$h[n]$			1	-1	0	3						
$y[n]$			1	0	-1	2	4	0	-3			

Příklad 8 Impulsní odezva filtru je dána: $h[n] = [1, \quad -1]$. Pro vstupní signál $x[n]$ na obrázku určete, jak bude vypadat výstupní signál $y[n]$ po filtrování filtrem s touto impulsní odezvou. Nakreslete ho do stejného obrázku.

potlačí pomalou složku

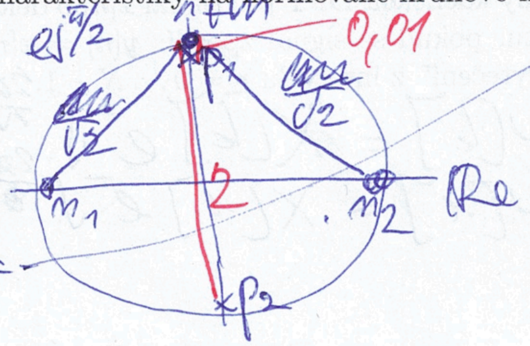


Příklad 9 Napište přenosovou funkci $H(z)$ filtru, jehož schema je na obrázku.



$H(z) = \frac{1}{1 - 0{,}6z^{-1} - 0{,}3z^{-2}}$

Příklad 10 Číslicový filtr má dva nulové body: $n_1 = -0.99$ a $n_2 = 1$ a dva póly: $p_1 = 0.99j$ a $p_2 = -0.99j$. Určete modul jeho frekvenční charakteristiky na normované kruhové frekvenci $\omega = \frac{\pi}{2}$.



$|H(e^{j\omega})| = \frac{\text{součin délek modrých}}{\text{součin délek červených}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{2 \cdot 0{,}01} = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2} \cdot 0{,}01} = 100$

Půlsemestrální zkouška ISS, 25.11.2022, zadání C

Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: REF

(prosím čitelně!)

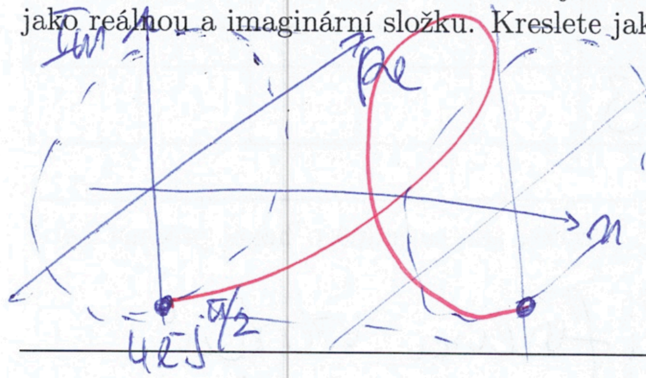
Příklad 1 Dokažte, že pro libovolné komplexní číslo z a číslo komplexně sdružené $z^\star$ platí $|z|^2 = z\,z^\star$.

$z = r \cdot e^{j\varphi} \qquad z^* = r \cdot e^{j\varphi}$

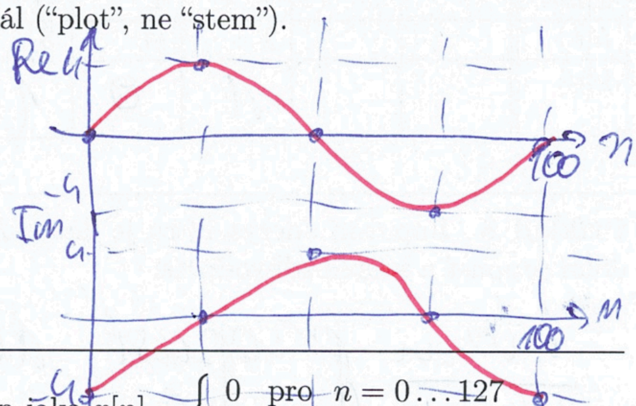
$z \cdot z^* = r \cdot r \cdot e^{j\varphi - j\varphi} = r^2 \cdot \underbrace{e^{j0}}_{1} = r^2 = |z|^2$

Příklad 2 Je dána komplexní exponenciála s diskrétním časem: $x[n] = 4e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{j\frac{2\pi}{100}n}$. Nakreslete ji pro $n = 0 \ldots 100$. Můžete ji kreslit v jednom 3D obrázku nebo samostatně ve dvou obrázcích jako reálnou a imaginární složku. Kreslete jako spojitý signál ("plot", ne "stem").

1 perioda za 100 vzorků



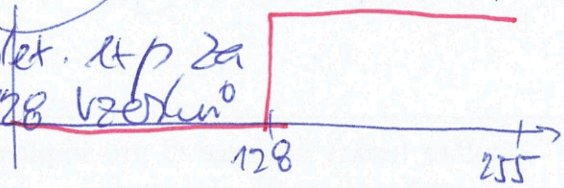
nebo



Příklad 3 Signál $x[n]$ o délce $N = 256$ vzorků je definován jako $x[n] = \begin{cases} 0 & \text{pro } n = 0 \ldots 127 \\ 1 & \text{pro } n = 128 \ldots 255 \end{cases}$

Analyzační signál je komplexní exponenciála: $a[n] = e^{-j\frac{16\pi}{256}n}$ Určete koeficient podobnosti / korelace / síly projekce $c = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]a[n]$.

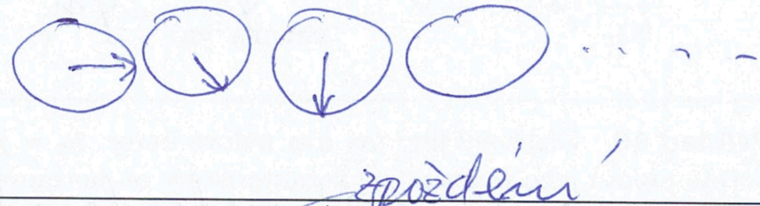
8 otáček komplet. exp za 256 vzorků, 4 za 128 vzorků



4 plné otáčky

$c = \Sigma$ komplex. exponenciály $= 0$

Příklad 4 Signál $x[n]$ o délce $N = 8$ vzorků má pro $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ hodnoty $x[n] = 1, 0, -1, 0, 0, 0, 0, 0$. Určete zadaný koeficient jeho diskrétní Fourierovy transformace (DFT) a napište ho ve **složkovém** tvaru. Pomůcka: $X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$.



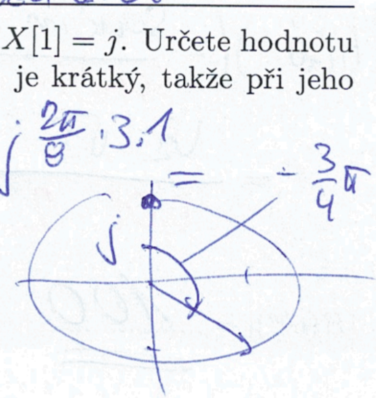
$X[1] = 1 + (-1)(-j) = 1 + j$

Příklad 5 Vypočítaný koeficient DFT pro signál $x[n]$ o délce $N = 8$ vzorků je $X[1] = j$. Určete hodnotu tohoto DFT koeficientu, pokud se signál zpozdí: $y[n] = x[n-3]$. Signál $x[n]$ je krátký, takže při jeho posunutí nedojde k "vytečení" z intervalu $n = 0 \ldots N-1$.

zpoždění

$Y[k] = X[k] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}mk} = X[k] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{8}\cdot 3 \cdot 1} = -\frac{3}{4}\pi$

$= j\, e^{-j\frac{3}{4}\pi}$



$Y[1] = \frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}$

$C_1 = 1 \quad \varphi_1 = 0$

Příklad 6 Signál s diskrétním časem $x[n]$ je cosinusovka s periodou $N = 100$ vzorků: $x[n] = \cos(\frac{2\pi}{N}n)$. Určete, jaké budou hodnoty všech nenulových koeficientů diskrétní Fourierovy transformace (DFT) $X[k]$ tohoto signálu, pokud počet vzorků pro DFT bude také $N = 100$.

$$X[1] = \frac{NC_1}{2} \cdot e^{j\varphi_1} = \frac{100 \cdot 1}{2} e^{j0} = 50$$

$$X[N-1] = X[99] = 50$$

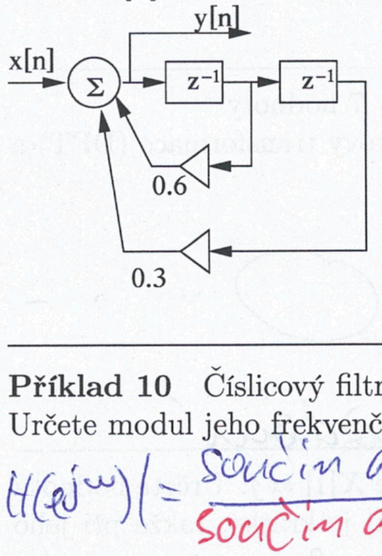
Příklad 7 Vypočtěte konvoluci signálu a impulsní odezvy filtru $y[n] = x[n] \star h[n]$. Jak signál tak impulsní odezva mají délku 3 vzorky. Vyplňte všechny nenulové vzorky $y[n]$.

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x[n]$			1	1	-1							
$h[n]$			1	-1	3							
$y[n]$			1	0	1	4	-3					

Příklad 8 Impulsní odezva filtru je dána: $h[n] = [1,\ -1]$. Určete, zda se jedná o horní propusť nebo dolní propusť a krátce zdůvodněte.

horní propusť, dělá diferenci vzorků, zcela potlačuje stejnosměrnou složku.

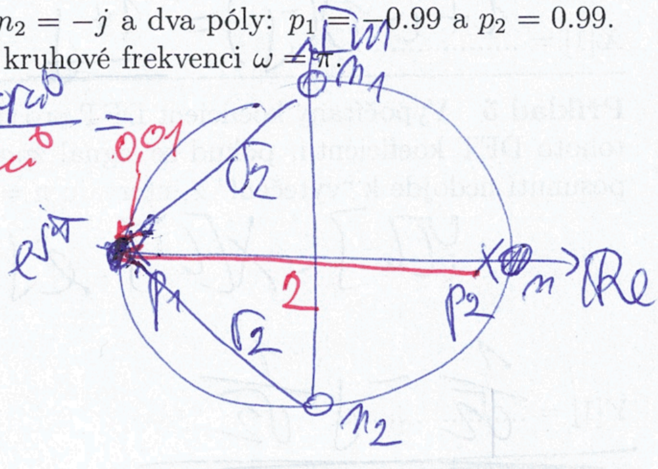
Příklad 9 Doplňte funkci v jazyce C pro implementaci filtru, jehož schéma je na obrázku. Vstupní vzorek $x[n]$ je **xn**, výstupní vzorek $y[n]$ je **yn**.




```
float filter (float xn) {
  static float yn1 = 0.0, yn2 = 0.0;
  float yn;
  yn = xn + 0.6 * yn1 + 0.3 * yn2;
  yn2 = yn1;
  yn1 = yn;
  return yn;
}
```

Příklad 10 Číslicový filtr má dva nulové body: $n_1 = j$ a $n_2 = -j$ a dva póly: $p_1 = -0.99$ a $p_2 = 0.99$. Určete modul jeho frekvenční charakteristiky na normované kruhové frekvenci $\omega = \pi$.

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{\text{součin délek modrých vektorů}}{\text{součin délek červených vektorů}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{0{,}01 \cdot 2} = 100$$



$|H(e^{j\omega})| = $ 100

Půlsemestrální zkouška ISS, 25.11.2022, zadání D

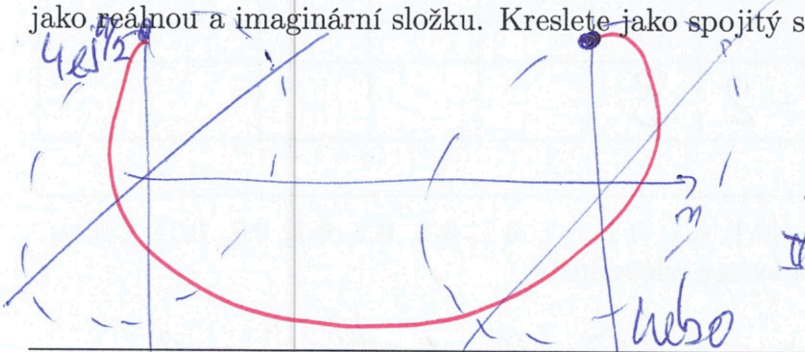
Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: REF.
(prosím čitelně!)

Příklad 1 Dokažte, že pro libovolné komplexní číslo z a číslo komplexně sdružené $z^\star$ platí $z + z^\star = 2\,\mathrm{Real}(z)$.

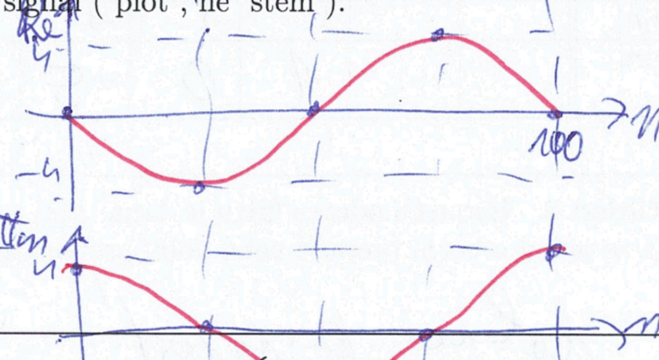
$z = a + jb \qquad z^* = a - jb$

$z + z^* = 2a + \cancel{jb} - \cancel{jb} = 2a = 2\,\mathrm{Real}(z).$

Příklad 2 Je dána komplexní exponenciála s diskrétním časem: $x[n] = 4e^{j\frac{\pi}{2}}e^{j\frac{2\pi}{100}n}$. Nakreslete ji pro $n = 0 \dots 100$. Můžete ji kreslit v jednom 3D obrázku nebo samostatně ve dvou obrázcích jako reálnou a imaginární složku. Kreslete jako spojitý signál ("plot", ne "stem").



nebo



Příklad 3 Signál $x[n]$ o délce $N = 256$ vzorků je definován jako $x[n] = \begin{cases} 0 & \text{pro } n = 0 \dots 127 \\ 1 & \text{pro } n = 128 \dots 255 \end{cases}$

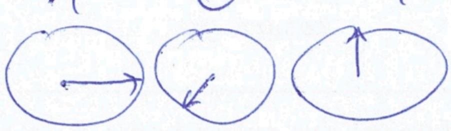
Analyzační signál je komplexní exponenciála: $a[n] = e^{-j\frac{32\pi}{256}n}$. Určete koeficient podobnosti / korelace / síly projekce $c = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]a[n]$.

viz A

c = $\sum$ 8 plných otáček komplet. exponenciály $= \underline{\underline{0}}$

Příklad 4 Signál $x[n]$ o délce $N = 8$ vzorků má pro $n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$ hodnoty $x[n] = 1,\ 0, -1,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0$. Určete zadaný koeficient jeho diskrétní Fourierovy transformace (DFT) a napište ho ve **složkovém** tvaru. Pomůcka: $X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$.

1 0 −1

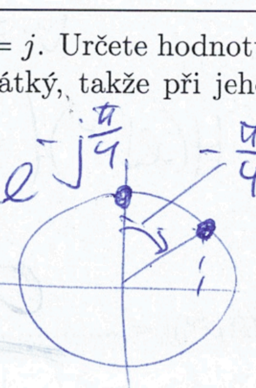


$X[3]$ = $\underline{1 - j}$

Příklad 5 Vypočítaný koeficient DFT pro signál $x[n]$ o délce $N = 8$ vzorků je $X[1] = j$. Určete hodnotu tohoto DFT koeficientu, pokud se signál zpozdí: $y[n] = x[n-1]$. Signál $x[n]$ je krátký, takže při jeho posunutí nedojde k "vytečení" z intervalu $n = 0 \dots N-1$.

viz A

$Y[1] = j \cdot e^{-j\frac{2\pi}{8}\cdot 1 \cdot 1} = j\,e^{-j\frac{\pi}{4}}$



$Y[1]$ = $\underline{\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}}$

Příklad 6 Signál s diskrétním časem $x[n]$ je cosinusovka s periodou $N = 100$ vzorků: $x[n] = 10\cos(\frac{2\pi}{N}n)$. Určete, jaké budou hodnoty všech nenulových koeficientů diskrétní Fourierovy transformace (DFT) $X[k]$ tohoto signálu, pokud počet vzorků pro DFT bude také $N = 100$.

viz C

$X[1] = 500$

$X[99] = 500$

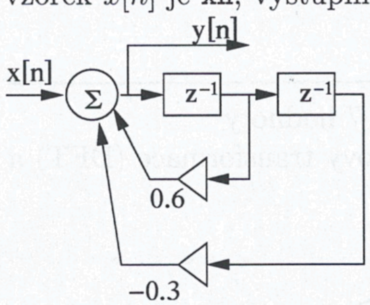
Příklad 7 Vypočtěte konvoluci signálu a impulsní odezvy filtru $y[n] = x[n] \star h[n]$. Jak signál tak impulsní odezva mají délku 3 vzorky. Vyplňte všechny nenulové vzorky $y[n]$.

n	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$x[n]$			1	1	-1							
$h[n]$			1	-1	-3							
$y[n]$			1	0	-5	-2	3					

Příklad 8 Impulsní odezva filtru je dána: $h[n] = [0.1,\ 0.1,\ 0.1,\ 0.1,\ 0.1,\ 0.1,\ 0.1,\ 0.1,\ 0.1,\ 0.1]$. Určete, zda se jedná o horní propusť nebo dolní propusť a krátce zdůvodněte.

dolní propusť - vyhlazuje, potlačuje rychlé změny (vyšší frekvence)

Příklad 9 Doplňtě funkci v jazyce C pro implementaci filtru, jehož schéma je na obrázku. Vstupní vzorek $x[n]$ je `xn`, výstupní vzorek $y[n]$ je `yn`.




```
float filter (float xn) {
```

viz C

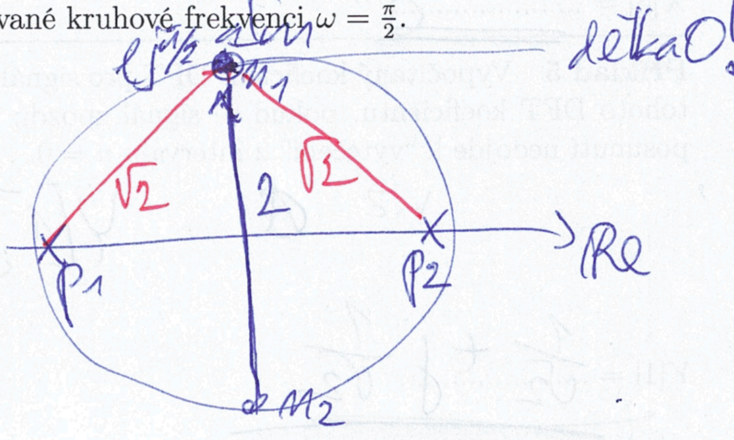
`yn = xn + 0.6 * yn1 - 0.3 * yn2;`

```
  return yn;
}
```

Příklad 10 Číslicový filtr má dva nulové body: $n_1 = j$ a $n_2 = -j$ a dva póly: $p_1 = -0.99$ a $p_2 = 0.99$. Určete modul jeho frekvenční charakteristiky na normované kruhové frekvenci $\omega = \frac{\pi}{2}$.

viz C

$$|H(e^{j\omega})| = \frac{2 \cdot 0}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = 0$$



$|H(e^{j\omega})| =$ 0