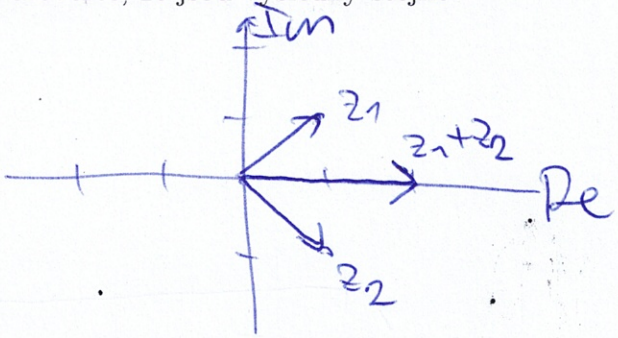
Půlsemestrální zkouška ISS, 22.10.2024, zadání A

Login: ..... Příjmení a jméno: ..... Podpis: REF
(prosím čitelně!)

Příklad 1 Nakreslete komplexní čísla $z_1 = 1 + j$ a $z_2 = 1 - j$ do komplexní roviny jako vektory a sečtěte je jako vektory. Vypočtěte součet také numericky a ověřte, že jsou výsledky stejné.



$z_1 + z_2 =$ 1+j+1-j = 2

Příklad 2 Vynásobte komplexní čísla $z_1 = 3e^{j\frac{\pi}{4}}$ a $z_2 = 4e^{j\frac{\pi}{2}}$ a napište výsledek v exponenciálním tvaru.

moduly se ~~sčítají~~ násobí, argumenty se sčítají

$z_1 z_2 =$ $12 \cdot e^{j\frac{3}{4}\pi}$

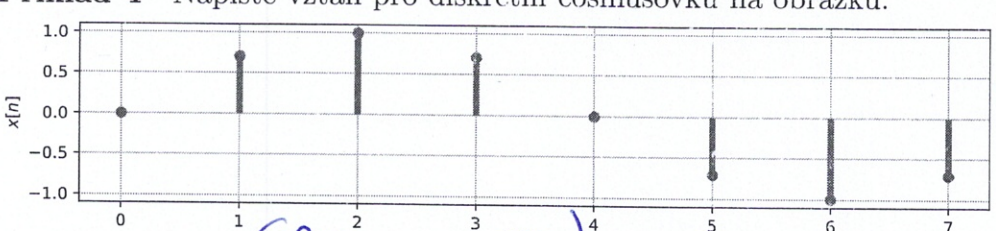
Příklad 3 Odvoďte vztahy pro reálnou a imaginární složku součtu dvou komplexně sdružených čísel: $z + z^*$

$z = a + jb \quad z^* = a - jb$

$\mathrm{Re}(z + z^*) = 2a$ (nebo $2 \cdot \mathrm{Re}(z)$)

$\mathrm{Im}(z + z^*) = 0$

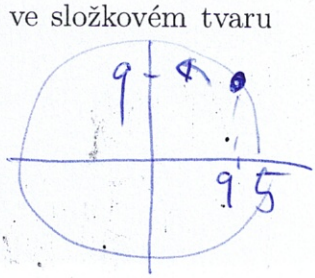
Příklad 4 Napište vztah pro diskrétní cosinusovku na obrázku.



zpoždění o 1/4 periody, tedy o $\pi/2$

$x[n] =$ $\cos\left(\frac{2\pi}{8}n - \frac{\pi}{2}\right)$

Příklad 5 Do tabulky zapište hodnoty komplexní exponenciály $x[n] = 5e^{j\frac{\pi}{4}}e^{j2\pi\frac{1}{8}n}$ ve složkovém tvaru pro $n = 0 \ldots 7$. Pro jednoduchost zapisujte $\frac{5}{\sqrt{2}}$ jako q.



n	0	1	2	3	4	5	6	7
$x[n]$	q+jq	5j	-q+jq	-5	-q-jq	-5j	q-jq	5

A

Příklad 6 Signál $x[n]$ o délce $N = 256$ vzorků obsahuje dvojici vzorků 3 a -1, která se neustále opakuje – dal by se vygenerovat např. jako $x[n] = 1 + 2\cos(\pi n)$. Analyzační signál o délce $N = 256$ obsahuje obsahuje obdélník o délce 50 vzorků:

$$a[n] = \begin{cases} 1 & \text{pro } 6 \le n \le 55 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

Určete koeficient podobnosti / korelace / síly projekce $c = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]a[n]$.

$c = 25 \cdot 3 + 25 \cdot (-1) = 50$

Příklad 7 Signál $x[n]$ o délce $N = 8$ vzorků má hodnoty $x[n] = [0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0,\ 0]$.
Určete koeficient $X[1]$ jeho diskrétní Fourierovy transformace (DFT) a napište jej ve **složkovém** tvaru. Pomůcka: $X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$. Výraz $\frac{1}{\sqrt{2}}$ můžete zapsat jako q.

$X[1] = q - jq - j - q - jq - 1 = -1 - (1+2q)j = -1 - 2{,}41j$

Příklad 8 Napište kód v C pro výpočet diskrétní Fourierovy transformace (DFT). Vstupní signál $x[n]$ je reálný a je v poli `x`, které má `N` vzorků. Reálné složky koeficientů $X[k]$ nechť jsou v poli `Xre` a imaginární v poli `Xim`. O alokaci polí se nemusíte starat. Můžete použí funkce `cos` a `sin`, ale ne funkce pracující s komplexními čísly. Kód nemusíte nijak optimalizovat, 2 zanořené cykly jsou OK.

```
for (k=0; k<N; k++) {
  Xre[k] = 0.0; Xim[k] = 0.0;
  for (n=0; n<N; n++) {
    Xre[k] += x[n] * cos(2*PI/N*k*n);
    Xim[k] -= x[n] * sin(2*PI/N*k*n);
  }
}
```

Příklad 9 Vzorkovací frekvence je $F_s = 16000$ Hz. Počet vzorků signálu (a tedy i koeficientů DFT) je $N = 160$ Vypočtěte frekvenční rozlišení (vzdálenost mezi vedlejšími koeficienty $X[k]$ a $X[k+1]$) v Hertzích.

rozlišení $= F_s/N = 100$ Hz

Příklad 10 Napište pseudokód nebo kód v Pythonu nebo jazyce C pro generování $N = 10000$ vzorků analyzačního signálu $a[n] = e^{j\omega n}$ Fourierovy transformace s diskrétním časem (DTFT) $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\omega n}$ tak, abychom analyzovali frekvenci $f = 820$ Hz. Vzorkovací frekvence je $F_s = 16000$ Hz. Funkce `exp` zde umí pracovat s komplexními čísly.

```
f = 820
N = 10000; Fs = 16000
n = np.arange(0, N)
an = exp(1j * 2*np.pi*f/Fs * n)
```

normalizovaná kruhová frekvence ω

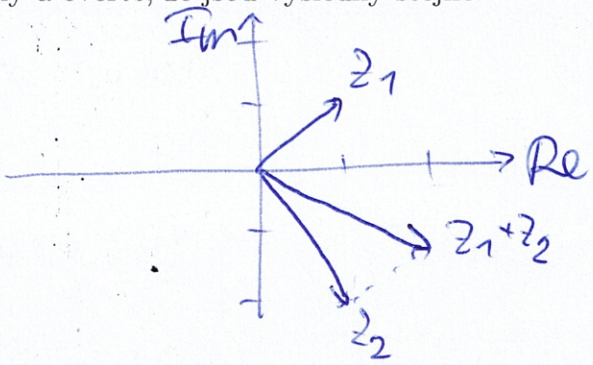
bereme i výsledky s mínusem :)

Půlsemestrální zkouška ISS, 22.10.2024, zadání B

REF

Login: ..... Příjmení a jméno: ..... Podpis: .....
(prosím čitelně!)

Příklad 1 Nakreslete komplexní čísla $z_1 = 1 + j$ a $z_2 = 1 - 2j$ do komplexní roviny jako vektory a sečtěte je jako vektory. Vypočtěte součet také numericky a ověřte, že jsou výsledky stejné.



$z_1 + z_2 =$ ..... $1+j+1-2j = 2-j$

Příklad 2 Vynásobte komplexní čísla $z_1 = 3e^{j\frac{\pi}{4}}$ a $z_2 = 4e^{j\frac{\pi}{4}}$ a napište výsledek v exponenciálním tvaru.

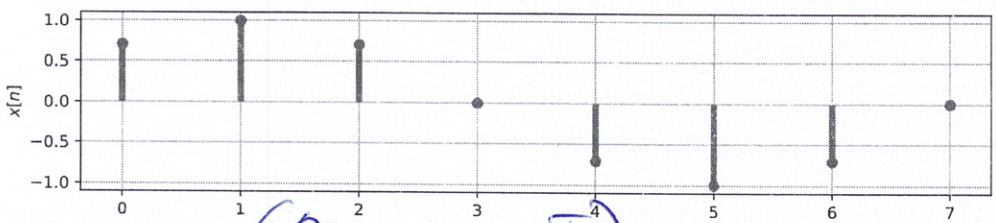
viz A

$z_1 z_2 =$ ..... $12\, e^{j\frac{\pi}{2}}$

Příklad 3 Odvoďte vztahy pro reálnou a imaginární složku součtu dvou komplexně sdružených čísel: $z + z^*$

viz A

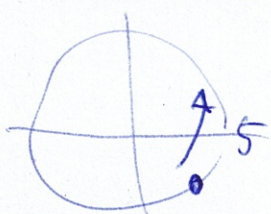
Příklad 4 Napište vztah pro diskrétní cosinusovku na obrázku.



zpoždění o 1/8 periody → o $\pi/4$

$x[n] =$ ..... $\cos\left(\frac{2\pi}{8}n - \frac{\pi}{4}\right)$

Příklad 5 Do tabulky zapište hodnoty komplexní exponenciály $x[n] = 5e^{-j\frac{\pi}{4}} e^{j2\pi\frac{1}{8}n}$ ve složkovém tvaru pro $n = 0 \ldots 7$. Pro jednoduchost zapisujte $\frac{5}{\sqrt{2}}$ jako q.



n	0	1	2	3	4	5	6	7
$x[n]$	$q-jq$	5	$q+jq$	$5j$	$-q+jq$	-5	$-q-jq$	$-5j$

B

Příklad 6 Signál $x[n]$ o délce $N = 256$ vzorků obsahuje dvojici vzorků 3 a -1, která se neustále opakuje – dal by se vygenerovat např. jako $x[n] = 1 + 2\cos(\pi n)$. Analyzační signál o délce $N = 256$ obsahuje obsahuje obdélník o délce 50 vzorků:

$$a[n] = \begin{cases} 1 & \text{pro } 10 \leq n \leq 59 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}.$$

viz A

Určete koeficient podobnosti / korelace / síly projekce $c = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]a[n]$.

$c = 50$

Příklad 7 Signál $x[n]$ o délce $N = 8$ vzorků má hodnoty $x[n] = [0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0,\ 0]$.
Určete koeficient $X[1]$ jeho diskrétní Fourierovy transformace (DFT) a napište jej ve **složkovém** tvaru. Pomůcka: $X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$. Výraz $\frac{1}{\sqrt{2}}$ můžete zapsat jako q.

$X[1] = -j - q - jq - 1 - q + jq = -(1+2q) - j = -2{,}41 - j$

Příklad 8 Napište kód v C pro výpočet diskrétní Fourierovy transformace (DFT). Vstupní signál $x[n]$ je reálný a je v poli `x`, které má `N` vzorků. Reálné složky koeficientů $X[k]$ nechť jsou v poli `Xre` a imaginární v poli `Xim`. O alokaci polí se nemusíte starat. Můžete použí funkce `cos` a `sin`, ale ne funkce pracující s komplexními čísly. Kód nemusíte nijak optimalizovat, 2 zanořené cykly jsou OK.

viz A

Příklad 9 Vzorkovací frekvence je $F_s = 16000$ Hz. Počet vzorků signálu (a tedy i koeficientů DFT) je $N = 200$ Vypočtěte frekvenční rozlišení (vzdálenost mezi vedlejšími koeficienty $X[k]$ a $X[k+1]$) v Hertzích.

rozlišení = F_s/N = 80 Hz

Příklad 10 Napište pseudokód nebo kód v Pythonu nebo jazyce C pro generování $N = 10000$ vzorků analyzačního signálu $a[n] = e^{j\omega n}$ Fourierovy transformace s diskrétním časem (DTFT) $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\omega n}$ tak, abychom analyzovali frekvenci $f = 450$ Hz. Vzorkovací frekvence je $F_s = 16000$ Hz. Funkce `exp` zde umí pracovat s komplexními čísly.

$f = 450$

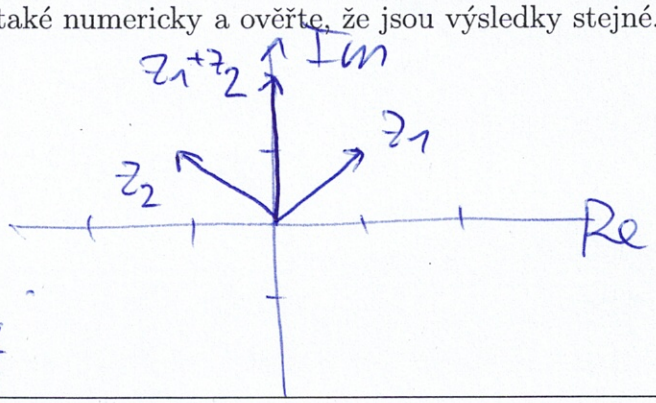
viz A

Půlsemestrální zkouška ISS, 22.10.2024, zadání C

RET

Login: ..... Příjmení a jméno: ..... Podpis: .....
(prosím čitelně!)

Příklad 1 Nakreslete komplexní čísla $z_1 = 1 + j$ a $z_2 = -1 + j$ do komplexní roviny jako vektory a sečtěte je jako vektory. Vypočtěte součet také numericky a ověřte, že jsou výsledky stejné.



$z_1 + z_2 =$ $1+j-1+j = 2j$

Příklad 2 Vynásobte komplexní čísla $z_1 = 3e^{j\frac{\pi}{4}}$ a $z_2 = 4e^{-j\frac{\pi}{2}}$ a napište výsledek v exponenciálním tvaru.

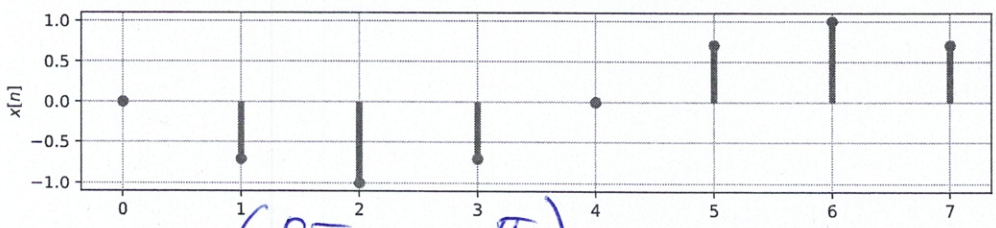
viz A

$z_1 z_2 =$ $12 \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}}$

Příklad 3 Odvoďte vztahy pro reálnou a imaginární složku součtu dvou komplexně sdružených čísel: $z + z^\star$

viz A

Příklad 4 Napište vztah pro diskrétní cosinusovku na obrázku.

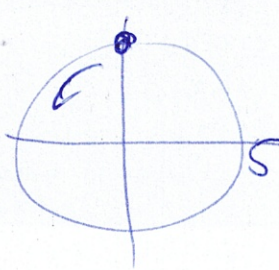


předběhnutí o 1/4 periody → $\pi/2$

$x[n] =$ $\cos\left(\frac{2\pi}{8}n + \frac{\pi}{2}\right)$

Příklad 5 Do tabulky zapište hodnoty komplexní exponenciály $x[n] = 5e^{j\frac{\pi}{2}}e^{j2\pi\frac{1}{8}n}$ ve složkovém tvaru pro $n = 0 \ldots 7$. Pro jednoduchost zapisujte $\frac{5}{\sqrt{2}}$ jako q.

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$x[n]$	$5j$	$-q+jq$	-5	$-q-jq$	$-5j$	$q-jq$	5	$q+jq$



Příklad 6 Signál $x[n]$ o délce $N = 256$ vzorků obsahuje dvojici vzorků 3 a -1, která se neustále opakuje – dal by se vygenerovat např. jako $x[n] = 1 + 2\cos(\pi n)$. Analyzační signál o délce $N = 256$ obsahuje obsahuje obdélník o délce 50 vzorků:

$$a[n] = \begin{cases} 1 & \text{pro } 100 \leq n \leq 149 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

viz A

Určete koeficient podobnosti / korelace / síly projekce $c = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]a[n]$.

$c = 50$

Příklad 7 Signál $x[n]$ o délce $N = 8$ vzorků má hodnoty $x[n] = [0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 0]$.
Určete koeficient $X[1]$ jeho diskrétní Fourierovy transformace (DFT) a napište jej ve **složkovém** tvaru. Pomůcka: $X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$. Výraz $\frac{1}{\sqrt{2}}$ můžete zapsat jako q.

$X[1] = -q - jq - 1 - q + jq + j = -(1+2q) + j = -2{,}41 + j$

Příklad 8 Napište kód v C pro výpočet diskrétní Fourierovy transformace (DFT). Vstupní signál $x[n]$ je reálný a je v poli `x`, které má `N` vzorků. Reálné složky koeficientů $X[k]$ nechť jsou v poli `Xre` a imaginární v poli `Xim`. O alokaci polí se nemusíte starat. Můžete použí funkce `cos` a `sin`, ale ne funkce pracující s komplexními čísly. Kód nemusíte nijak optimalizovat, 2 zanořené cykly jsou OK.

viz A

Příklad 9 Vzorkovací frekvence je $F_s = 16000$ Hz. Počet vzorků signálu (a tedy i koeficientů DFT) je $N = 400$ Vypočtěte frekvenční rozlišení (vzdálenost mezi vedlejšími koeficienty $X[k]$ a $X[k+1]$) v Hertzích.

rozlišení = F_s/N = 40 Hz

Příklad 10 Napište pseudokód nebo kód v Pythonu nebo jazyce C pro generování $N = 10000$ vzorků analyzačního signálu $a[n] = e^{j\omega n}$ Fourierovy transformace s diskrétním časem (DTFT) $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\omega n}$ tak, abychom analyzovali frekvenci $f = 1145$ Hz. Vzorkovací frekvence je $F_s = 16000$ Hz. Funkce `exp` zde umí pracovat s komplexními čísly.

$f = 1145$

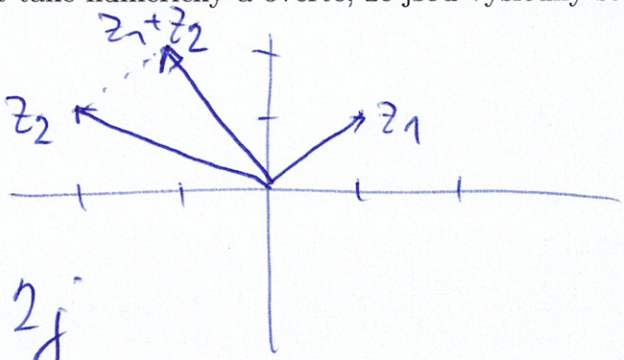
viz A

Půlsemestrální zkouška ISS, 22.10.2024, zadání D

REF

Login: ..... Příjmení a jméno: ..... Podpis: .....
(prosím čitelně!)

Příklad 1 Nakreslete komplexní čísla $z_1 = 1 + j$ a $z_2 = -2 + j$ do komplexní roviny jako vektory a sečtěte je jako vektory. Vypočtěte součet také numericky a ověřte, že jsou výsledky stejné.



$z_1 + z_2 =$ $1+j-2+j = -1+2j$

Příklad 2 Vynásobte komplexní čísla $z_1 = 3e^{j\frac{\pi}{4}}$ a $z_2 = 4e^{-j\frac{\pi}{4}}$ a napište výsledek v exponenciálním tvaru.

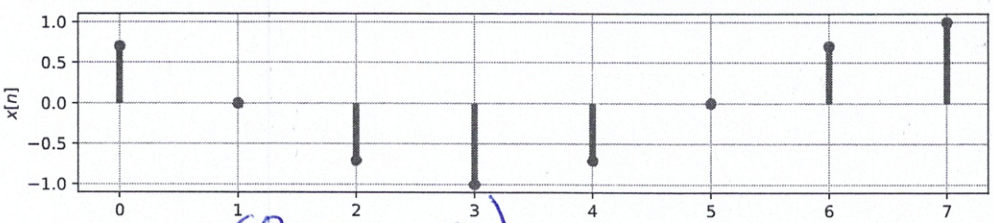
viz A

$z_1 z_2 =$ $12 \cdot e^{j0} = 12$

Příklad 3 Odvoďte vztahy pro reálnou a imaginární složku součtu dvou komplexně sdružených čísel: $z + z^\star$

viz A

Příklad 4 Napište vztah pro diskrétní cosinusovku na obrázku.

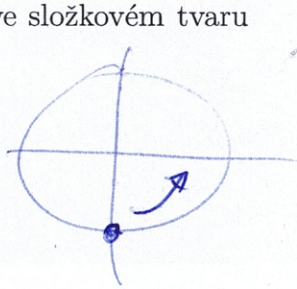


posbehnutí o 1/8 periody → $\pi/4$

$x[n] =$ $\cos\left(\frac{2\pi}{8}n + \frac{\pi}{4}\right)$

Příklad 5 Do tabulky zapište hodnoty komplexní exponenciály $x[n] = 5e^{-j\frac{\pi}{2}} e^{j2\pi\frac{1}{8}n}$ ve složkovém tvaru pro $n = 0 \ldots 7$. Pro jednoduchost zapisujte $\frac{5}{\sqrt{2}}$ jako q.

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$x[n]$	$-5j$	$q-jq$	5	$q+jq$	$5j$	$-q+jq$	-5	$-q-jq$



Příklad 6 Signál $x[n]$ o délce $N = 256$ vzorků obsahuje dvojici vzorků 3 a -1, která se neustále opakuje – dal by se vygenerovat např. jako $x[n] = 1 + 2\cos(\pi n)$. Analyzační signál o délce $N = 256$ obsahuje obsahuje obdélník o délce 50 vzorků:

$$a[n] = \begin{cases} 1 & \text{pro } 150 \leq n \leq 199 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}.$$

viz A

Určete koeficient podobnosti / korelace / síly projekce $c = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]a[n]$.

$c = 50$

Příklad 7 Signál $x[n]$ o délce $N = 8$ vzorků má hodnoty $x[n] = [0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1]$.
Určete koeficient $X[1]$ jeho diskrétní Fourierovy transformace (DFT) a napište jej ve **složkovém** tvaru.
Pomůcka: $X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$. Výraz $\frac{1}{\sqrt{2}}$ můžete zapsat jako q.

$X[1] = -j - q + jq + j + q + jq = +2jq = \sqrt{2}j - 1,41j$

Příklad 8 Napište kód v C pro výpočet diskrétní Fourierovy transformace (DFT). Vstupní signál $x[n]$ je reálný a je v poli `x`, které má `N` vzorků. Reálné složky koeficientů $X[k]$ nechť jsou v poli `Xre` a imaginární v poli `Xim`. O alokaci polí se nemusíte starat. Můžete použí funkce `cos` a `sin`, ale ne funkce pracující s komplexními čísly. Kód nemusíte nijak optimalizovat, 2 zanořené cykly jsou OK.

$= -1 - q + jq + j + q + jq = -1 + (1 + 2q)j =$
$= -1 + 2,41j$

viz A

Příklad 9 Vzorkovací frekvence je $F_s = 16000$ Hz. Počet vzorků signálu (a tedy i koeficientů DFT) je $N = 800$ Vypočtěte frekvenční rozlišení (vzdálenost mezi vedlejšími koeficienty $X[k]$ a $X[k+1]$) v Hertzích.

rozlišení $= F_s/N = 20$ Hz

Příklad 10 Napište pseudokód nebo kód v Pythonu nebo jazyce C pro generování $N = 10000$ vzorků analyzačního signálu $a[n] = e^{j\omega n}$ Fourierovy transformace s diskrétním časem (DTFT) $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-j\omega n}$ tak, abychom analyzovali frekvenci $f = 2024$ Hz. Vzorkovací frekvence je $F_s = 16000$ Hz. Funkce `exp` zde umí pracovat s komplexními čísly.

$f = 2024$

viz A