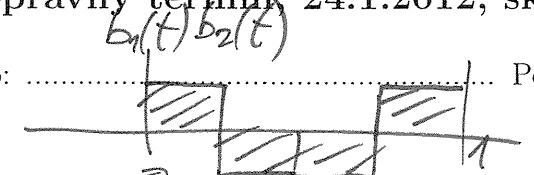
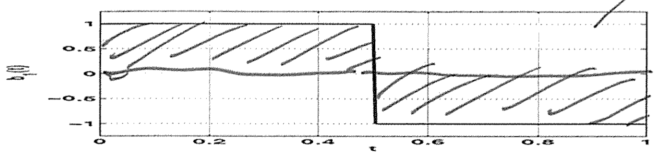
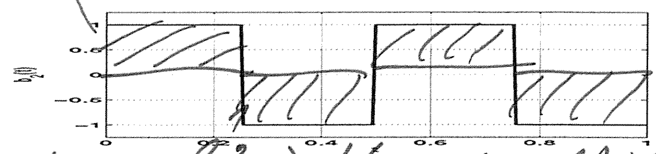
Semestrální zkouška ISS, 1. opravný termín, 24.1.2012, skupina A REF A



Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: ....
(čitelně!)

Příklad 1 Signál je rozkládán v intervalu $t \in [0,\ 1]$ do bází $b_1(t)$ a $b_2(t)$, které jsou na obrázcích.





Určete, zda jsou tyto báze ortonormální. normální: $\int_0^1 b^2(t)\,dt = 1$ ANO

Odpověď: ....ANO....................... ortogonální $\int_0^1 b_1(t) b_2(t)\,dt = 0$ ANO

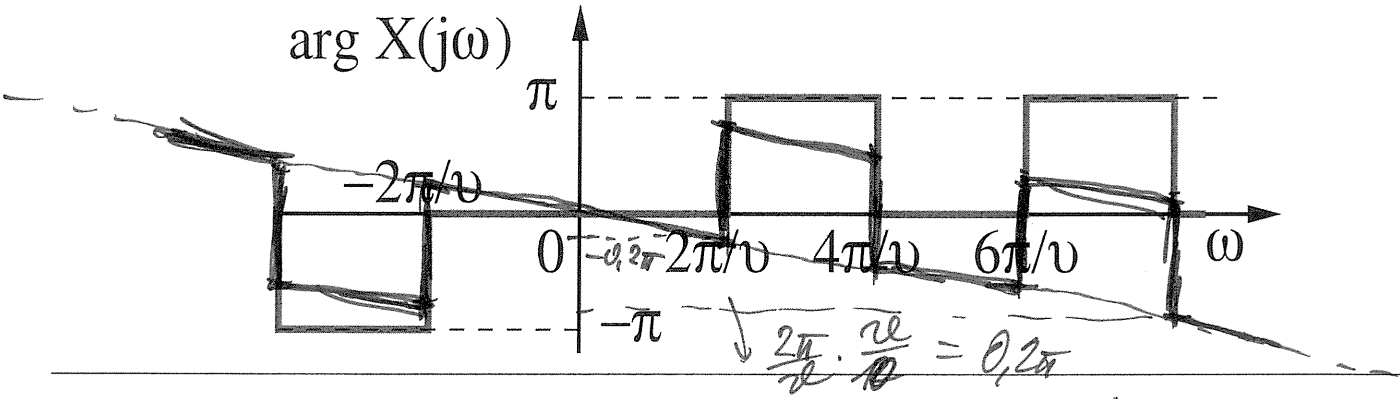
Příklad 2 Spektrální funkce signálu se spojitým časem je $X(j\omega) = 12\pi\delta(\omega - 4)$. Napište signál odpovídající této spektrální funkci. Upozornění: zvažte pečlivě, zda bude signál reálný...

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)\,e^{j\omega t}\,d\omega = \frac{12\pi}{2\pi}\,e^{j4t}$$

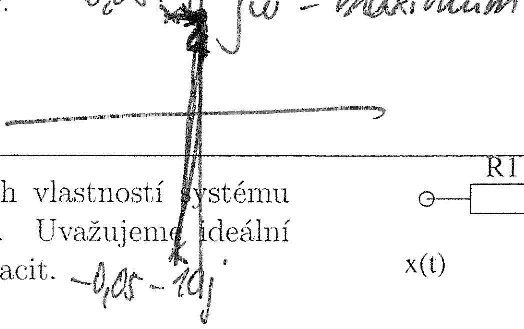
$x(t) =$ ......$6\,e^{j4t}$......

Příklad 3 Na obrázku je argument spektrální funkce $X(j\omega)$ signálu $x(t)$. Nakreslete do stejného obrázku argument spektrální funkce $Y(j\omega)$ signálu $y(t)$, který vznikl posunutím signálu $x(t)$ takto: $y(t) = x(t - \frac{\vartheta}{10})$.

$Y(j\omega) = X(j\omega)\,e^{-j\omega\frac{\vartheta}{10}}$ změna argumentu: $-\omega\frac{\vartheta}{10}$

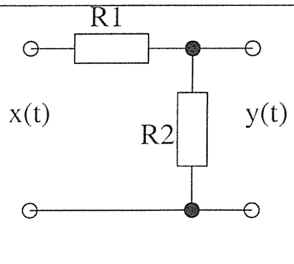


Příklad 4 Systém se spojitým časem má přenosovou funkcí $H(s) = \frac{1}{s^2+0.1s+100.0025}$
Určete jeho rezonanční frekvenci (polohu maxima jeho kmitočtové charakteristiky pro $\omega > 0$). Pomůcka: póly jmenovatele leží v $p_{1,2} = -0.05 \pm j10$.



$\omega_{max} =$ ......10...... rad/s

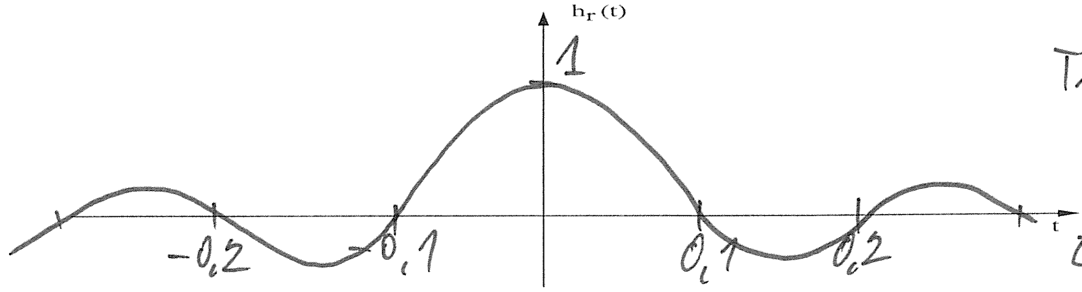
Příklad 5 Zaškrtněte ANO/NE u všech vlastností systému se spojitým časem — odporového děliče. Uvažujeme ideální odpory bez parazitních indukčností či kapacit.



Lineární — ANO / NE
Časově invariantní — ANO / NE
S pamětí — ANO / NE
Kauzální — ANO / NE

A

Příklad 6 Nakreslete impulsní odezvu $h_r(t)$ ideálního rekonstrukčního filtru pro rekonstrukci diskrétního signálu vzorkovaného na F_s =10 kHz. Označte přesně alespoň dva důležité body na časové ose.



$T_1 = \frac{1}{10000} =$

$0{,}1 ms$

Příklad 7 Je analyzován signál se vzorkovací frekvencí F_s =192 kHz. Počítáme DFT s počtem N = 24000 vzorků. Určete frekvenční rozlišení DFT, tedy vzdálenost mezi koeficienty $X[k]$ a $X[k+1]$ na standardní kmitočtové ose v Hz.

$$\frac{Fs}{N} = \frac{192\cancel{000}}{24\cancel{000}} = 8$$

..........8.......... Hz.

Příklad 8 Diskrétní cosinusovka je násobena okénkovou funkcí:

$$x[n] = R_{20}[n]\cos\left(\frac{2\pi n}{20}\right)$$

Určete hodnotu signálu $x[n]$ pro zadaný vzorek n: 30 je mimo okno.

$x[30]$ = ...0..........

Příklad 9 Fourierova transformace s diskrétním časem (DTFT) **reálného** signálu $x[n]$ má na normované kruhové frekvenci $\omega_1 = 0.05\pi$ rad hodnotu $\tilde{X}(e^{j\omega_1}) = 1 + j$.
Určete hodnotu $\tilde{X}(e^{j\omega_2})$ pro frekvenci $\omega_2 = 1.95\pi$ rad
Pokud to nejde, napište "nelze určit".

periodicita s 2π
symetrie ω a $-\omega$ ⇒
komplexně sdružené hodnoty

$\tilde{X}(e^{j\omega_2})$ = $(1+j)^* = 1-j$

Příklad 10 Napište diskrétní Fourierovu transformaci DFT s $N = 4$ jako násobení matice a vektoru: $\mathbf{X} = \mathbf{W}\mathbf{x}$. Vektor $\mathbf{x}$ je sloupcový a obsahuje vzorky vstupu $x[0] \ldots x[3]$. Vektor $\mathbf{X}$ je také sloupcový a obsahuje DFT koeficienty $X[0] \ldots X[3]$. Matice $\mathbf{W}$ má rozměr 4×4, doplnit její koeficienty je Vaším úkolem.

$$X[k] = \sum_{n=0}^{3} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{4}kn} = \sum_{n=0}^{3} x[n] e^{-j\frac{\pi}{2}kn}$$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & j & -1 & -j \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

$k=0$: $e^{-j\frac{\pi}{2}0n} = 1$

$k=1$: $e^{-j\frac{\pi}{2}n}$

$k=2$: $e^{-j\pi n}$

$k=3$: $e^{-j\frac{3\pi}{2}n}$

A

Příklad 11 Diskrétní signál $x[n]$ o délce $N = 16$ vzorků byl kruhově posunut:

$$y[n] = R_{16}(n)x[\mathrm{mod}_{16}(n-2)]$$

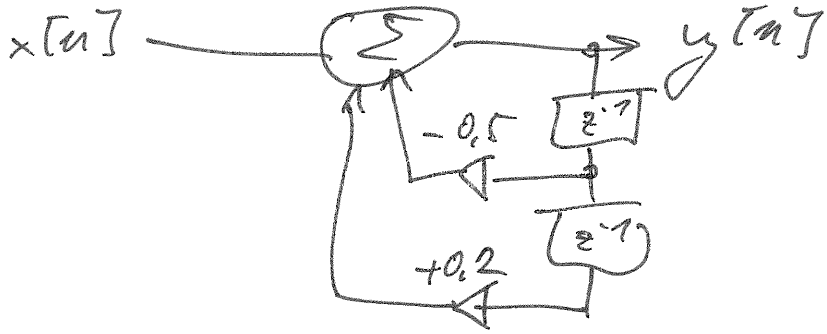
Napište vztah pro výpočet jeho k-tého koeficientu DFT z k-tého koeficientu DFT signálu $x[n]$. Do vztahu dosaďte všechny známé hodnoty proměnných a co nejvíce jej zjednodušte.

$Y[k] = X[k]e^{-j\frac{2\pi}{N}mk}$ posunutí $= X[k]e^{-j\frac{2\pi}{16}\cdot 2k} =$

$= X[k]e^{-j\frac{\pi}{4}k}$

$Y[k] =$ ....$e^{-jk\frac{\pi}{4}}$.... $X[k]$.

Příklad 12 Napište začátek impulsní odezvy IIR filtru s přenosovou funkcí $H(z) = \frac{1}{1+0.5z^{-1}-0.2z^{-2}}$.



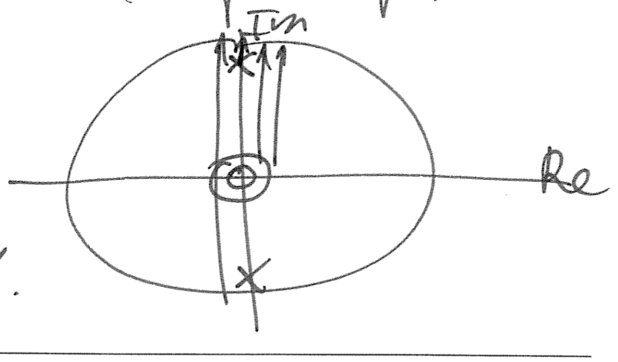
n	0	1	2
$h[n]$	1	−0,5	0,45

Příklad 13 Určete argument frekvenční charakteristiky číslicového filtru s přenosovou funkcí

$$H(z) = \frac{1}{1+0.9801z^{-2}} = \frac{(z-0)(z-0)}{(z-p_1)(z-p_2)}$$

na normované kruhové frekvenci $\omega_1 = \frac{\pi}{2}$ rad.
Pomůcka: kořeny polynomu $z^2 + 0.9801$ jsou $0.99e^{\pm j\frac{\pi}{2}}$

úhly všech vektorů jsou $\frac{\pi}{2}$.



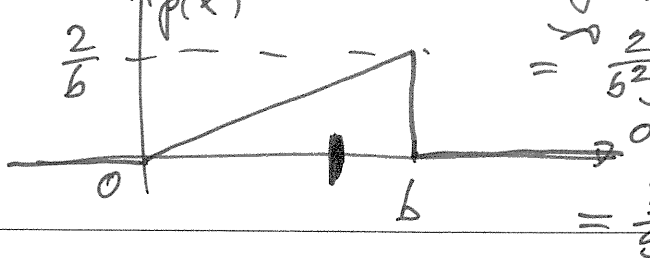
$\arg H(e^{j\omega_1}) =$ $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$ rad.

Příklad 14 Diskrétní signál $x[n]$ je Gaussovský bílý šum. Určete jeho autokorelační koeficient.

pouze $R[0]$ je nenulový.

$R[30] =$ ....0....

Příklad 15 Určete střední hodnotu stacionárního náhodného signálu, jehož funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti je definována jako $p(x) = \begin{cases} \frac{2}{b^2}x & \text{pro } x \in [0,\ b] \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$.



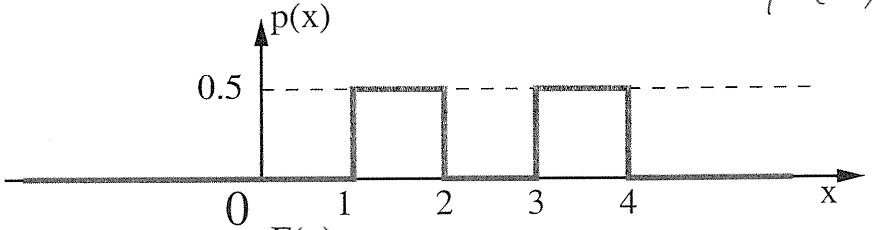
$a = \int x\,p(x)\,dx = \frac{2}{b^2}\int_0^b x^2\,dx = \frac{2}{b^2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^b = \frac{2}{b^2}\cdot\frac{b^3}{3}$

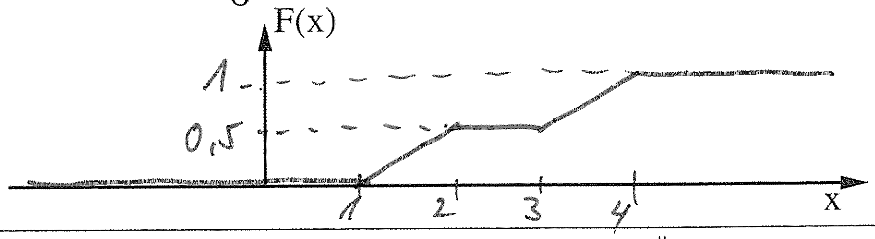
$a =$ ....$\frac{2}{3}b$....

A

Příklad 16 Je dána funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti $p(x)$ stacionárního náhodného signálu. Nakreslete distribuční funkci $F(x)$.

$$F(x) = \int_0^x p(g)\,dg$$





Příklad 17 Na $\Omega = 4000$ realizacích náhodného procesu byla naměřena tato tabulka (dvourozměrný histogram) hodnot mezi časy n_1 a n_2:

intervaly x_1	intervaly x_2 [-8, -4]	[-4, 0]	[0, 4]	[4, 8]
[4, 8]	0	0	0	0
[0, 4]	0	1500	0	0
[-4, 0]	0	0	1500	0
[-8, -4]	0	0	0	1000

Spočítejte autokorelační koeficient $R[n_1, n_2]$. Pomůcka: Jako reprezentativní hodnoty x_1 a x_2 při numerickém výpočtu integrálu $R[n_1, n_2] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2, n_1, n_2) dx_1 dx_2$ použijte středy intervalů v tabulce.

$$R[n_1, n_2] = \cancel{16} \; \frac{\overbrace{1500 \cdot 2 \cdot (-2)}^{-6000} + \overbrace{1500 \cdot 2 \cdot (-2)}^{-6000} + \overbrace{1000 \cdot 6 \cdot (-6)}^{-36000}}{4000 \cdot \cancel{16}} = \frac{-48000}{4000} = -12$$

Příklad 18 2D filtr (konvoluční jádro, maska) je matice 3×3. Navrhněte jeho koeficienty tak, aby filtr zvýrazňoval **svislé hrany** obrázku.

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

nebo jiné, které budou realizovat rozdíl ve vodorovném směru.

Příklad 19 Obrázek $x[k, l]$ má velikost 4×4. Čtyři pixely v levém horním rohu mají hodnotu jedna, tedy $x[0, 0] = x[0, 1] = x[1, 0] = x[1, 1] = 1$, ostatní jsou nulové.
Spočítejte koeficient jeho 2D-DFT $X[m, n]$ pro $m = 0$ a $n = 0$.

$$X[m,n] = \sum_{k=0}^{3}\sum_{l=0}^{3} x[k,l]\, e^{-j\frac{2\pi}{4}(k\underset{0}{m} + \underset{0}{n}l)} =$$

$$= \sum\sum x[k,l]\, e^0 = \text{součet pixelů}$$

$X[m, n] =$ 4

Příklad 20 Střední výkon užitečného signálu je $P_s = \frac{10000}{12}$. Kvantizační krok má velikost $\Delta = 100$ a velikosti kvantizační chyby jsou rovnoměrně rozděleny v intervalu $[-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}]$. Určete poměr signálu k šumu v dB.

$$P_e = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{100^2}{12}$$

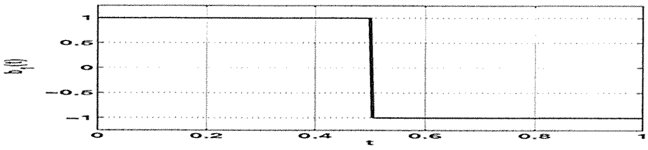
$$\text{SNR} = 10 \log_{10} \frac{P_s}{P_e} = 10 \log_{10} \frac{\frac{10000}{12}}{\frac{10000}{12}} = 10 \log_{10} 1 = 0 \text{ dB}$$

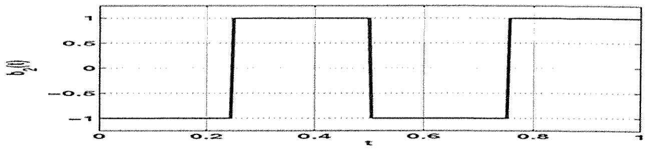
Viz také řešení A

Semestrální zkouška ISS, 1. opravný termín, 24.1.2012, skupina B REF B

Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: ....
(čitelně!)

Příklad 1 Signál je rozkládán v intervalu $t \in [0,\ 1]$ do bází $b_1(t)$ a $b_2(t)$, které jsou na obrázcích.





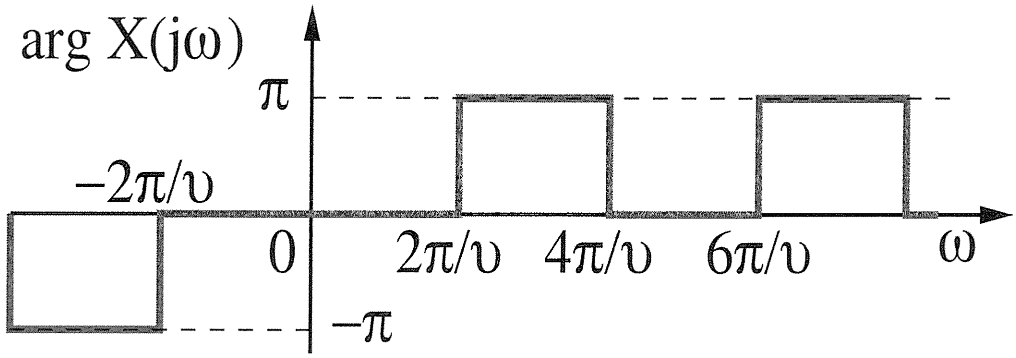
Určete, zda jsou tyto báze ortonormální.

Odpověď: ....ANO....

Příklad 2 Spektrální funkce signálu se spojitým časem je $X(j\omega) = 12\pi\delta(\omega - 5)$. Napište signál odpovídající této spektrální funkci. Upozornění: zvažte pečlivě, zda bude signál reálný...

$x(t) =$ $6\, e^{j5t}$

Příklad 3 Na obrázku je argument spektrální funkce $X(j\omega)$ signálu $x(t)$. Nakreslete do stejného obrázku argument spektrální funkce $Y(j\omega)$ signálu $y(t)$, který vznikl posunutím signálu $x(t)$ takto: $y(t) = x(t - \frac{\vartheta}{10})$.



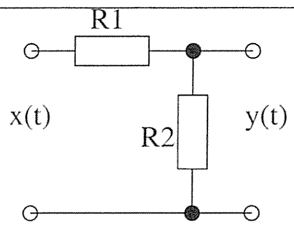
A

Příklad 4 Systém se spojitým časem má přenosovou funkcí $H(s) = \frac{1}{s^2+0.1s+100.0025}$
Určete jeho rezonanční frekvenci (polohu maxima jeho kmitočtové charakteristiky pro $\omega > 0$). Pomůcka: póly jmenovatele leží v $p_{1,2} = -0.05 \pm j10$.

A

$\omega_{max} =$................ rad/s

Příklad 5 Zaškrtněte ANO/NE u všech vlastností systému se spojitým časem — odporového děliče. Uvažujeme ideální odpory bez parazitních indukčností či kapacit.

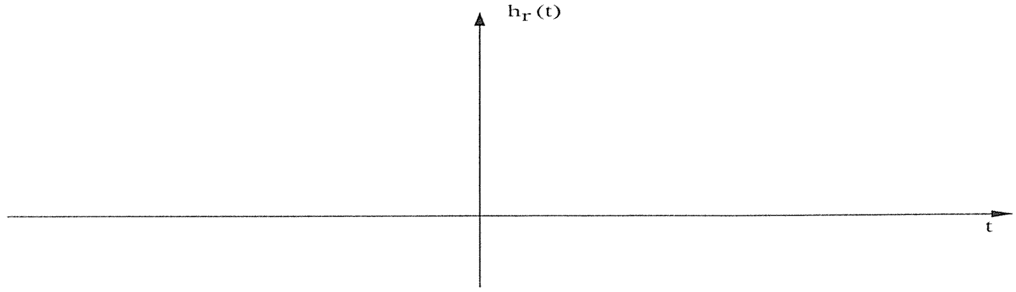


A

Lineární — ANO / NE
Časově invariantní — ANO / NE
S pamětí — ANO / NE
Kauzální — ANO / NE

B

Příklad 6 Nakreslete impulsní odezvu $h_r(t)$ ideálního rekonstrukčního filtru pro rekonstrukci diskrétního signálu vzorkovaného na F_s =10 kHz. Označte přesně alespoň dva důležité body na časové ose.



A

Příklad 7 Je analyzován signál se vzorkovací frekvencí F_s =48 kHz. Počítáme DFT s počtem N = 24000 vzorků. Určete frekvenční rozlišení DFT, tedy vzdálenost mezi koeficienty $X[k]$ a $X[k+1]$ na standardní kmitočtové ose v Hz.

$\frac{48000}{24000} = 2$ Hz

.... Hz.

Příklad 8 Diskrétní cosinusovka je násobena okénkovou funkcí:

$$x[n] = R_{20}[n] \cos\left(\frac{2\pi n}{20}\right)$$

Určete hodnotu signálu $x[n]$ pro zadaný vzorek n: vzorek 10 je uvnitř okénka

$x[10] =$ .... $\cos \frac{2\pi 10}{20} = \cos \pi = -1$

Příklad 9 Fourierova transformace s diskrétním časem (DTFT) **reálného** signálu $x[n]$ má na normované kruhové frekvenci $\omega_1 = 0.05\pi$ rad hodnotu $\tilde{X}(e^{j\omega_1}) = 1 + j$.
Určete hodnotu $\tilde{X}(e^{j\omega_2})$ pro frekvenci $\omega_2 = -1.05\pi$ rad — nejde použít symetrie ani periodicita
Pokud to nejde, napište "nelze určit".

$\tilde{X}(e^{j\omega_2}) =$ .... NEJDE URČIT

Příklad 10 Napište diskrétní Fourierovu transformaci DFT s $N = 4$ jako násobení matice a vektoru: $\mathbf{X} = \mathbf{W}\mathbf{x}$. Vektor $\mathbf{x}$ je sloupcový a obsahuje vzorky vstupu $x[0] \ldots x[3]$. Vektor $\mathbf{X}$ je také sloupcový a obsahuje DFT koeficienty $X[0] \ldots X[3]$. Matice $\mathbf{W}$ má rozměr 4×4, doplnit její koeficienty je Vaším úkolem.

$$\mathbf{X} = \left[\quad \quad \quad \right] \mathbf{x}$$

A

B

Příklad 11 Diskrétní signál $x[n]$ o délce $N = 16$ vzorků byl kruhově posunut:

$$y[n] = R_{16}(n)x[\mathrm{mod}_{16}(n-4)]$$

Napište vztah pro výpočet jeho k-tého koeficientu DFT z k-tého koeficientu DFT signálu $x[n]$. Do vztahu dosaďte všechny známé hodnoty proměnných a co nejvíce jej zjednodušte.

$e^{-j\frac{2\pi}{16}4k} = e^{-j\frac{\pi}{2}k}$

$Y[k] =$ ..$e^{-jk\frac{\pi}{2}}$.. $X[k]$.

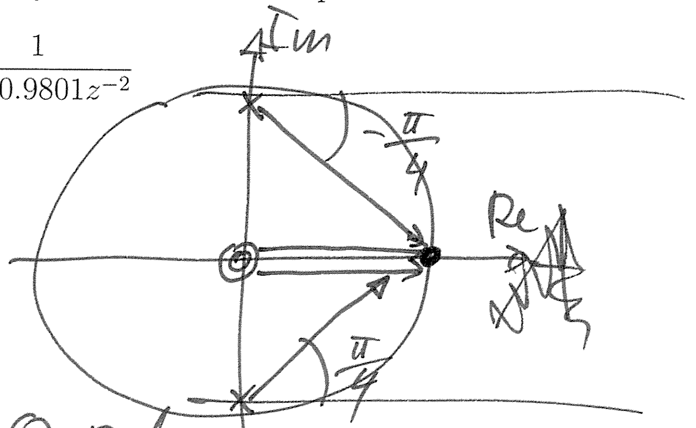
Příklad 12 Napište začátek impulsní odezvy IIR filtru s přenosovou funkcí $H(z) = \frac{1}{1-0.5z^{-1}-0.2z^{-2}}$.

n	0	1	2
$h[n]$	1	0,5	0,45

Příklad 13 Určete argument frekvenční charakteristiky číslicového filtru s přenosovou funkcí

$$H(z) = \frac{1}{1 + 0.9801z^{-2}}$$

na normované kruhové frekvenci $\omega_1 = 0$ rad.
Pomůcka: kořeny polynomu $z^2 + 0.9801$ jsou $0.99e^{\pm j\frac{\pi}{2}}$



$\arg H(e^{j\omega_1}) =$ ..$0+0-\left(-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{\pi}{4} = 0$ rad.. rad

---

Příklad 14 Diskrétní signál $x[n]$ je Gaussovský bílý šum. Určete jeho autokorelační koeficient.

$R[20] =$ ..0..

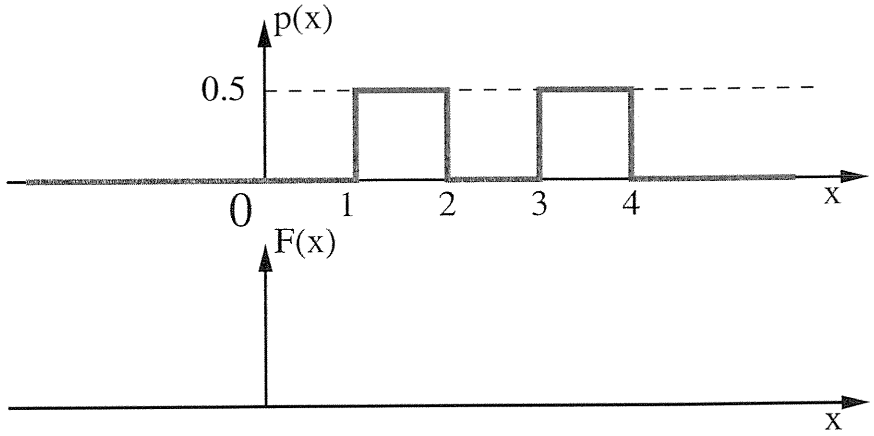
Příklad 15 Určete střední hodnotu stacionárního náhodného signálu, jehož funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti je definována jako $p(x) = \begin{cases} \frac{2}{b^2}x & \text{pro } x \in [0,\ b] \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$.

A

a = ...

B

Příklad 16 Je dána funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti $p(x)$ stacionárního náhodného signálu. Nakreslete distribuční funkci $F(x)$.



A

Příklad 17 Na $\Omega = 4000$ realizacích náhodného procesu byla naměřena tato tabulka (dvourozměrný histogram) hodnot mezi časy n_1 a n_2:

intervaly x_1	intervaly x_2 [-8, -4]	[-4, 0]	[0, 4]	[4, 8]
[4, 8]	0	0	0	0
[0, 4]	0	1500	0	0
[-4, 0]	0	0	1500	0
[-8, -4]	0	0	0	1000

Spočítejte autokorelační koeficient $R[n_1, n_2]$. Pomůcka: Jako reprezentativní hodnoty x_1 a x_2 při numerickém výpočtu integrálu $R[n_1, n_2] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2, n_1, n_2) dx_1 dx_2$ použijte středy intervalů v tabulce.

A

$R[n_1, n_2] =$ ....

Příklad 18 2D filtr (konvoluční jádro, maska) je matice 3×3. Navrhněte jeho koeficienty tak, aby filtr zvýrazňoval **svislé hrany** obrázku.

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

A

Příklad 19 Obrázek $x[k, l]$ má velikost 4×4. Čtyři pixely v levém horním rohu mají hodnotu jedna, tedy $x[0, 0] = x[0, 1] = x[1, 0] = x[1, 1] = 1$, ostatní jsou nulové. Spočítejte koeficient jeho 2D-DFT $X[m, n]$ pro $m = 1$ a $n = 0$.

$e^{-j\frac{2\pi}{4}(km + ln)} = e^{-j\frac{2\pi}{2}k}$ ($m = 1$, $n = 0$)

změna svisle

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots \\ 1 & 1 & \\ 0 & & \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots \\ -j & -j & \end{bmatrix}$$

$X[m, n] =$ ......$2 - 2j$......

Příklad 20 Střední výkon užitečného signálu je $P_s = \frac{10000}{12}$. Kvantizační krok má velikost $\Delta = 100$ a velikosti kvantizační chyby jsou rovnoměrně rozděleny v intervalu $[-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}]$. Určete poměr signálu k šumu v dB.

viz A

SNR = ...0...... dB

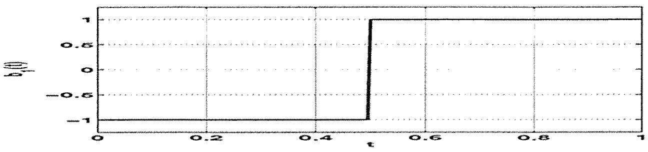
viz také řešení A

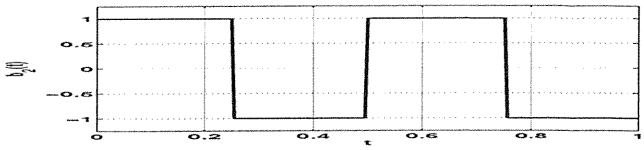
Semestrální zkouška ISS, 1. opravný termín, 24.1.2012, skupina C

REF

Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: ....
(čitelně!)

Příklad 1 Signál je rozkládán v intervalu $t \in [0,\ 1]$ do bází $b_1(t)$ a $b_2(t)$, které jsou na obrázcích.





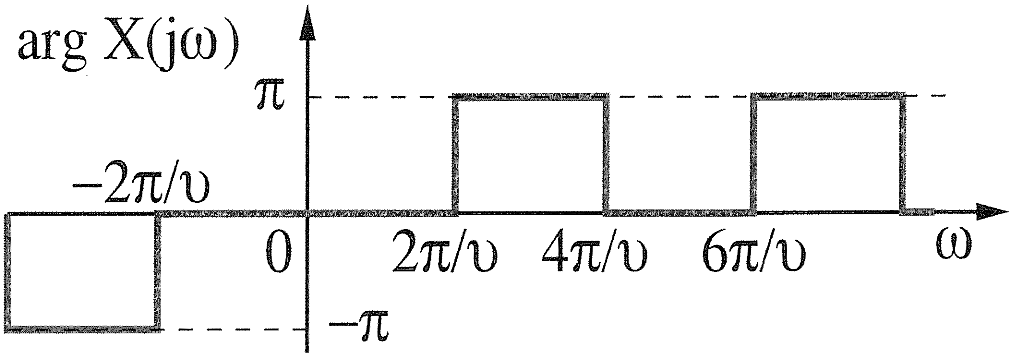
Určete, zda jsou tyto báze ortonormální.

Odpověď: ....ANO..........

Příklad 2 Spektrální funkce signálu se spojitým časem je $X(j\omega) = 12\pi\delta(\omega + 4)$. Napište signál odpovídající této spektrální funkci. Upozornění: zvažte pečlivě, zda bude signál reálný...

$x(t) =$......$6e^{-j4t}$......

Příklad 3 Na obrázku je argument spektrální funkce $X(j\omega)$ signálu $x(t)$. Nakreslete do stejného obrázku argument spektrální funkce $Y(j\omega)$ signálu $y(t)$, který vznikl posunutím signálu $x(t)$ takto: $y(t) = x(t - \frac{\vartheta}{10})$.



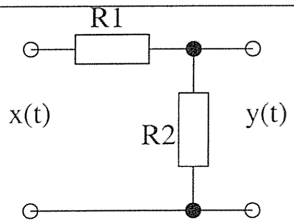
A

Příklad 4 Systém se spojitým časem má přenosovou funkci $H(s) = \frac{1}{s^2+0.1s+100.0025}$
Určete jeho rezonanční frekvenci (polohu maxima jeho kmitočtové charakteristiky pro $\omega > 0$). Pomůcka: póly jmenovatele leží v $p_{1,2} = -0.05 \pm j10$.

A

$\omega_{max} =$................ rad/s

Příklad 5 Zaškrtněte ANO/NE u všech vlastností systému se spojitým časem — odporového děliče. Uvažujeme ideální odpory bez parazitních indukčností či kapacit.

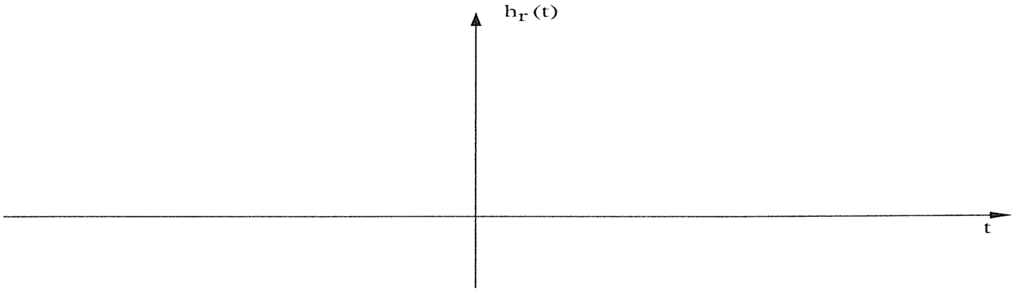


A

Lineární — ANO / NE
Časově invariantní — ANO / NE
S pamětí — ANO / NE
Kauzální — ANO / NE

Příklad 6 Nakreslete impulsní odezvu $h_r(t)$ ideálního rekonstrukčního filtru pro rekonstrukci diskrétního signálu vzorkovaného na F_s =10 kHz. Označte přesně alespoň dva důležité body na časové ose.

C



A

Příklad 7 Je analyzován signál se vzorkovací frekvencí F_s =96 kHz. Počítáme DFT s počtem N = 24000 vzorků. Určete frekvenční rozlišení DFT, tedy vzdálenost mezi koeficienty $X[k]$ a $X[k+1]$ na standardní kmitočtové ose v Hz.

$\frac{96000}{24000} = 4$ Hz

.... Hz.

Příklad 8 Diskrétní cosinusovka je násobena okénkovou funkcí:

$$x[n] = R_{20}[n] \cos\left(\frac{2\pi n}{20}\right)$$

Určete hodnotu signálu $x[n]$ pro zadaný vzorek n:

A

$x[40]$ = ...0..........

Příklad 9 Fourierova transformace s diskrétním časem (DTFT) **reálného** signálu $x[n]$ má na normované kruhové frekvenci $\omega_1 = 0.05\pi$ rad hodnotu $\tilde{X}(e^{j\omega_1}) = 1 + j$.
Určete hodnotu $\tilde{X}(e^{j\omega_2})$ pro frekvenci $\omega_2 = 2.05\pi$ rad — periodicita s 2π
Pokud to nejde, napište "nelze určit". ⇒ stejné.

$\tilde{X}(e^{j\omega_2})$ =..........$1+j$..........

Příklad 10 Napište diskrétní Fourierovu transformaci DFT s $N = 4$ jako násobení matice a vektoru: $\mathbf{X} = \mathbf{W}\mathbf{x}$. Vektor $\mathbf{x}$ je sloupcový a obsahuje vzorky vstupu $x[0] \dots x[3]$. Vektor $\mathbf{X}$ je také sloupcový a obsahuje DFT koeficienty $X[0] \dots X[3]$. Matice $\mathbf{W}$ má rozměr 4×4, doplnit její koeficienty je Vaším úkolem.

$$\mathbf{X} = \left[\quad\quad\quad\quad\quad\quad\right] \mathbf{x}$$

A

C

Příklad 11 Diskrétní signál $x[n]$ o délce $N = 16$ vzorků byl kruhově posunut:

$$y[n] = R_{16}(n)x[\mathrm{mod}_{16}(n-8)]$$

Napište vztah pro výpočet jeho k-tého koeficientu DFT z k-tého koeficientu DFT signálu $x[n]$. Do vztahu dosaďte všechny známé hodnoty proměnných a co nejvíce jej zjednodušte.

$e^{-j\frac{2\pi}{16}\cdot 8k} = e^{-j\pi k}$

$Y[k] =$ ....$e^{-j\pi k}$.... $X[k]$. nebo $(-1)^k X[k]$

Příklad 12 Napište začátek impulsní odezvy IIR filtru s přenosovou funkcí $H(z) = \frac{1}{1-0.5z^{-1}+0.2z^{-2}}$.

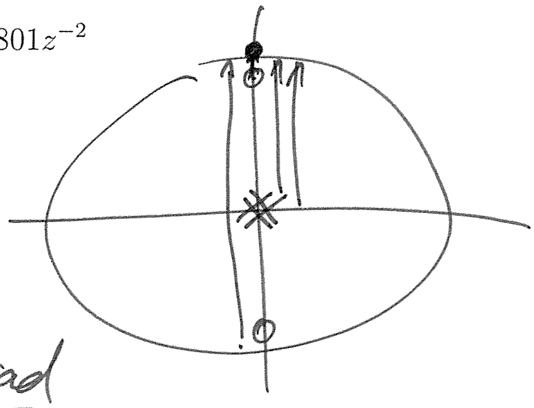
n	0	1	2
$h[n]$	1	0,5	0,05

Příklad 13 Určete argument frekvenční charakteristiky číslicového filtru s přenosovou funkcí

$$H(z) = 1 + 0.9801z^{-2}$$

na normované kruhové frekvenci $\omega_1 = \frac{\pi}{2}$ rad.
Pomůcka: kořeny polynomu $z^2 + 0.9801$ jsou $0.99e^{\pm j\frac{\pi}{2}}$

úhly všech vektorů jsou $\pi/2$



arg $H(e^{j\omega_1}) =$ ....$\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$ rad.... rad

Příklad 14 Diskrétní signál $x[n]$ je Gaussovský bílý šum. Určete jeho autokorelační koeficient.

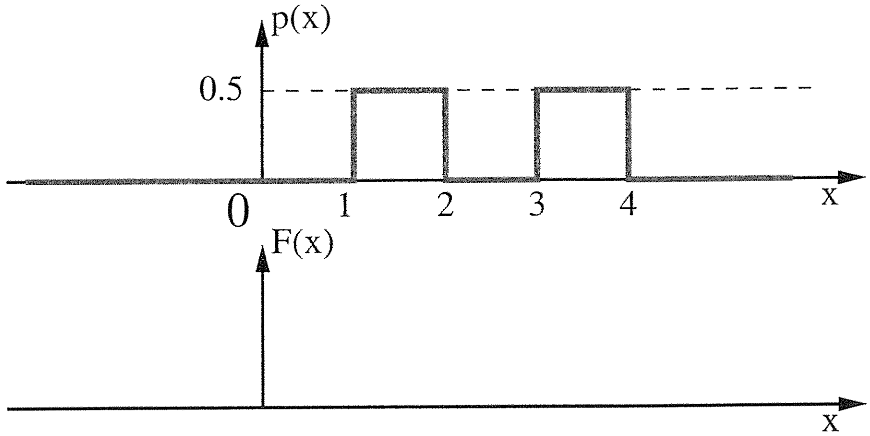
$R[10] =$ ....0....

Příklad 15 Určete střední hodnotu stacionárního náhodného signálu, jehož funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti je definována jako $p(x) = \begin{cases} \frac{2}{b^2}x & \text{pro } x \in [0,\ b] \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$.

A

a = ...

Příklad 16 Je dána funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti $p(x)$ stacionárního náhodného signálu. Nakreslete distribuční funkci $F(x)$.



A

Příklad 17 Na $\Omega = 4000$ realizacích náhodného procesu byla naměřena tato tabulka (dvourozměrný histogram) hodnot mezi časy n_1 a n_2:

intervaly x_1	intervaly x_2 [-8, -4]	[-4, 0]	[0, 4]	[4, 8]
[4, 8]	0	0	0	0
[0, 4]	0	1500	0	0
[-4, 0]	0	0	1500	0
[-8, -4]	0	0	0	1000

Spočítejte autokorelační koeficient $R[n_1, n_2]$. Pomůcka: Jako reprezentativní hodnoty x_1 a x_2 při numerickém výpočtu integrálu $R[n_1, n_2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2, n_1, n_2) dx_1 dx_2$ použijte středy intervalů v tabulce.

A

$R[n_1, n_2] =$ ....

Příklad 18 2D filtr (konvoluční jádro, maska) je matice 3×3. Navrhněte jeho koeficienty tak, aby filtr zvýrazňoval **svislé hrany** obrázku.

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

A

Příklad 19 Obrázek $x[k, l]$ má velikost 4×4. Čtyři pixely v levém horním rohu mají hodnotu jedna, tedy $x[0, 0] = x[0, 1] = x[1, 0] = x[1, 1] = 1$, ostatní jsou nulové. Spočítejte koeficient jeho 2D-DFT $X[m, n]$ pro $m = 1$ a $n = 1$.

$e^{-j\frac{2\pi}{4}(km+nl)} = e^{-j\frac{\pi}{2}(k+l)}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots \\ 1 & 1 & \\ \vdots & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -j & \cdots \\ -j & -1 & \\ \vdots & & \end{bmatrix}$$

$X[m, n] =$ ......$-2j$......

Příklad 20 Střední výkon užitečného signálu je $P_s = \frac{10000}{12}$. Kvantizační krok má velikost $\Delta = 10$ a velikosti kvantizační chyby jsou rovnoměrně rozděleny v intervalu $[-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}]$. Určete poměr signálu k šumu v dB.

viz D

SNR = ...20...... dB

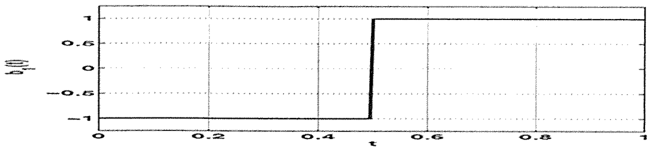
viz také řešení A

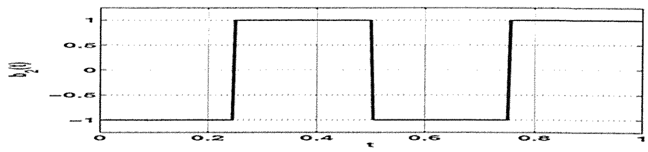
D

Semestrální zkouška ISS, 1. opravný termín, 24.1.2012, skupina D

Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: ....REF...
(čitelně!)

Příklad 1 Signál je rozkládán v intervalu $t \in [0,\ 1]$ do bází $b_1(t)$ a $b_2(t)$, které jsou na obrázcích.





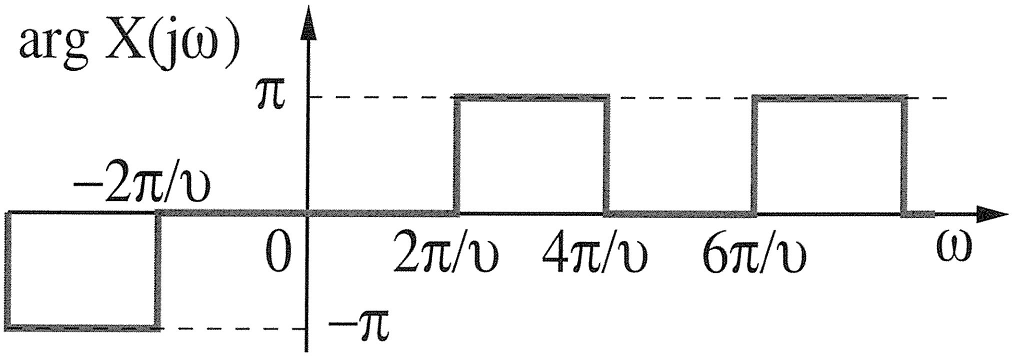
Určete, zda jsou tyto báze ortonormální.

Odpověď: ......ANO......

Příklad 2 Spektrální funkce signálu se spojitým časem je $X(j\omega) = 12\pi\delta(\omega + 2)$. Napište signál odpovídající této spektrální funkci. Upozornění: zvažte pečlivě, zda bude signál reálný...

$x(t) =$......$6e^{-j2t}$......

Příklad 3 Na obrázku je argument spektrální funkce $X(j\omega)$ signálu $x(t)$. Nakreslete do stejného obrázku argument spektrální funkce $Y(j\omega)$ signálu $y(t)$, který vznikl posunutím signálu $x(t)$ takto: $y(t) = x(t - \frac{\vartheta}{10})$.



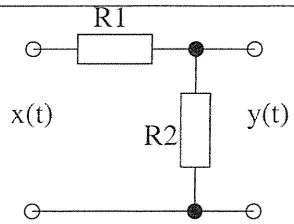
A

Příklad 4 Systém se spojitým časem má přenosovou funkcí $H(s) = \frac{1}{s^2+0.1s+100.0025}$
Určete jeho rezonanční frekvenci (polohu maxima jeho kmitočtové charakteristiky pro $\omega > 0$). Pomůcka: póly jmenovatele leží v $p_{1,2} = -0.05 \pm j10$.

A

$\omega_{max} =$................ rad/s

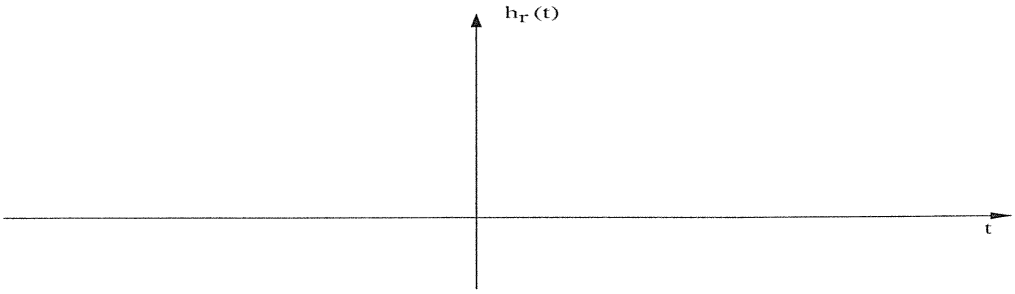
Příklad 5 Zaškrtněte ANO/NE u všech vlastností systému se spojitým časem — odporového děliče. Uvažujeme ideální odpory bez parazitních indukčností či kapacit.



A

Lineární — ANO / NE
Časově invariantní — ANO / NE
S pamětí — ANO / NE
Kauzální — ANO / NE

Příklad 6 Nakreslete impulsní odezvu $h_r(t)$ ideálního rekonstrukčního filtru pro rekonstrukci diskrétního signálu vzorkovaného na F_s =10 kHz. Označte přesně alespoň dva důležité body na časové ose.



A

Příklad 7 Je analyzován signál se vzorkovací frekvencí F_s =24 kHz. Počítáme DFT s počtem N = 24000 vzorků. Určete frekvenční rozlišení DFT, tedy vzdálenost mezi koeficienty $X[k]$ a $X[k+1]$ na standardní kmitočtové ose v Hz.

$\frac{24000}{24000} = 1$ Hz

.... Hz.

Příklad 8 Diskrétní cosinusovka je násobena okénkovou funkcí:

$$x[n] = R_{20}[n] \cos\left(\frac{2\pi n}{20}\right)$$

Určete hodnotu signálu $x[n]$ pro zadaný vzorek n:

$x[50] =$ ....0................

Příklad 9 Fourierova transformace s diskrétním časem (DTFT) **reálného** signálu $x[n]$ má na normované kruhové frekvenci $\omega_1 = 0.05\pi$ rad hodnotu $\tilde{X}(e^{j\omega_1}) = 1 + j$.
Určete hodnotu $\tilde{X}(e^{j\omega_2})$ pro frekvenci $\omega_2 = 2\pi + \cancel{0.05}$ rad
Pokud to nejde, napište "nelze určit".

nelze použít ani periodicitu ani symetrii

$\tilde{X}(e^{j\omega_2}) =$ Nelze určit

Příklad 10 Napište diskrétní Fourierovu transformaci DFT s $N = 4$ jako násobení matice a vektoru: $\mathbf{X} = \mathbf{W}\mathbf{x}$. Vektor $\mathbf{x}$ je sloupcový a obsahuje vzorky vstupu $x[0] \dots x[3]$. Vektor $\mathbf{X}$ je také sloupcový a obsahuje DFT koeficienty $X[0] \dots X[3]$. Matice $\mathbf{W}$ má rozměr 4×4, doplnit její koeficienty je Vaším úkolem.

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \quad & \quad & \quad & \quad \\ & & & \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

A

D

Příklad 11 Diskrétní signál $x[n]$ o délce $N = 16$ vzorků byl kruhově posunut:

$$y[n] = R_{16}(n)x[\mathrm{mod}_{16}(n-6)]$$

Napište vztah pro výpočet jeho k-tého koeficientu DFT z k-tého koeficientu DFT signálu $x[n]$. Do vztahu dosaďte všechny známé hodnoty proměnných a co nejvíce jej zjednodušte.

$e^{-j\frac{2\pi}{16}\cdot 6k} = e^{-j\frac{3}{4}\pi k}$

$Y[k] =$ ...$e^{-j\frac{3}{4}\pi k}$...$X[k]$.

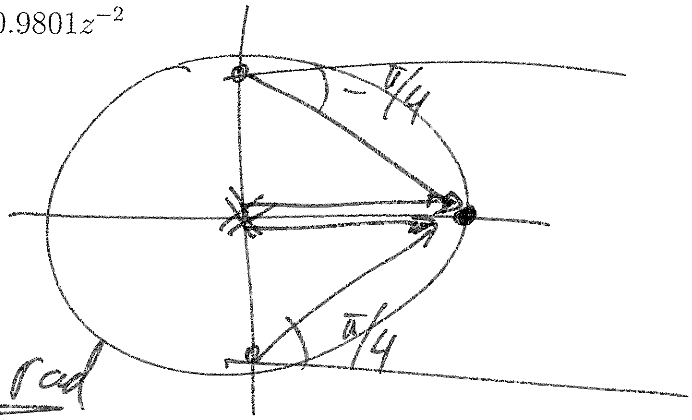
Příklad 12 Napište začátek impulsní odezvy IIR filtru s přenosovou funkcí $H(z) = \frac{1}{1+0.5z^{-1}+0.2z^{-2}}$.

n	0	1	2
$h[n]$	1	−0,5	0,05

Příklad 13 Určete argument frekvenční charakteristiky číslicového filtru s přenosovou funkcí

$$H(z) = 1 + 0.9801z^{-2}$$

na normované kruhové frekvenci $\omega_1 = 0$ rad.
Pomůcka: kořeny polynomu $z^2 + 0.9801$ jsou $0.99e^{\pm j\frac{\pi}{2}}$



$\arg H(e^{j\omega_1}) =$ ...$-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}-0-0=0$ rad... rad

Příklad 14 Diskrétní signál $x[n]$ je Gaussovský bílý šum. Určete jeho autokorelační koeficient.

$R[40] =$ ...0...

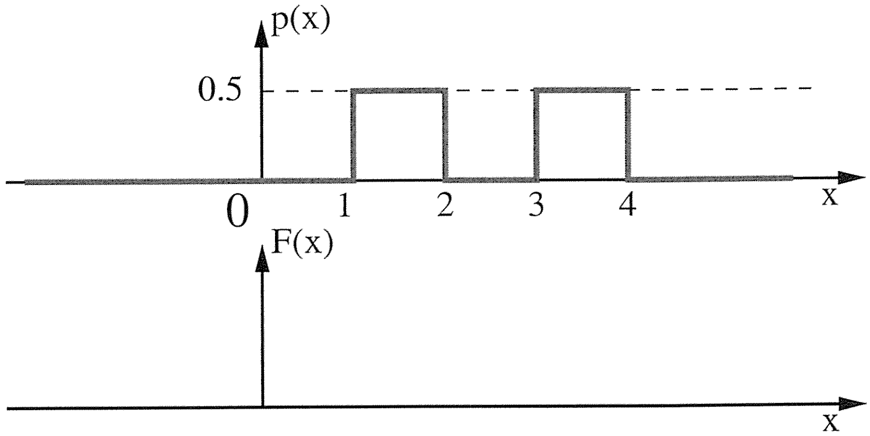
Příklad 15 Určete střední hodnotu stacionárního náhodného signálu, jehož funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti je definována jako $p(x) = \begin{cases} \frac{2}{b^2}x & \text{pro } x \in [0,\ b] \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$.

A

a = ...

D

Příklad 16 Je dána funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti $p(x)$ stacionárního náhodného signálu. Nakreslete distribuční funkci $F(x)$.



A

Příklad 17 Na $\Omega = 4000$ realizacích náhodného procesu byla naměřena tato tabulka (dvourozměrný histogram) hodnot mezi časy n_1 a n_2:

intervaly x_1	intervaly x_2 [-8, -4]	[-4, 0]	[0, 4]	[4, 8]
[4, 8]	0	0	0	0
[0, 4]	0	1500	0	0
[-4, 0]	0	0	1500	0
[-8, -4]	0	0	0	1000

Spočítejte autokorelační koeficient $R[n_1, n_2]$. Pomůcka: Jako reprezentativní hodnoty x_1 a x_2 při numerickém výpočtu integrálu $R[n_1, n_2] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2, n_1, n_2) dx_1 dx_2$ použijte středy intervalů v tabulce.

A

$R[n_1, n_2] =$ ....

Příklad 18 2D filtr (konvoluční jádro, maska) je matice 3×3. Navrhněte jeho koeficienty tak, aby filtr zvýrazňoval **svislé hrany** obrázku.

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \\ \\ \\ \end{bmatrix}$$

A

Příklad 19 Obrázek $x[k, l]$ má velikost 4×4. Čtyři pixely v levém horním rohu mají hodnotu jedna, tedy $x[0, 0] = x[0, 1] = x[1, 0] = x[1, 1] = 1$, ostatní jsou nulové.
Spočítejte koeficient jeho 2D-DFT $X[m, n]$ pro $m = 0$ a $n = 1$.

$e^{-j\frac{2\pi}{4}(km+nl)} = e^{-j\frac{\pi}{2}l}$ změna vodorovně

$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -j & \cdots \\ 1 & -j & \end{bmatrix}$

$X[m, n] =$ $\underline{2 - 2j}$

Příklad 20 Střední výkon užitečného signálu je $P_s = \frac{10000}{12}$. Kvantizační krok má velikost $\Delta = 10$ a velikosti kvantizační chyby jsou rovnoměrně rozděleny v intervalu $[-\frac{\Delta}{2}, \frac{\Delta}{2}]$. Určete poměr signálu k šumu v dB.

$P_e = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{10^2}{12}$

SNR = $10\log_{10} \frac{\frac{10000}{12}}{\frac{100}{12}}$ dB $= 10\log_{10} 100 = \underline{20\ dB}$