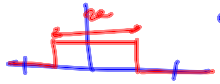
Příklad 1 Signál je periodický sled obdélníkových impulsů o periodě T_1, jejichž délka je $\vartheta = \frac{T_1}{3}$. Určete, které koeficienty jeho Fourierovy řady c_k budou nulové.

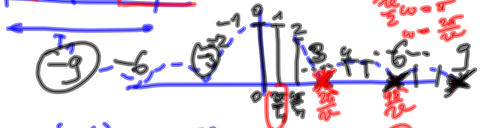
$c_k = \frac{D\vartheta}{T_1}\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\vartheta}{2}k\omega_1\right)$

$\mathrm{sinc}\left(\frac{\vartheta}{2}\omega\right)$

$\frac{\vartheta}{2}\omega = \pi$

$\omega = \frac{2\pi}{\vartheta}$





$\mathrm{sinc}(x)$ $x = \pi, 2\pi, \ldots$

$\frac{2\pi}{\frac{T_1}{3}} = \frac{6\pi}{T_1}$

Příklad 2 Napište signál odpovídající Fourierově řadě s jediným nenulovým koeficientem: $c_{-1} = 3$

$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_1 t} =$ $c_{-1} = 3$

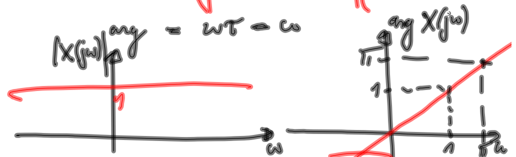
$= c_{-1} e^{j(-1)\omega_1 t} = 3e^{-j\omega_1 t}$

Příklad 3 Nakreslete modul a argument spektrální funkce posunutého Diracova impulsu: $x(t) = \delta(t+1)$

$\delta(t) \to X(j\omega) = 1$

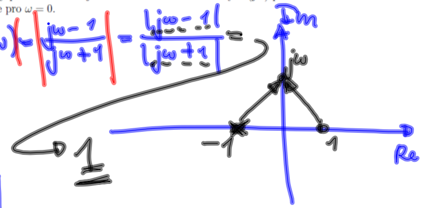
$x(t+\tau) \to X(j\omega)\cdot e^{j\omega\tau}$

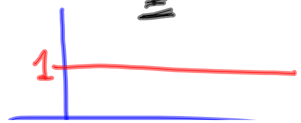
$\arg = \omega\tau = \omega$



Příklad 4 Systém se spojitým časem je popsán přenosovou funkcí $H(s) = \frac{s-1}{s+1}$. Nakreslete přibližný průběh modulu jeho frekvenční charakteristiky $H(j\omega)$ pro kladné kruhové frekvence ω, přesně jej určete pro $\omega = 0$.

$|H(j\omega)| = \left|\frac{j\omega-1}{j\omega+1}\right| = \frac{|j\omega-1|}{|j\omega+1|} = 1$

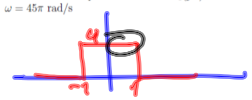




Příklad 5 Spektrální funkce signálu $x(t)$ se spojitým časem má tvar obdélníka:

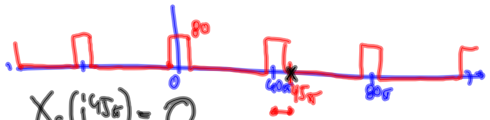
$X(j\omega) = \begin{cases} 4 & \text{pro } \omega \in [-1\,\mathrm{rad/s},\ 1\,\mathrm{rad/s}] \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$. Vzorkovací frekvence je $F_s = 20$ Hz.

Určete hodnotu spektrální funkce $X_s(j\omega)$ ideálně navzorkovaného signálu $x_s(t)$ pro kruhovou frekvenci: $\omega = 45\pi$ rad/s



$X_s(\omega) = \frac{1}{T_1}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\Omega_s)$

$T_1 = \frac{1}{20}$ $\frac{1}{T_1} = 20$

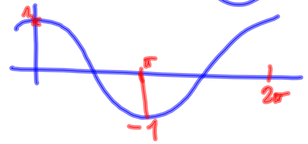


$X_s(j45\pi) = 0$

Příklad 6 Jsou dány dvě cosinusovky s diskrétním časem: $x_1[n] = \cos(\frac{2\pi}{32}n)$ a $x_2[n] = \cos(\frac{2\pi}{16}n)$
Určete hodnotu 16tého vzorku signálu, který vznikl vynásobením těchto cosinusovek: $y[n] = x_1[n]x_2[n]$.

$x_1[16] = \cos\left(\frac{2\pi}{32} \cdot 16\right) = \cos\pi = -1$

$x_2[16] =$



$\cos\left(\frac{2\pi}{16} \cdot 16\right) = \cos 2\pi = 1$

$x_1[16]x_2[16] = \underline{\underline{-1}}$

Příklad 7 Jsou dány dva diskrétní signály délky $N = 5$:

n	0	1	2	3	4
$x_1[n]$	4	4	0	0	0
$x_2[n]$	1	0	0	-2	0

Určete hodnotu jejich periodické konvoluce $y[n] = x_1[n] \tilde{\star} x_2[n]$ pro $n = 9$. -8

kruhová

0

Příklad 8 Napište funkci v C implementující číslicový filtr s přenosovou funkcí $\boxed{H(z) = \frac{1}{1+0.5z^{-1}+0.2z^{-2}}}$

$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{\ldots}$

```
float filtr_zkouska (float x) {
```

$Y(z) + Y(z)0{,}5z^{-1} + Y(z)0{,}2z^{-2} = X(z) \quad / z^{-1}$

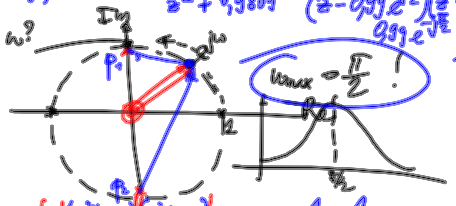
$y[n] + 0{,}5y[n-1] + 0{,}2y[n-2] = x[n]$

$y[n] = x[n] - 0{,}5y[n-1] - 0{,}2y[n-2]$

```
float filtr_zkouska (float x) {
static float y1=0.0, y2=0.0;
float y;
y=x-0.5*y1-0.2*y2;
y2=y1;
y1=y;
return y;
}
```

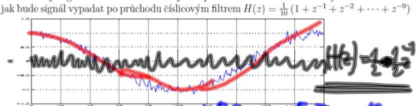
Příklad 9 Určete polohu (normovaná kruhová frekvence v intervalu $[0, \pi]$) a hodnotu maxima modulu frekvenční charakteristiky číslicového filtru s přenosovou funkcí $H(z) = \frac{1}{1+0.9801z^{-2}}$. Pomůcka: póly jmenovatele leží v tomto případě v $p_{1,2} = 0.99e^{\pm j\frac{\pi}{2}}$

$H(z) = \frac{z^2}{z^2 + 0{,}9801} = \frac{(z-0)(z-0)}{(z-0{,}99e^{j\frac{\pi}{2}})(z-0{,}99e^{-j\frac{\pi}{2}})}$



$|H(e^{j\omega})| = \frac{|(e^{j\omega}-0)||(e^{j\omega}-0)|}{|(e^{j\omega}-p_1)||(e^{j\omega}-p_2)|} = \frac{1 \cdot 1}{0{,}01 \cdot 2} = \underline{\underline{50}}$

Příklad 10 Na obrázku je signál s diskrétním časem: jedna perioda zašuměné cosinusovky. Nakreslete do téhož obrázku, jak bude signál vypadat po průchodu číslicovým filtrem $H(z) = \frac{1}{10}(1 + z^{-1} + z^{-2} + \cdots + z^{-9})$



$x[4] = 10 \quad x[3] = -10$

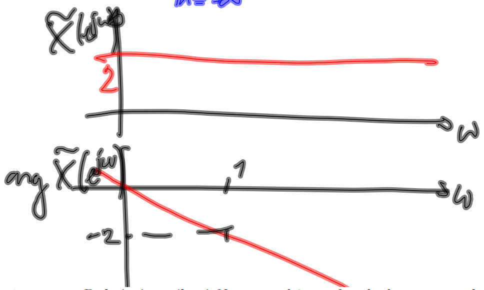
$y[4] = 5 - (-5) = 10$

Příklad 11 Určete impulsní odezvu číslicového filtru s přenosovou funkcí $H(z) = 1 + 0.2z^{-1} + 0.4z^{-2}$

n	0	1	2	3	
$h[n]$	1	0,2	0,4	0	...

Příklad 12 Nakreslete modul Fourierovy transformace s diskrétním časem (DTFT) $|\tilde{X}(e^{j\omega})|$ pro signál o délce $N = 4$: $x[0] = 0, \quad x[1] = 0, \quad x[2] = 2, \quad x[3] = 0.$
pro normované kruhové frekvence $\omega \in [0, \ 2\pi]$.

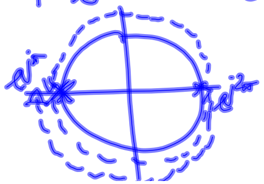
$$\tilde{X}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty} x[n] e^{-j\omega n} = \boxed{2 e^{-j\omega 2}}$$



Příklad 13 Diskrétní signál má $N = 8$ vzorků, všechny hodnoty jsou nulové kromě $x[1] = 1$.
Vypočtěte koeficient jeho diskrétní Fourierovy transformace (DFT)

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$$

$$X[4] = 1 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{8} \cdot 4 \cdot 1} = e^{-j\frac{8\pi}{8}} = e^{-j\pi} = -1$$



Příklad 14 Diskrétní Fourierova transformace signálu o $N = 4$ vzorcích $x[n]$ je
$X[0] = 2, \quad X[1] = 1 - j, \quad X[2] = 0, \quad X[3] = 1 + j$
Určete koeficient $Y[0]$ signálu kruhově zpožděného o dva vzorky: $y[n] = R_4(n)x[\mod_4(n-2)]$.

$$Y[k] = X[k] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}kp}$$

$$Y[0] = 2 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot 0 \cdot (-2)} = 2$$

Příklad 15 Je dán 2D-filtr (někdy nazývaný také "konvoluční jádro" nebo "maska"):

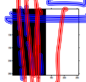
$$h[k,l] = \begin{bmatrix} 1/9 & 1/9 & 1/9 \\ 1/9 & 1/9 & 1/9 \\ 1/9 & 1/9 & 1/9 \end{bmatrix}$$

Vlevo jsou pixely původního obrázku $x[k,l]$. Vyplňte vpravo hodnoty pixelů filtrovaného obrázku $y[k,$

0	0	0	0	0
0	0	0	0	0
0	0	100	0	0
0	0	0	0	0
0	0	0	0	0

0	0	0	0	0
0	11	11	11	0
0	11	11	11	0
0	11	11	11	0
0	0	0	0	0

Příklad 16 Obrázek $x[k,l]$ má 256x256 pixelů. Uveďte, které z modulů jeho prvních 4 koeficientů 2D-DFT: $X[0,0]$, $X[0,1]$, $X[1,0]$, $X[1,1]$ jsou kladné (značkou '+'), a které nulové (značkou '0').



vodorovně

svisle

$X[m,n]$:

$m \downarrow$ $n \rightarrow$	0	1
0	+	+
1	0	0

$x[k,l]$ $l \rightarrow$

$k \downarrow$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -j & -1 & j \end{array}$$

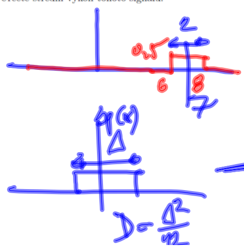
$$X[0,0] = \sum\sum x[k,l] \cdot e^{-j2\pi\left(\frac{k \cdot 0}{N} + \frac{l \cdot 0}{N}\right)} = 8$$

$$X[0,1] = \sum\sum x[k,l] \cdot e^{-j2\pi\left(\frac{k \cdot 0}{4} + \frac{l \cdot 1}{4}\right)} =$$

$$= \sum\sum x[k,l] \cdot e^{-j2\pi\frac{l}{4}} = \sum\sum x[k,l] \cdot \boxed{e^{-j\frac{\pi l}{2}}}$$

$$= 4 - 4j$$

Příklad 17 Funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti stacionárního náhodného signálu s diskrétním časem je: $p(x) = \begin{cases} 0.5 & \text{pro } x \in [6,\ 8] \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$
Určete střední výkon tohoto signálu.



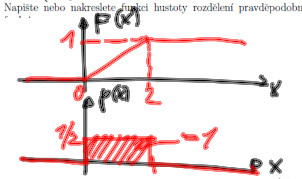
$$P = \mu^2 + D = 7^2 + \frac{2^2}{12} = 49\frac{1}{3}$$

$$\mu = \int p(x) \cdot x \, dx$$

$$D = \int p(x)(x-\mu)^2 dx$$

$$D = \frac{\Delta^2}{12}$$

Příklad 18 Distribuční funkce stacionárního náhodného signálu je definována jako
$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0 \\ \frac{x}{2} & \text{pro } x \in [0,2] \\ 1 & \text{pro } x > 2 \end{cases}$
Napište nebo nakreslete funkci hustoty rozdělení pravděpodobnosti $p(x)$ odpovídající této distribuční

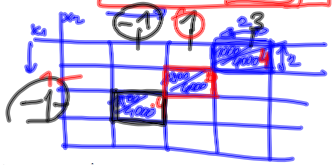


$$p(x) = \frac{\partial F(x)}{\partial x}$$

Příklad 19 Na $\Omega = 4000$ realizacích náhodného procesu byla naměřena tato tabulka (dvourozměrný histogram) hodnot mezi časy n_1 a n_2:

intervaly x_1	intervaly x_2 [-4, -2]	[-2, 0]	[0, 2]	[2, 4]
[2, 4]	0	0	0	1000
[0, 2]	0	0	1500	0
[-2, 0]	0	1500	0	0
[-4, -2]	0	0	0	0

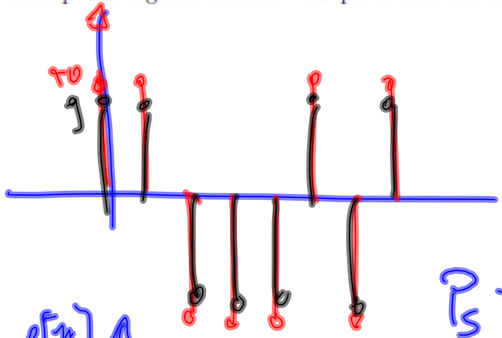
Spočítejte autokorelační koeficient $R[n_1, n_2]$. Pomůcka: Jako reprezentativní hodnoty x_1 a x_2 při nu merickém výpočtu integrálu $R[n_1, n_2] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2, n_1, n_2) dx_1 dx_2$ použijte středy intervalů



$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2, n_1, n_2) dx_1 dx_2$

$$R[n_1,n_2] = \frac{1500}{4000 \cdot 4}(-1)(-1) \cdot 4 + \frac{1500}{4000 \cdot 4} \cdot 1 \cdot 1 \cdot 4 + \frac{1000}{4000 \cdot 4} \cdot 3 \cdot 3 \cdot 4 = 3$$

Příklad 20 Kvantizační hladiny kvantizéru jsou lichá čísla: …,-11,-9,-7,-5,-3,-1,1,3,5,7,9,11,…. Kvantování probíhá standardně zaokrouhlováním na nejbližší hladinu. Do kvantizéru přichází vstupní signál $x[n]$, který nabývá pouze dvou hodnot: +10 nebo -10.
Určete poměr signálu k šumu v dB při kvantování tohoto signálu.

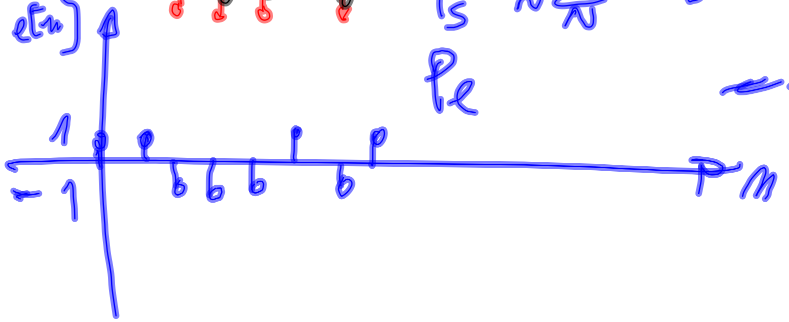


$$SNR = 10\log_{10}\frac{P_s}{P_e} =$$

$$P_s = \frac{1}{N}\sum_N x^2[n] = 100$$

$$P_e = 1$$

$$= 10\log_{10}\frac{100}{1} = 10 \cdot 2 = \underline{\underline{20\,dB}}$$



$$SNR = 10\log_{10}\frac{0}{1} = -\infty$$

$$SNR = 10\log_{10}\frac{100}{1} = 20\,dB$$