Semestrální zkouška ISS, řádný termín, 7.1.2016, skupina A

REF

Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: ....
(čitelně!)

Příklad 1 Je zadán diskrétní signál $x[n]$. Napište do tabulky hodnoty vzorků signálu $y[n] = x[2-n]$. Nulové hodnoty psát nemusíte.

n	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$x[n]$							9	8	7				
$y[n]$							7	8	9				

Příklad 2 Je dána diskrétní cosinusovka $x[n] = 12\cos(0.01\pi n + \frac{\pi}{4})$
Určete její základní periodu N_1. Pokud to nejde, napište jasně "nejde".

$\omega_1 = 0{,}01\pi \ \frac{rad}{s}$

$\omega_1 N_1 = 2k\pi$

$0{,}01\pi N_1 = 2k\pi$

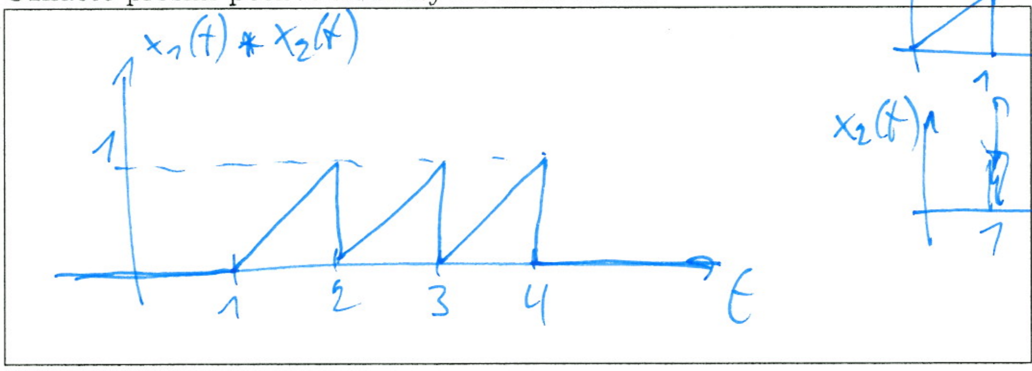
$N_1 = 200k$

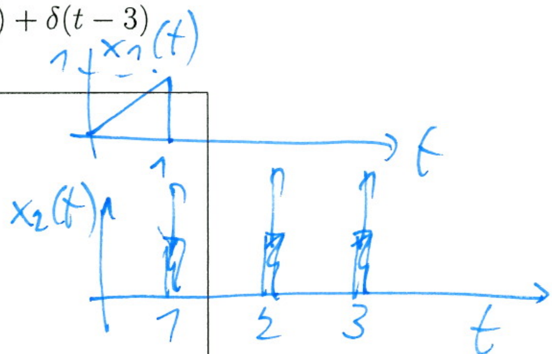
$N_1 =$ 200

Příklad 3 Nakreslete výsledek konvoluce dvou signálů se spojitým časem: $y(t) = x_1(t) \star x_2(t)$.

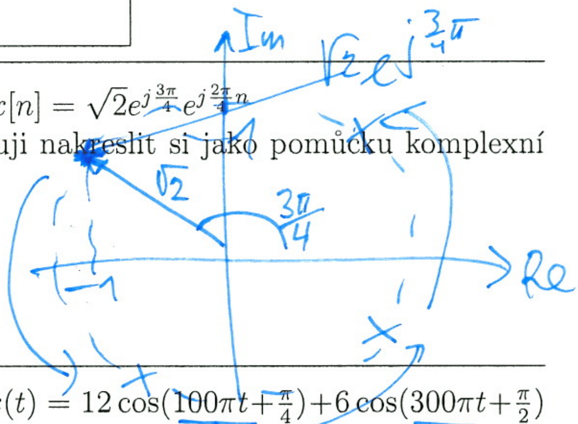
$x_1(t) = \begin{cases} t & \text{pro } t \in [0, 1\text{s}] \\ 0 & \text{jinde} \end{cases} \qquad x_2(t) = \delta(t-1) + \delta(t-2) + \delta(t-3)$

Označte prosím pečlivě hodnoty na obou osách.





Příklad 4 Napište první čtyři vzorky komplexní exponenciály $x[n] = \sqrt{2}e^{j\frac{3\pi}{4}}e^{j\frac{2\pi}{4}n}$
Komplexní čísla musí být zapsána ve složkovém tvaru. Doporučuji nakreslit si jako pomůcku komplexní rovinu.



n	0	1	2	3
$x[n]$	$-1+j$	$-1-j$	$1-j$	$1+j$

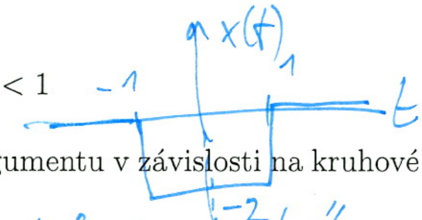
Příklad 5 Signál se spojitým časem je směsí dvou cosinusovek: $x(t) = 12\cos(100\pi t + \frac{\pi}{4}) + 6\cos(300\pi t + \frac{\pi}{2})$
Určete všechny nenulové koeficienty jeho Fourierovy řady a jejich hodnoty.

$\omega_1 \qquad 3\omega_1$

$|c_k| = \frac{C_k}{2} \qquad \arg c_k = \varphi_k \qquad c_{-k} = c_k^*$

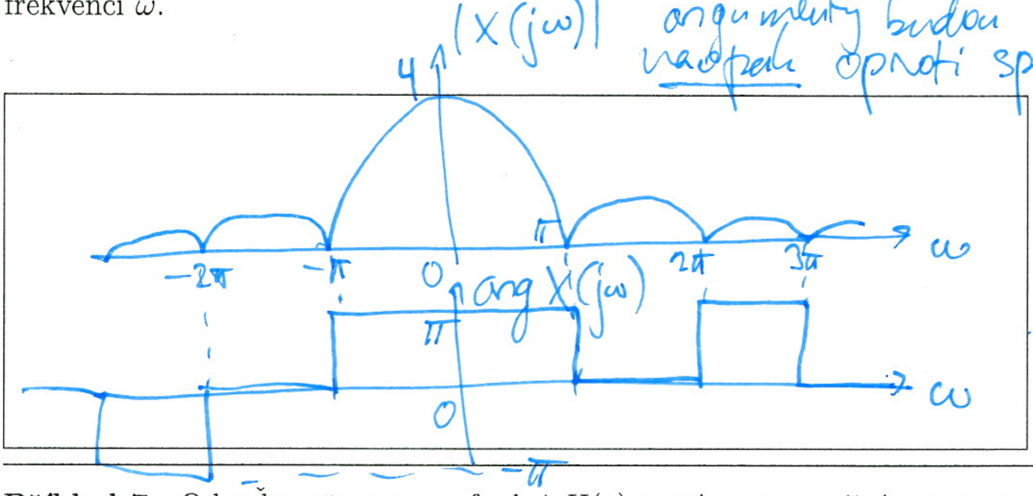
$c_1 = 6e^{j\frac{\pi}{4}} \quad c_{-1} = 6e^{-j\frac{\pi}{4}} \quad c_3 = 3e^{j\frac{\pi}{2}} \quad c_{-3} = 3e^{-j\frac{\pi}{2}}$
....

Příklad 6 Signál se spojitým časem je dán: $x(t) = \begin{cases} -2 & \text{pro} \quad -1 < t < 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$



Určete jeho spektrální funkci $X(j\omega)$ a nakreslete průběh jejího modulu i argumentu v závislosti na kruhové frekvenci ω.

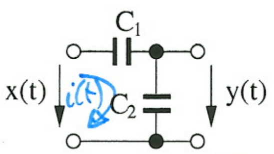
argumenty budou naopak oproti spek. funkci kladného signálu.



$X(j\omega) = -D\vartheta \, \mathrm{sinc}\left(\frac{\vartheta}{2}\omega\right) = -2 \cdot 2 \, \mathrm{sinc}(1 \cdot \omega)$

protíná osu ω pro π.

Příklad 7 Odvoďte přenosovou funkci $H(s)$ systému se spojitým časem na obrázku.
Pomůcka: hodnota proudu na kondenzátoru s kapacitou C a napětím $u(t)$ je $i(t) = C\frac{du(t)}{dt}$.



$i(t) = C_1 \frac{d(x(t) - y(t))}{dt} = C_1 \frac{dx(t)}{dt} - C_1 \frac{dy(t)}{dt}$

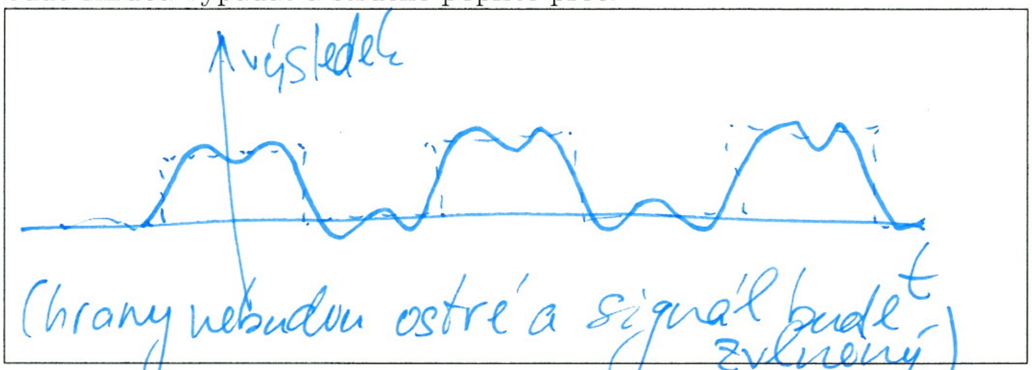
$i(t) = C_2 \frac{dy(t)}{dt}$

$C_1 X(s)s - C_1 Y(s)s = C_2 Y(s)s$

$C_1 X(s) = (C_1 + C_2) Y(s)$

$H(s) = \frac{C_1}{C_1 + C_2}$

Příklad 8 Signál se spojitým časem $x(t)$ je periodický sled obdélníkových impulsů s periodou $T_1 = 1\ \mu$s, výškou $D = 1$ a šířkou $\vartheta = 0.5\ \mu$s. Signál je ideálně vzorkován na vzorkovací frekvenci $F_s = 8$ MHz. Pak je ideálně rekonstruován. Napište, zda bude výsledný signál přesně rovný $x(t)$ a pokud ne, nakreslete, jak bude zhruba vypadat a stručně popište proč.



má nekonečné spektrum, tudíž nelze splnit vzorkovací teorém. Nebude rovný x(t).

Příklad 9 Diskrétní signál o délce $N = 5$ byl kruhově posunutý podle tabulky. Napište vztah pro kruhové posunutí pomocí funkce modulo. Nezapomeňte na okénkovou funkci $R_5[n]$.

n	0	1	2	3	4
$x[n]$	1	4	2	3	8
$y[n]$	2	3	8	1	4

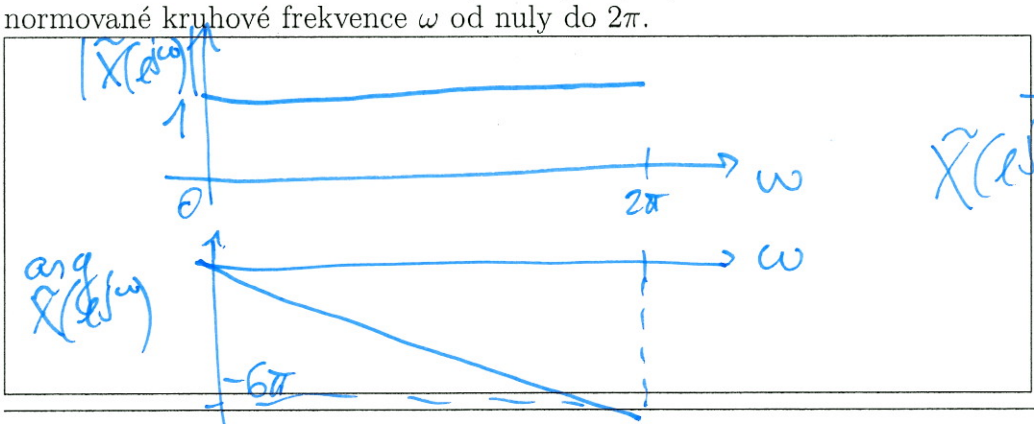
$y[n] =$ $R_5[n]\, x[\mathrm{mod}_5(n-3)]$

Příklad 10 Vypočtěte kruhovou konvoluci dvou signálů s diskrétním časem o délce $N = 4$:

n	0	1	2	3
$x_1[n]$	4	3	1	2
$x_2[n]$	1	1	0	3
$x_1[n] \circledast x_2[n]$	15	10	10	15

A

Příklad 11 Diskrétní signál $x[n]$ má vzorek: $x[3] = 1$, ostatní jsou nulové. Vypočtěte Fourierovu transformaci s diskrétním časem (DTFT) $\tilde{X}(e^{j\omega})$ tohoto signálu a nakreslete její modul a argument pro normované kruhové frekvence ω od nuly do 2π.



$\tilde{X}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} =$

= jediný člen sumy nenulový $= e^{-j\omega 3}$

Příklad 12 Diskrétní signál má délku $N = 4$: $x[0] = 1$, $x[1] = -1$, $x[2] = 0$, $x[3] = 3$.
Vypočtěte zadaný koeficient jeho diskrétní Fourierovy transformace (DFT).

$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = \sum x[n] e^{-j\frac{2\pi}{4}2n} =$

$= \sum x[n] . e^{-j\pi n}$ $\quad e^{-j0} = 1 \quad e^{-j\pi} = -1 \quad e^{-j2\pi} = 1$

$e^{-j3\pi} = -1$

$X[2] =$ $1.1 + (-1)(-1) + 0.1 + 3.(-1) = \underline{\underline{-1}}$

Příklad 13 V tabulce jsou znázorněny hodnoty diskrétní Fourierovy transformace (DFT) reálného signálu $x[n]$ o délce N, kde N je sudé. Vyznačte, které hodnoty jsou reálné, které jsou komplexní a zda jsou mezi komplexními čísly nějaké vztahy a jaké.

symetrie $X[k] = X^*[N-k]$

$X[0]$	$X[1]$	...	$X[\frac{N}{2}-1]$	$X[\frac{N}{2}]$	$X[\frac{N}{2}+1]$	...	$X[N-1]$

reálný komplexní reálný komplexní

Příklad 14 Diskrétní Fourierova transformace signálu o $N = 4$ vzorcích $x[n]$ je
$X[0] = 2$, $X[1] = 1 - j$, $X[2] = 0$, $X[3] = 1 + j$
Určete koeficient $Y[1]$ signálu kruhově zpožděného o dva vzorky: $y[n] = R_4[n]\, x[\mathrm{mod}_4(n-2)]$.

$Y[k] = X[k] . e^{-j\frac{2\pi}{N}k \cdot \text{zpoždění}} =$

$= (1-j) . e^{-j\frac{2\pi}{4} \cdot 1 \cdot 2} = (1-j) e^{-j\pi} = (1-j)(-1)$

$Y[1] =$ $-1+j$

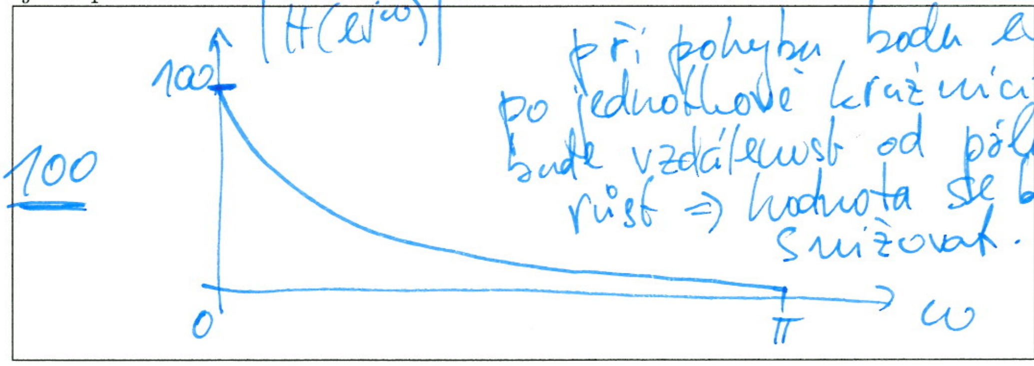
Příklad 15 Odvoďte přenosovou funkci číslicového filtru $H(z)$ z jeho diferenční rovnice:
$y[n] = x[n] - 0.5y[n-1] + 0.2y[n-2]$

$Y(z) = X(z) - 0{,}5\, Y(z) z^{-1} + 0{,}2\, Y(z) z^{-2}$

$Y(z)[1 + 0{,}5 z^{-1} - 0{,}2 z^{-1}] = X(z)$

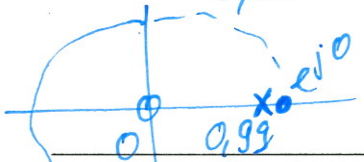
$H(z) = \dfrac{1}{1 + 0{,}5 z^{-1} - 0{,}2 z^{-2}}$

Příklad 16 Číslicový filtr má jeden nulový bod a jeden pól: $n_1 = 0, \quad p_1 = 0.99$
Určete modul jeho frekvenční charakteristiky pro normovanou kruhovou frekvenci $\omega = 0$ a přibližně nakreslete, jak bude vypadat jeho průběh od $\omega = 0$ do $\omega = \pi$.



při pohybu bodu $e^{j\omega}$ po jednotkové kružnici bude vzdálenost od pólu růst ⇒ hodnota se bude snižovat.

$|H(e^{j0})| = \dfrac{1}{0{,}01} = \underline{100}$



Příklad 17 Určete polohy pólů pro číslicový filtr s přenosovou funkcí $H(z) = \frac{1}{1+0.64z^{-2}}$
Pomůcka: budete-li potřebovat řešit kvadratickou rovnici $ax^2+bx+c = 0$, její řešení jsou $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

$H(z) = \dfrac{z^2}{z^2+0{,}64}$

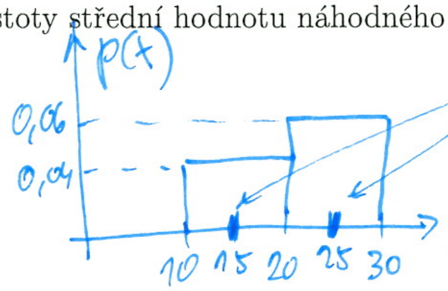
$z^2 + 0{,}64 = 0$

$z_{1/2} = \dfrac{-0 \pm \sqrt{0^2 - 4 \cdot 0{,}64}}{2} = \pm\sqrt{-0{,}64} = \pm j0{,}8$

$p_1 = j0{,}8$ $\qquad p_2 = -j0{,}8$

Příklad 18 Pro náhodný signál proběhl velmi hrubý odhad jeho funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti ve dvou intervalech: pro $x \in [10,\ 20]$ je $p(x) = 0.04$, pro $x \in [20,\ 30]$ je $p(x) = 0.06$
Vypočtěte na základě této odhadnuté funkce hustoty střední hodnotu náhodného signálu.

$a = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx = 15 \cdot 0{,}04 \cdot 10 + 25 \cdot 0{,}06 \cdot 10 = 6 + 15$



typické hodnoty pro výpočet.

$a = \underline{21}$

Příklad 19 Firma `8minutesleep.com` inzeruje bílé šumy na prodej, např. "Space Odyssey — Deep White Noise: The deep rumble of a spaceship's engine is your constant companion on an interstellar voyage.", zřejmě se tedy jedná o šum se zesílenými nízkými frekvenci, které simulují rachot v kosmické lodi. Slovní spojení "bílý šum" (white noise) není užito správně. Vysvětlete stručně proč.

Bílý šum má konstantní spektrální hustotu výkonu (spektrum). Pokud je tam více nízkých frekvencí, není plochá ⇒ není to bílý šum.

Příklad 20 Ergodický náhodný signál má $N = 5$ vzorků $x[0]$ až $x[4]$:

$R[k] = \frac{1}{N}\sum x[n]x[n+k]$

```
1    5    2    -1    1
```

Proveďte vychýlený odhad zadaného autokorelačního koeficientu $R[k]$. Pomůcka: U vychýleného odhadu probíhá normalizace pro všechny hodnoty k pomocí plného počtu vzorků N.

1 5 2 -1 1
2 -1 1

$R[2] = \dfrac{1\cdot 2 + 5\cdot(-1) + 2\cdot 1}{5} = -\dfrac{1}{5}$

Semestrální zkouška ISS, řádný termín, 7.1.2016, skupina B

REF

Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: ....
(čitelně!)

Příklad 1 Je zadán diskrétní signál $x[n]$. Napište do tabulky hodnoty vzorků signálu $y[n] = x[-2-n]$. Nulové hodnoty psát nemusíte.

n	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$x[n]$							9	8	7				
$y[n]$			7	8	9								

Příklad 2 Je dána diskrétní cosinusovka $x[n] = 6\cos(0.01\pi n - \frac{\pi}{4})$
Určete její základní periodu N_1. Pokud to nejde, napište jasně "nejde".

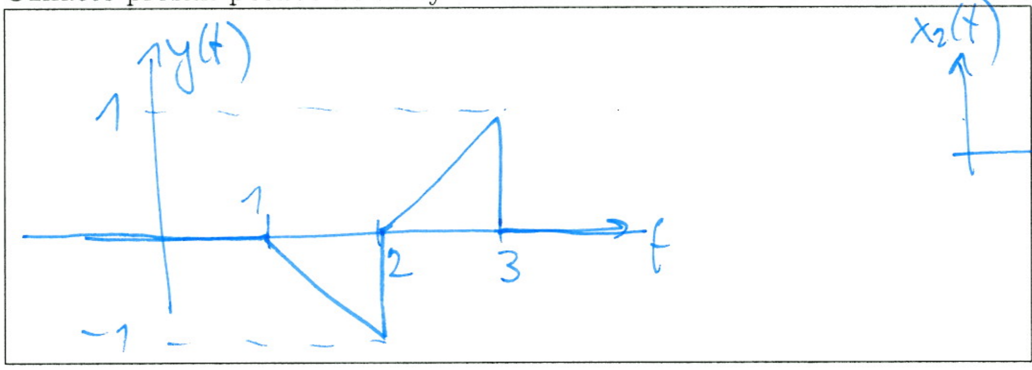
viz A

$N_1 =$ 200

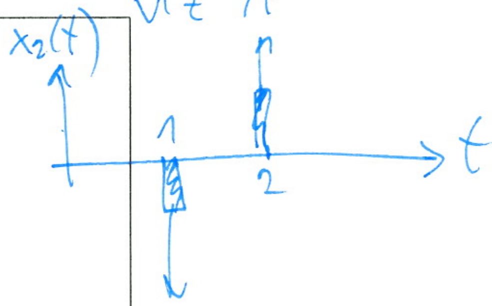
Příklad 3 Nakreslete výsledek konvoluce dvou signálů se spojitým časem: $y(t) = x_1(t) \star x_2(t)$.

$x_1(t) = \begin{cases} t & \text{pro } t \in [0, 1\text{s}] \\ 0 & \text{jinde} \end{cases} \qquad x_2(t) = -\delta(t-1) + \delta(t-2)$

Označte prosím pečlivě hodnoty na obou osách.



viz A



Příklad 4 Napište první čtyři vzorky komplexní exponenciály $x[n] = \sqrt{2}e^{-j\frac{3\pi}{4}}e^{j\frac{2\pi}{4}n}$
Komplexní čísla musí být zapsána ve složkovém tvaru. Doporučuji nakreslit si jako pomůcku komplexní rovinu.

viz A, ale začíná v $-1-j$

n	0	1	2	3
$x[n]$	$-1-j$	$1-j$	$1+j$	$-1+j$

Příklad 5 Signál se spojitým časem je směsí dvou cosinusovek: $x(t) = 6\cos(100\pi t + \frac{\pi}{4}) + 6\cos(300\pi t + \frac{\pi}{2})$
Určete všechny nenulové koeficienty jeho Fourierovy řady a jejich hodnoty.

viz A

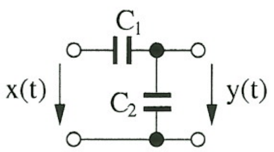
$c_1 = 3e^{j\frac{\pi}{4}} \quad c_{-1} = 3e^{-j\frac{\pi}{4}} \quad c_3 = 3e^{j\frac{\pi}{2}} \quad c_{-3} = 3e^{-j\frac{\pi}{2}}$
....

Příklad 6 Signál se spojitým časem je dán: $x(t) = \begin{cases} -1 & \text{pro} \quad -1 < t < 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

Určete jeho spektrální funkci $X(j\omega)$ a nakreslete průběh jejího modulu i argumentu v závislosti na kruhové frekvenci ω.

stejné jako A až na vrchol kardinálního sinu, který má hodnotu 2.

Příklad 7 Odvoďte přenosovou funkci $H(s)$ systému se spojitým časem na obrázku.
Pomůcka: hodnota proudu na kondenzátoru s kapacitou C a napětím $u(t)$ je $i(t) = C\frac{du(t)}{dt}$.



Viz A

$H(s) =$..........................

Příklad 8 Signál se spojitým časem $x(t)$ je periodický sled obdélníkových impulsů s periodou $T_1 = 1$ μs, výškou $D = 1$ a šířkou $\vartheta = 0.5$ μs. Signál je ideálně vzorkován na vzorkovací frekvenci $F_s = 8$ MHz. Pak je ideálně rekonstruován. Napište, zda bude výsledný signál přesně rovný $x(t)$ a pokud ne, nakreslete, jak bude zhruba vypadat a stručně popište proč.

viz A

Příklad 9 Diskrétní signál o délce $N = 5$ byl kruhově posunutý podle tabulky. Napište vztah pro kruhové posunutí pomocí funkce modulo. Nezapomeňte na okénkovou funkci $R_5[n]$.

n	0	1	2	3	4
$x[n]$	1	4	2	3	8
$y[n]$	3	8	1	4	2

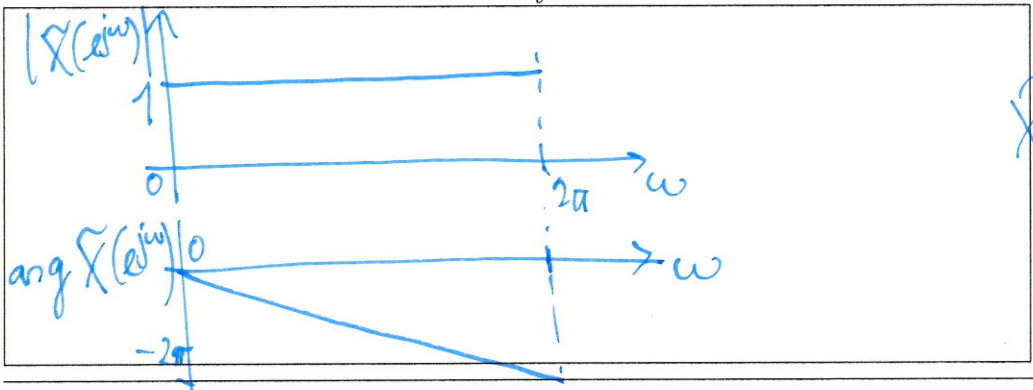
$y[n] =$ $R_5[n]\, x[\mathrm{mod}_5(n-2)]$

Příklad 10 Vypočtěte kruhovou konvoluci dvou signálů s diskrétním časem o délce $N = 4$:

n	0	1	2	3
$x_1[n]$	4	3	1	2
$x_2[n]$	-1	-1	0	3
$x_1[n] \circledast x_2[n]$	3	−4	2	9

B

Příklad 11 Diskrétní signál $x[n]$ má vzorek: $x[1] = 1$, ostatní jsou nulové. Vypočtěte Fourierovu transformaci s diskrétním časem (DTFT) $\tilde{X}(e^{j\omega})$ tohoto signálu a nakreslete její modul a argument pro normované kruhové frekvence ω od nuly do 2π.



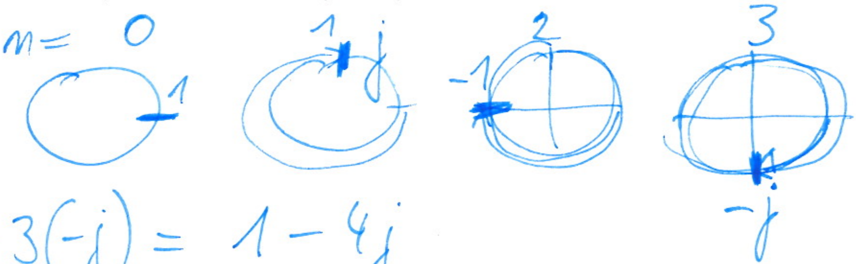
viz A

$\tilde{X}(e^{j\omega}) = e^{-j\omega}$

Příklad 12 Diskrétní signál má délku $N = 4$: $x[0] = 1$, $x[1] = -1$, $x[2] = 0$, $x[3] = 3$.
Vypočtěte zadaný koeficient jeho diskrétní Fourierovy transformace (DFT).

viz A

$e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 3n} = e^{-j\frac{3}{2}\pi n}$ $n = 0, 1, 2, 3$



$X[3] = 1\cdot 1 + (-1)j + 0\cdot(-1) + 3(-j) = \underline{1 - 4j}$

Příklad 13 V tabulce jsou znázorněny hodnoty diskrétní Fourierovy transformace (DFT) reálného signálu $x[n]$ o délce N, kde N je sudé. Vyznačte, které hodnoty jsou reálné, které jsou komplexní a zda jsou mezi komplexními čísly nějaké vztahy a jaké.

viz A

$X[0]$	$X[1]$	...	$X[\frac{N}{2}-1]$	$X[\frac{N}{2}]$	$X[\frac{N}{2}+1]$	...	$X[N-1]$

Příklad 14 Diskrétní Fourierova transformace signálu o $N = 4$ vzorcích $x[n]$ je
$X[0] = 1$, $X[1] = 1 - j$, $X[2] = 0$, $X[3] = 1 + j$
Určete koeficient $Y[1]$ signálu kruhově zpožděného o dva vzorky: $y[n] = R_4[n]\, x[\mathrm{mod}_4(n-2)]$.

viz A

$Y[1] = -1 + j$

Příklad 15 Odvoďte přenosovou funkci číslicového filtru $H(z)$ z jeho diferenční rovnice:
$y[n] = x[n] + 0.5y[n-1] + 0.2y[n-2]$

odvození viz A

$H(z) = \dfrac{1}{1 - 0{,}5z^{-1} - 0{,}2z^{-2}}$

Příklad 16 Číslicový filtr má jeden nulový bod a jeden pól: $n_1 = 0, \quad p_1 = 0.99$
Určete modul jeho frekvenční charakteristiky pro normovanou kruhovou frekvenci $\omega = 0$ a přibližně nakreslete, jak bude vypadat jeho průběh od $\omega = 0$ do $\omega = \pi$.

$|H(e^{j0})| =$...................

Viz A

Příklad 17 Určete polohy pólů pro číslicový filtr s přenosovou funkcí $H(z) = \frac{1}{1+0.49z^{-2}}$
Pomůcka: budete-li potřebovat řešit kvadratickou rovnici $ax^2+bx+c = 0$, její řešení jsou $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

viz A

$p_1 =$ $j\,0{,}7$ $\quad p_2 =$ $-j\,0{,}7$

Příklad 18 Pro náhodný signál proběhl velmi hrubý odhad jeho funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti ve dvou intervalech: pro $x \in [10, \ 20]$ je $p(x) = 0.03$, pro $x \in [20, \ 30]$ je $p(x) = 0.07$
Vypočtěte na základě této odhadnuté funkce hustoty střední hodnotu náhodného signálu.

$a = 15 \cdot 0{,}03 \cdot 10 + 25 \cdot 0{,}07 \cdot 10 =$ odvození viz A
$= 4{,}5 + 17{,}5$

$a =$ $\underline{\underline{22}}$

Příklad 19 Firma `8minutesleep.com` inzeruje bílé šumy na prodej, např. "Space Odyssey — Deep White Noise: The deep rumble of a spaceship's engine is your constant companion on an interstellar voyage.", zřejmě se tedy jedná o šum se zesílenými nízkými frekvenci, které simulují rachot v kosmické lodi. Slovní spojení "bílý šum" (white noise) není užito správně. Vysvětlete stručně proč.

Viz A

Příklad 20 Ergodický náhodný signál má $N = 5$ vzorků $x[0]$ až $x[4]$: Viz A

1 5 2 -1 1

Proveďte vychýlený odhad zadaného autokorelačního koeficientu $R[k]$. Pomůcka: U vychýleného odhadu probíhá normalizace pro všechny hodnoty k pomocí plného počtu vzorků N.

-1 1

$R[3] = \frac{1 \cdot (-1) + 5 \cdot 1}{5} = \underline{\underline{\frac{4}{5}}}$

Semestrální zkouška ISS, řádný termín, 7.1.2016, skupina C

REF

Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: ....
(čitelně!)

Příklad 1 Je zadán diskrétní signál $x[n]$. Napište do tabulky hodnoty vzorků signálu $y[n] = x[3 - n]$. Nulové hodnoty psát nemusíte.

n	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$x[n]$							9	8	7				
$y[n]$								7	8	9			

Příklad 2 Je dána diskrétní cosinusovka $x[n] = 50\cos(0.01\pi n + \frac{\pi}{7})$
Určete její základní periodu N_1. Pokud to nejde, napište jasně "nejde".

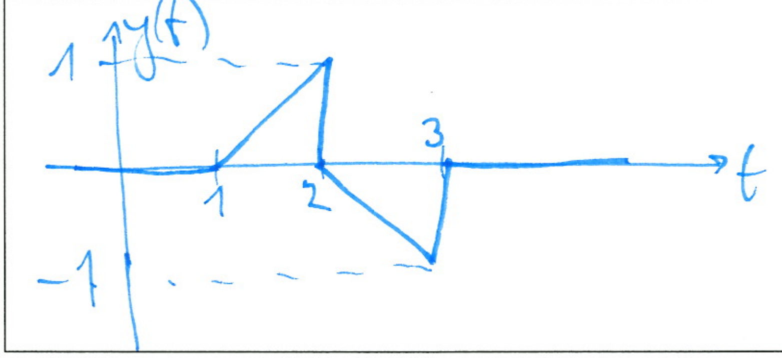
viz A

$N_1 =$ 200

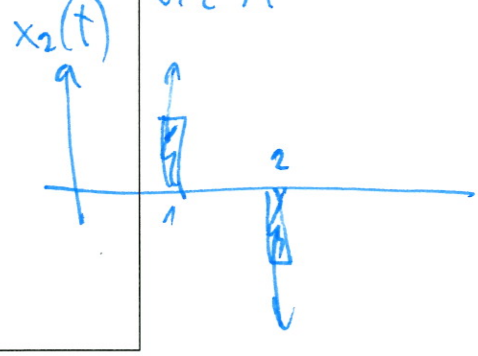
Příklad 3 Nakreslete výsledek konvoluce dvou signálů se spojitým časem: $y(t) = x_1(t) \star x_2(t)$.

$x_1(t) = \begin{cases} t & \text{pro } t \in [0, 1\text{s}] \\ 0 & \text{jinde} \end{cases} \qquad x_2(t) = \delta(t-1) - \delta(t-2)$

Označte prosím pečlivě hodnoty na obou osách.



viz A



Příklad 4 Napište první čtyři vzorky komplexní exponenciály $x[n] = \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}e^{j\frac{2\pi}{4}n}$
Komplexní čísla musí být zapsána ve složkovém tvaru. Doporučuji nakreslit si jako pomůcku komplexní rovinu.

viz A, ale začíná v $1+j$

n	0	1	2	3
$x[n]$	$1+j$	$-1+j$	$-1-j$	$1-j$

Příklad 5 Signál se spojitým časem je směsí dvou cosinusovek: $x(t) = 4\cos(100\pi t + \frac{\pi}{4}) + 6\cos(300\pi t + \frac{\pi}{2})$
Určete všechny nenulové koeficienty jeho Fourierovy řady a jejich hodnoty.

viz A

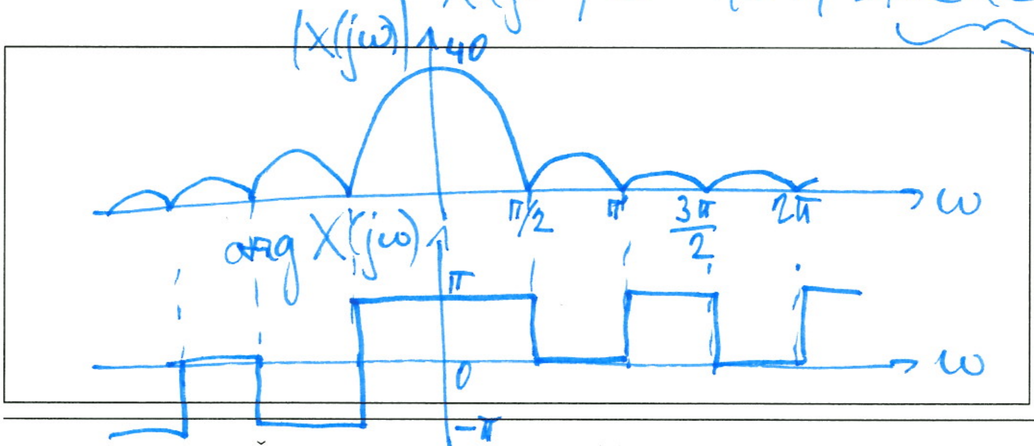
$c_1 = 2e^{j\frac{\pi}{4}} \quad c_{-1} = 2e^{-j\frac{\pi}{4}} \quad c_3 = 3e^{j\frac{\pi}{2}} \quad c_{-3} = 3e^{-j\frac{\pi}{2}}$ ....

Příklad 6 Signál se spojitým časem je dán: $x(t) = \begin{cases} -10 & \text{pro} \quad -2 < t < 2 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

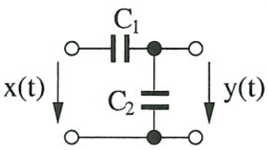
Určete jeho spektrální funkci $X(j\omega)$ a nakreslete průběh jejího modulu i argumentu v závislosti na kruhové frekvenci ω.

$X(j\omega) = -10 \cdot 4 \,\mathrm{sinc}\,(2\omega)$

protíná osu ω pro $\frac{\pi}{2}$.



Příklad 7 Odvoďte přenosovou funkci $H(s)$ systému se spojitým časem na obrázku.
Pomůcka: hodnota proudu na kondenzátoru s kapacitou C a napětím $u(t)$ je $i(t) = C\frac{du(t)}{dt}$.



viz A

$H(s) =$..........................

Příklad 8 Signál se spojitým časem $x(t)$ je periodický sled obdélníkových impulsů s periodou $T_1 = 1$ μs, výškou $D = 1$ a šířkou $\vartheta = 0.5$ μs. Signál je ideálně vzorkován na vzorkovací frekvenci $F_s = 8$ MHz. Pak je ideálně rekonstruován. Napište, zda bude výsledný signál přesně rovný $x(t)$ a pokud ne, nakreslete, jak bude zhruba vypadat a stručně popište proč.

viz A

Příklad 9 Diskrétní signál o délce $N = 5$ byl kruhově posunutý podle tabulky. Napište vztah pro kruhové posunutí pomocí funkce modulo. Nezapomeňte na okénkovou funkci $R_5[n]$.

n	0	1	2	3	4
$x[n]$	1	4	2	3	8
$y[n]$	4	2	3	8	1

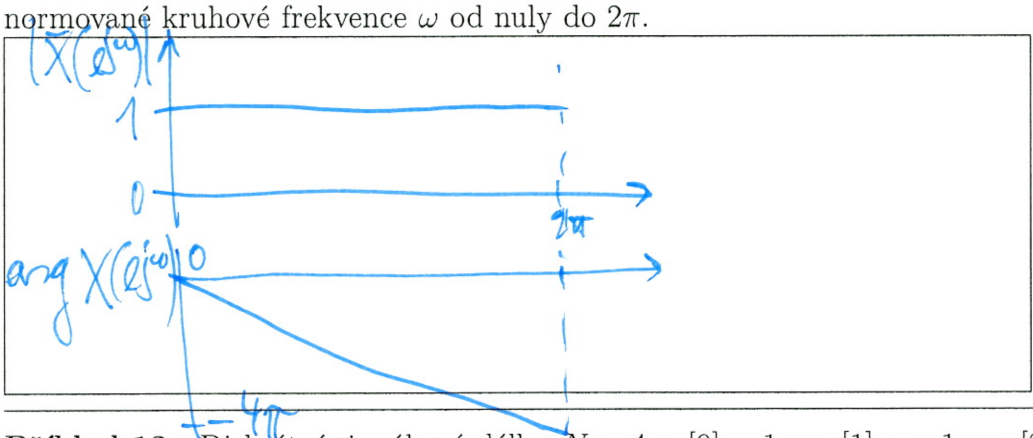
$y[n] =$ $R_5[n]\, x[\mathrm{mod}_5\,(n-4)]$

Příklad 10 Vypočtěte kruhovou konvoluci dvou signálů s diskrétním časem o délce $N = 4$:

n	0	1	2	3
$x_1[n]$	4	3	1	2
$x_2[n]$	-1	1	0	3
$x_1[n]$ Ⓝ $x_2[n]$	7	4	8	11

C

Příklad 11 Diskrétní signál $x[n]$ má vzorek: $x[2] = 1$, ostatní jsou nulové. Vypočtěte Fourierovu transformaci s diskrétním časem (DTFT) $\tilde{X}(e^{j\omega})$ tohoto signálu a nakreslete její modul a argument pro normované kruhové frekvence ω od nuly do 2π.



viz A

$\tilde{X}(e^{j\omega}) = e^{-j2\omega}$

Příklad 12 Diskrétní signál má délku $N = 4$: $x[0] = 1, \quad x[1] = -1, \quad x[2] = 0, \quad x[3] = 3$.
Vypočtěte zadaný koeficient jeho diskrétní Fourierovy transformace (DFT).

viz A

$X[2] =$ ......-1.........

Příklad 13 V tabulce jsou znázorněny hodnoty diskrétní Fourierovy transformace (DFT) reálného signálu $x[n]$ o délce N, kde N je sudé. Vyznačte, které hodnoty jsou reálné, které jsou komplexní a zda jsou mezi komplexními čísly nějaké vztahy a jaké.

viz A

$X[0]$	$X[1]$	...	$X[\frac{N}{2}-1]$	$X[\frac{N}{2}]$	$X[\frac{N}{2}+1]$	...	$X[N-1]$

Příklad 14 Diskrétní Fourierova transformace signálu o $N = 4$ vzorcích $x[n]$ je
$X[0] = 5, \quad X[1] = 1 - j, \quad X[2] = 0, \quad X[3] = 1 + j$
Určete koeficient $Y[1]$ signálu kruhově zpožděného o dva vzorky: $y[n] = R_4[n]\, x[\mathrm{mod}_4(n-2)]$.

viz A

$Y[1] =$ ......$-1+j$......

Příklad 15 Odvoďte přenosovou funkci číslicového filtru $H(z)$ z jeho diferenční rovnice:
$y[n] = x[n] - 0.5y[n-1] + 0.1y[n-2]$

odvození viz A

$H(z) = \dfrac{1}{1 + 0{,}5z^{-1} - 0{,}1z^{-2}}$

Příklad 16 Číslicový filtr má jeden nulový bod a jeden pól: $n_1 = 0, \quad p_1 = 0.99$
Určete modul jeho frekvenční charakteristiky pro normovanou kruhovou frekvenci $\omega = 0$ a přibližně nakreslete, jak bude vypadat jeho průběh od $\omega = 0$ do $\omega = \pi$.

$|H(e^{j0})| =$ ....

viz A

Příklad 17 Určete polohy pólů pro číslicový filtr s přenosovou funkcí $H(z) = \frac{1}{1+0.36z^{-2}}$
Pomůcka: budete-li potřebovat řešit kvadratickou rovnici $ax^2+bx+c = 0$, její řešení jsou $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

viz A

$p_1 =$ $j\,0{,}6$ $\qquad p_2 =$ $-j\,0{,}6$

Příklad 18 Pro náhodný signál proběhl velmi hrubý odhad jeho funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti ve dvou intervalech: pro $x \in [10,\ 20]$ je $p(x) = 0.02$, pro $x \in [20,\ 30]$ je $p(x) = 0.08$
Vypočtěte na základě této odhadnuté funkce hustoty střední hodnotu náhodného signálu.

$a = 15 \cdot 0{,}02 \cdot 10 + 25 \cdot 0{,}08 \cdot 10 =$ odvození viz A

$= 3 + 20$

$a =$ $\underline{\underline{23}}$

Příklad 19 Firma `8minutesleep.com` inzeruje bílé šumy na prodej, např. "Space Odyssey — Deep White Noise: The deep rumble of a spaceship's engine is your constant companion on an interstellar voyage.", zřejmě se tedy jedná o šum se zesílenými nízkými frekvenci, které simulují rachot v kosmické lodi. Slovní spojení "bílý šum" (white noise) není užito správně. Vysvětlete stručně proč.

viz A

Příklad 20 Ergodický náhodný signál má $N = 5$ vzorků $x[0]$ až $x[4]$: viz A

1 5 2 -1 1

Proveďte vychýlený odhad zadaného autokorelačního koeficientu $R[k]$. Pomůcka: U vychýleného odhadu probíhá normalizace pro všechny hodnoty k pomocí plného počtu vzorků N.

5 2 -1 1

$R[1] =$ $\frac{5\cdot 1 + 5\cdot 2 + 2\cdot(-1) + (-1)\cdot 1}{5} = \underline{\underline{\frac{12}{5}}}$

Semestrální zkouška ISS, řádný termín, 7.1.2016, skupina D

REF

Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: ....
(čitelně!)

Příklad 1 Je zadán diskrétní signál $x[n]$. Napište do tabulky hodnoty vzorků signálu $y[n] = x[-3-n]$. Nulové hodnoty psát nemusíte.

n	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$x[n]$							9	8	7				
$y[n]$		7	8	9									

Příklad 2 Je dána diskrétní cosinusovka $x[n] = 2\cos(0.01\pi n - \frac{\pi}{7})$
Určete její základní periodu N_1. Pokud to nejde, napište jasně "nejde".

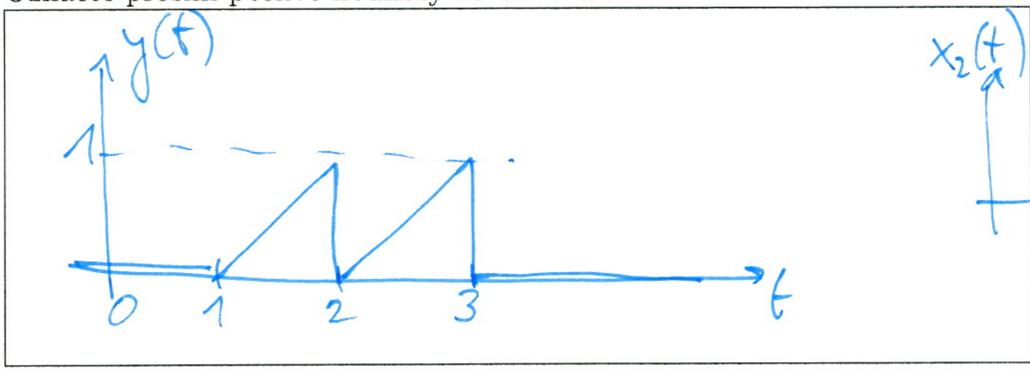
viz A

$N_1 =$ 200

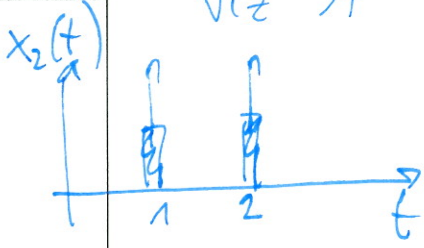
Příklad 3 Nakreslete výsledek konvoluce dvou signálů se spojitým časem: $y(t) = x_1(t) \star x_2(t)$.

$$x_1(t) = \begin{cases} t & \text{pro } t \in [0, 1s] \\ 0 & \text{jinde} \end{cases} \qquad x_2(t) = \delta(t-1) + \delta(t-2)$$

Označte prosím pečlivě hodnoty na obou osách.



viz A



Příklad 4 Napište první čtyři vzorky komplexní exponenciály $x[n] = \sqrt{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{j\frac{2\pi}{4}n}$
Komplexní čísla musí být zapsána ve složkovém tvaru. Doporučuji nakreslit si jako pomůcku komplexní rovinu.

viz A, ale začíná od $1-j$

n	0	1	2	3
$x[n]$	$1-j$	$1+j$	$-1+j$	$-1-j$

Příklad 5 Signál se spojitým časem je směsí dvou cosinusovek: $x(t) = 8\cos(100\pi t + \frac{\pi}{4}) + 6\cos(300\pi t + \frac{\pi}{4})$
Určete všechny nenulové koeficienty jeho Fourierovy řady a jejich hodnoty.

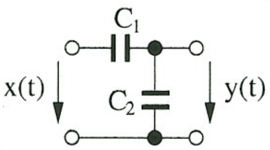
$c_1 = 4e^{j\frac{\pi}{4}}$ $c_{-1} = 4e^{-j\frac{\pi}{4}}$ $c_3 = 3e^{j\frac{\pi}{4}}$ $c_{-3} = 3e^{-j\frac{\pi}{4}}$

Příklad 6 Signál se spojitým časem je dán: $x(t) = \begin{cases} -10 & \text{pro} \quad -1 < t < 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

Určete jeho spektrální funkci $X(j\omega)$ a nakreslete průběh jejího modulu i argumentu v závislosti na kruhové frekvenci ω.

stejné jako A, ale vrchol kardinálního sinu má hodnotu 20.

Příklad 7 Odvoďte přenosovou funkci $H(s)$ systému se spojitým časem na obrázku.
Pomůcka: hodnota proudu na kondenzátoru s kapacitou C a napětím $u(t)$ je $i(t) = C\frac{du(t)}{dt}$.



viz A

$H(s) =$..........................

Příklad 8 Signál se spojitým časem $x(t)$ je periodický sled obdélníkových impulsů s periodou $T_1 = 1\ \mu$s, výškou $D = 1$ a šířkou $\vartheta = 0.5\ \mu$s. Signál je ideálně vzorkován na vzorkovací frekvenci $F_s = 8$ MHz. Pak je ideálně rekonstruován. Napište, zda bude výsledný signál přesně rovný $x(t)$ a pokud ne, nakreslete, jak bude zhruba vypadat a stručně popište proč.

viz A

Příklad 9 Diskrétní signál o délce $N = 5$ byl kruhově posunutý podle tabulky. Napište vztah pro kruhové posunutí pomocí funkce modulo. Nezapomeňte na okénkovou funkci $R_5[n]$.

n	0	1	2	3	4
$x[n]$	1	4	2	3	8
$y[n]$	8	1	4	2	3

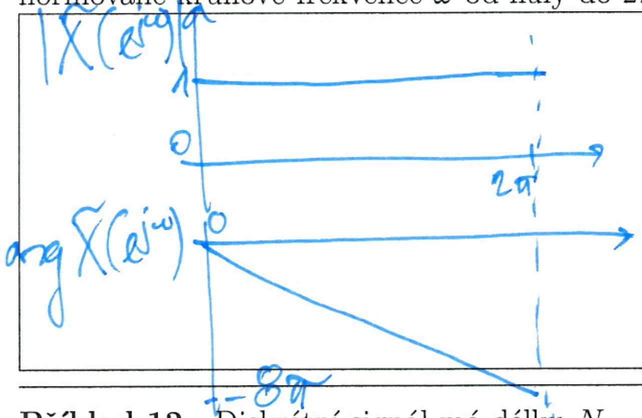
$y[n] =$ $R_5[n]\, x[\mathrm{mod}_5(n-1)]$

Příklad 10 Vypočtěte kruhovou konvoluci dvou signálů s diskrétním časem o délce $N = 4$:

n	0	1	2	3
$x_1[n]$	4	3	1	2
$x_2[n]$	1	-1	0	3
$x_1[n] \circledN x_2[n]$	11	2	4	13

D

Příklad 11 Diskrétní signál $x[n]$ má vzorek: $x[4] = 1$, ostatní jsou nulové. Vypočtěte Fourierovu transformaci s diskrétním časem (DTFT) $\tilde{X}(e^{j\omega})$ tohoto signálu a nakreslete její modul a argument pro normované kruhové frekvence ω od nuly do 2π.



viz A

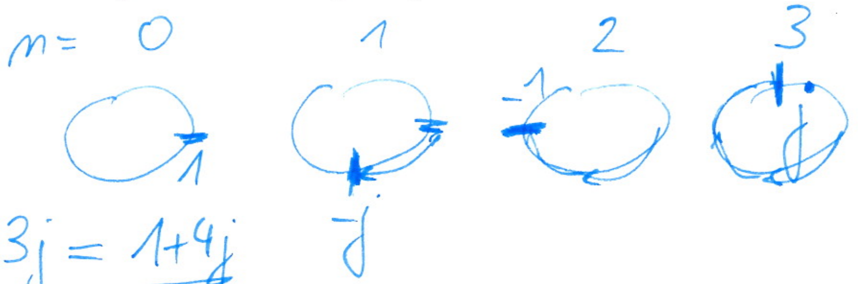
$\tilde{X}(e^{j\omega}) = e^{-j4\omega}$

Příklad 12 Diskrétní signál má délku $N = 4$: $x[0] = 1$, $x[1] = -1$, $x[2] = 0$, $x[3] = 3$.
Vypočtěte zadaný koeficient jeho diskrétní Fourierovy transformace (DFT).

viz A

$e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = e^{-j\frac{2\pi}{4}\cdot 1\cdot n} =$

$= e^{-j\frac{\pi}{2}n}$



$X[1] = 1\cdot 1 + (-1)(-j) + 0\cdot(-1) + 3j = 1+4j$

Příklad 13 V tabulce jsou znázorněny hodnoty diskrétní Fourierovy transformace (DFT) reálného signálu $x[n]$ o délce N, kde N je sudé. Vyznačte, které hodnoty jsou reálné, které jsou komplexní a zda jsou mezi komplexními čísly nějaké vztahy a jaké.

viz A

$X[0]$	$X[1]$	...	$X[\frac{N}{2}-1]$	$X[\frac{N}{2}]$	$X[\frac{N}{2}+1]$	...	$X[N-1]$

Příklad 14 Diskrétní Fourierova transformace signálu o $N = 4$ vzorcích $x[n]$ je
$X[0] = 7$, $X[1] = 1 - j$, $X[2] = 0$, $X[3] = 1 + j$
Určete koeficient $Y[1]$ signálu kruhově zpožděného o dva vzorky: $y[n] = R_4[n]\, x[\mathrm{mod}_4(n-2)]$.

viz A

$Y[1] = -1+j$

Příklad 15 Odvoďte přenosovou funkci číslicového filtru $H(z)$ z jeho diferenční rovnice:
$y[n] = x[n] + 0.5y[n-1] - 0.1y[n-2]$

odvození viz A

$H(z) = \dfrac{1}{1 - 0{,}5z^{-1} + 0{,}1z^{-2}}$

Příklad 16 Číslicový filtr má jeden nulový bod a jeden pól: $n_1 = 0$, $p_1 = 0.99$
Určete modul jeho frekvenční charakteristiky pro normovanou kruhovou frekvenci $\omega = 0$ a přibližně nakreslete, jak bude vypadat jeho průběh od $\omega = 0$ do $\omega = \pi$.

$|H(e^{j0})| =$ ....

viz A

Příklad 17 Určete polohy pólů pro číslicový filtr s přenosovou funkcí $H(z) = \frac{1}{1+0.25z^{-2}}$
Pomůcka: budete-li potřebovat řešit kvadratickou rovnici $ax^2+bx+c=0$, její řešení jsou $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

viz A

$p_1 =$ j0,5 $p_2 =$ −j0,5

Příklad 18 Pro náhodný signál proběhl velmi hrubý odhad jeho funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti ve dvou intervalech: pro $x \in [10,\ 20]$ je $p(x) = 0.01$, pro $x \in [20,\ 30]$ je $p(x) = 0.09$
Vypočtěte na základě této odhadnuté funkce hustoty střední hodnotu náhodného signálu.

$a = 15 \cdot 0{,}01 \cdot 10 + 25 \cdot 0{,}09 \cdot 10 =$ odvození viz A
$= 1{,}5 + 22{,}5$

$a =$ 24

Příklad 19 Firma `8minutesleep.com` inzeruje bílé šumy na prodej, např. "Space Odyssey — Deep White Noise: The deep rumble of a spaceship's engine is your constant companion on an interstellar voyage.", zřejmě se tedy jedná o šum se zesílenými nízkými frekvenci, které simulují rachot v kosmické lodi. Slovní spojení "bílý šum" (white noise) není užito správně. Vysvětlete stručně proč.

viz A

Příklad 20 Ergodický náhodný signál má $N = 5$ vzorků $x[0]$ až $x[4]$: viz A

`1 5 2 -1 1`

Proveďte vychýlený odhad zadaného autokorelačního koeficientu $R[k]$. Pomůcka: U vychýleného odhadu probíhá normalizace pro všechny hodnoty k pomocí plného počtu vzorků N.

1

$R[4] =$ $\frac{1}{5}$