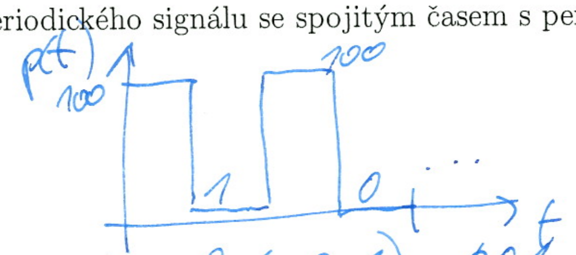
Semestrální zkouška ISS, řádný termín, 12.1.2017, skupina A

Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: ....
(čitelně!)

Příklad 1 Určete střední výkon periodického signálu se spojitým časem s periodou $T_1 = 4$ s. Jedna perioda je dána jako

$$x(t) = \begin{cases} 10 & \text{pro} \quad 0 \le t < 1\text{s} \\ 1 & \text{pro} \quad 1\text{s} \le t < 2\text{s} \\ 10 & \text{pro} \quad 2\text{s} \le t < 3\text{s} \\ 0 & \text{pro} \quad 3\text{s} \le t < 4\text{s} \end{cases}$$



$P_s = \frac{1}{T}\int p(t)\,dt = \frac{1}{4}\cdot(100\cdot 1+1\cdot 1+100\cdot 1+0\cdot 1) = \frac{201}{4} = \underline{50{,}25}$

Příklad 2 Ve 2D-signálu (obrázku) o rozměrech 256×256 pixelů má pixel $x[0,0]$ hodnotu 3, všechny ostatní jsou nulové. Určete hodnoty všech koeficientů jeho 2D diskrétní Fourierovy transformace $X[m,n]$ pro $m \in 0\dots255$ a $n \in 0\dots255$

$X[m,n] = \sum_k\sum_l x[k,l]\cdot e^{-j2\pi\left(\frac{mk}{M}+\frac{nl}{N}\right)} = \cancel{\dots}$ pouze vzorek $x[0,0]$ je nenulový, takže z dvojité sumy zbyde jen 1 prvek...

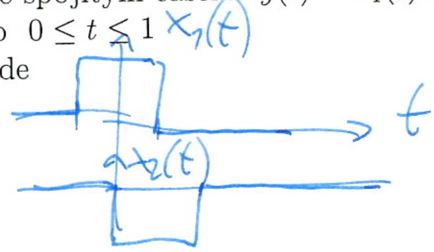
$= 3\cdot e^{-j2\pi\left(\frac{m0}{256}+\frac{n0}{256}\right)} = 3\cdot e^{-j0} = 3$

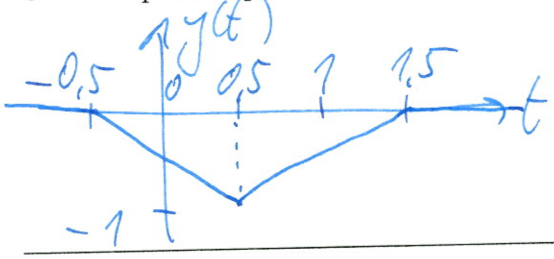
všechny koeficienty $X[m,n] = 3$

Příklad 3 Nakreslete výsledek konvoluce dvou signálů se spojitým časem: $y(t) = x_1(t) \star x_2(t)$.

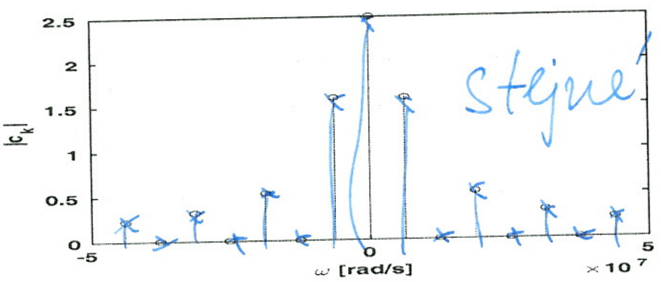
$$x_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad -0.5 \le t \le 0.5 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases} \qquad x_2(t) = \begin{cases} -1 & \text{pro} \quad 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

Označte prosím pečlivě hodnoty na obou osách.





Příklad 4 Na obrázku jsou moduly koeficientů Fourierovy řady (FŘ) signálu $x(t)$. Do stejného obrázku nakreslete moduly koeficientů FŘ signálu $y(t) = x(t - 1\text{ ms})$.



při posunu signálu se koeficienty FŘ násobí $e^{-j\omega_1 k\tau}$ zpoždění. Abs. hodnota tohoto čísla je 1, takže se moduly nezmění

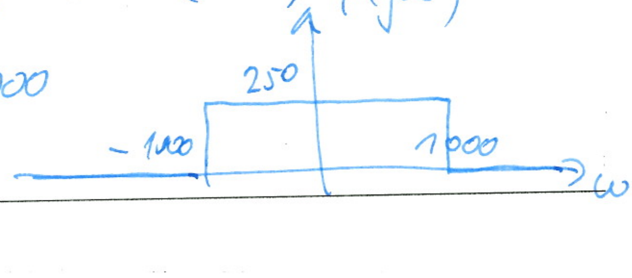
Příklad 5 Spektrální funkce signálu $x(t)$ je $X(j\omega) = \begin{cases} 50 & \text{pro} \quad -5000 \le \omega \le 5000 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

Napište a nakreslete spektrální funkci $Y(j\omega)$ signálu $y(t) = x(\frac{t}{5})$.

$y = x(mt) \Rightarrow Y(j\omega) = \cancel{\frac{1}{m}}\, X\left(\frac{\omega}{m}\right)$

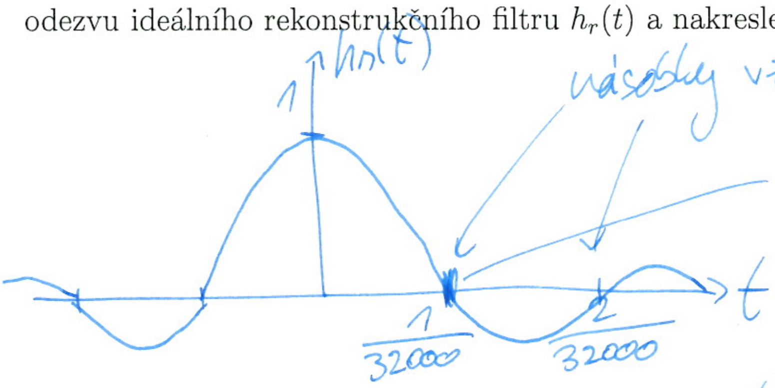
$m = \frac{1}{5}$, $\frac{1}{m} = 5 \Rightarrow$ zvětšení 5×, zrychlení 5×

$Y(j\omega) = \begin{cases} 250 & \text{pro} \quad -1000 \le \omega \le 1000 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$



4

Příklad 6 Signál je ideálně vzorkován na vzorkovací frekvenci F_s =32 kHz. Napište vztah pro impulsní odezvu ideálního rekonstrukčního filtru $h_r(t)$ a nakreslete ji.

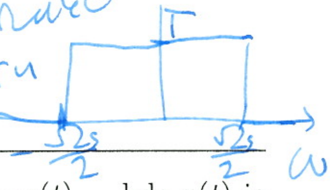


násobky vzorkovací periody

$kt = \pi$

$k \cdot \frac{1}{32000} = \pi \qquad k = 32000\pi$

Dá se také odvodit jako zpětná FT frekv. charakteristiky rekonstrukčního filtru



$h_r(t) =$ $\mathrm{sinc}(kt) = \mathrm{sinc}(32000\pi t)$

Příklad 7 Systém se spojitým časem je popsán diferenciální rovnicí $RC\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$, kde $x(t)$ je vstup a $y(t)$ je výstup.
Napište přenosovou funkci systému $H(s)$.

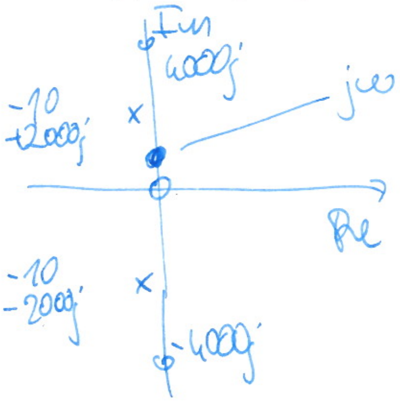
$RC\,Y(s)\cdot s + Y(s) = X(s)$

$Y(s)(RCs + 1) = X(s)$

$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{RCs+1}$

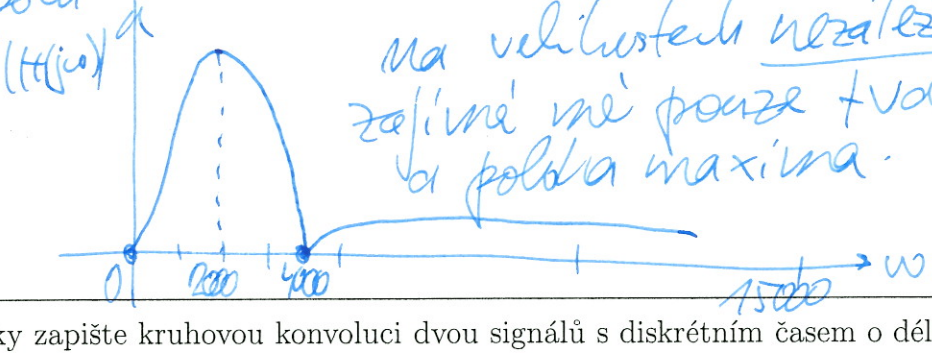
$H(s) =$ $\frac{1}{RCs+1}$

Příklad 8 Přenosová funkce systému se spojitým časem má nulový bod $n_1 = 0$, dva komplexně sdružené nulové body a dva komplexně sdružené póly:
$n_{2,3} = \pm 4000j, \quad p_{1,2} = -10 \pm 2000j$.
Nakreslete přibližně modulovou frekvenční charakteristiku $|H(j\omega)|$ pro kruhové frekvence $\omega \in [0,\ 15000]$ rad/s.



blízkost bodu k nulovému bodu ⇒ minimum $H(j\omega)$.

pólu ⇒ maximum $H(j\omega)$



na velikostech nezáleží

zajímá mě pouze tvar a poloha maxima.

Příklad 9 Vypočtěte a do tabulky zapište kruhovou konvoluci dvou signálů s diskrétním časem o délce $N = 4$:

n	0	1	2	3
$x_1[n]$	4	3	1	2
$x_2[n]$	1	1	0	1
$x_1[n]$ Ⓝ $x_2[n]$	9	8	6	7

Příklad 10 Hodnoty dvou vzorků signálu s diskrétním časem $x[n]$ jsou: $x[0] = 1$, $x[1] = -1$, ostatní jsou nulové. Vypočtěte hodnotu Fourierovy transformace s diskrétním časem (DTFT) $\tilde{X}(e^{j\omega})$ tohoto signálu pro normovanou kruhovou frekvenci $\omega = 3\pi$ rad~~/s~~.

$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] \cdot e^{-j\omega n} =$

$= 1 \cdot \underbrace{e^{-j0\cdot 3\pi}}_{+1} + (-1)\cdot \underbrace{e^{-j1\cdot 3\pi}}_{-1} = 1 + 1 = 2$

$\tilde{X}(e^{j3\pi}) =$ 2

A

Příklad 11 Provádíme výpočet spektra pomocí diskrétní Fourierovy transformace (DFT). Počet vzorků je $N = 256$, vzorkovací frekvence je $F_s = 64$ kHz. Zajímá nás frekvence 31 kHz. Který koeficient $X[k]$ budeme zobrazovat ? norm. frekvence $\frac{31}{64}$ hledáme $\frac{k}{N} = \frac{31}{64}$

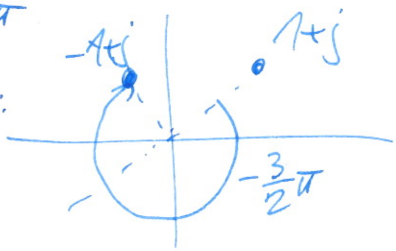
$k = \frac{256 \cdot 31}{64} = 4 \cdot 31 = \underline{124}$

Příklad 12 Diskrétní signál $x[n]$ má délku $N = 8$ vzorků. Hodnoty jsou následující: zpoždění! $x[n]$=`1 -1 0 0 0 0 0 0`. Známe hodnotu koeficientu jeho diskrétní Fourierovy transformace (DFT): $X[2] = 1 + j$. Určete hodnotu koeficientu DFT $Y[2]$ signálu $y[n]$, který je kruhově posunutou verzí signálu $x[n]$: $y[n]$=`0 0 0 1 -1 0 0 0`.

$m=3$

$Y[k] = X[k] \cdot e^{-j\frac{mk}{N}2\pi}$

nebo takto:



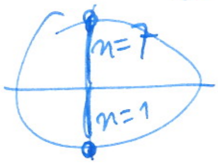
$Y[2] = (1+j)\, e^{-j\frac{3 \cdot 2}{8}2\pi} = (1+j)e^{-j\frac{3}{2}\pi} = (1+j) \cdot j = \underline{-1+j}$

Příklad 13 Diskrétní signál $x[n]$ má délku $N = 8$ vzorků. Jeho hodnoty jsou $x[0] = 1$, $x[1] = \sqrt{2}$, $x[7] = \sqrt{2}$, ostatní jsou nulové. Spočítejte koeficient $X[2]$ diskrétní Fourierovy transformace (DFT).

$e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = e^{-j\frac{2\pi}{8} \cdot 2n} = e^{-j\frac{\pi}{2}n} \rightarrow$ pro $n=0 \Rightarrow 1$

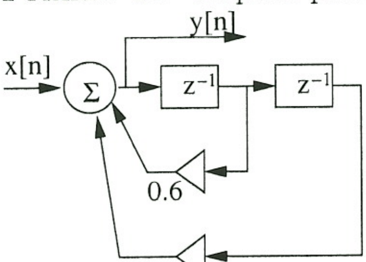
$n=1 \Rightarrow e^{-j\frac{\pi}{2}} = -j$

$n=7 \Rightarrow e^{-j\frac{7\pi}{2}} = +j$



$X[2] = 1 + \cancel{\sqrt{2}(-j)} + \cancel{\sqrt{2}(j)} = \underline{1}$

Příklad 14 Napište přenosovou funkci IIR filtru podle schématu.



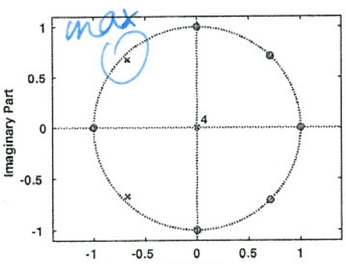
$y[n] = x[n] + 0{,}6\, y[n-1] + 0{,}3\, y[n-2]$

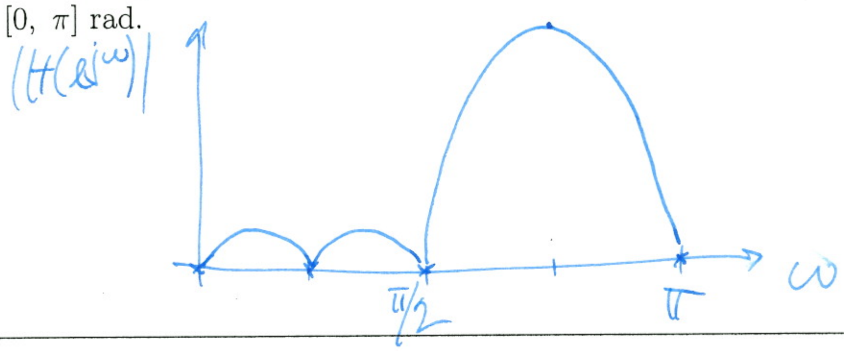
$Y(z) = X(z) + 0{,}6\, Y(z) z^{-1} + 0{,}3\, Y(z) z^{-2}$

$Y(z)(1 - 0{,}6 z^{-1} - 0{,}3 z^{-2}) = X(z)$

$H(z) = \frac{1}{1 - 0{,}6 z^{-1} - 0{,}3 z^{-2}}$

Příklad 15 Na obrázku je rozložení nulových bodů a pólů číslicového filtru. Číslo 4 v počátku značí, že se jedná o čtyřnásobný pól. Nakreslete přibližně modulovou frekvenční charakteristiku $|H(e^{j\omega})|$ pro normované kruhové frekvence $\omega \in [0,\ \pi]$ rad.





A

Příklad 16 Máte k disposici záznam $\Omega = 10^6$ šachových partií. Popište, jak odhadnete sdruženou pravděpodobnost toho, že v té samé partii jel v 5. tahu bílý pěšcem a v 7. tahu černý věží.

1) spočítat všechny partie, kde jel v 5. tahu bílý pěšcem a v 7. tahu černý věží ⟹ count.

2) podělit celkovým počtem partií $\frac{count}{10^6}$.

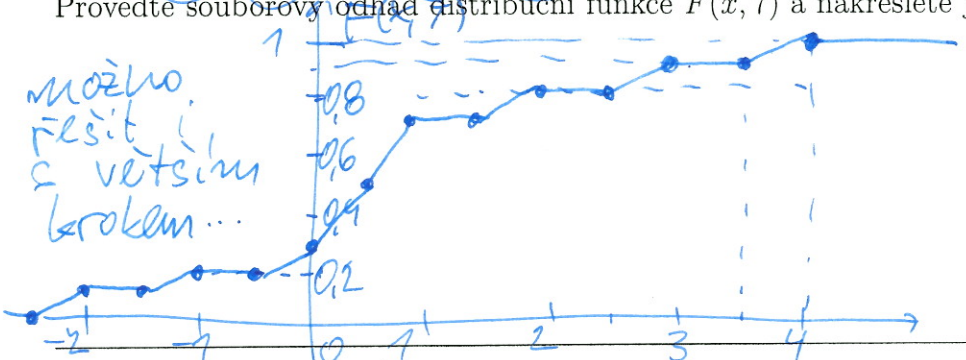
Příklad 17 V tabulce jsou hodnoty vzorku $n = 7$ náhodného signálu pro $\Omega = 10$ realizací:

ω	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\xi_\omega[7]$	0.53	1.83	-2.25	0.86	0.31	-1.30	-0.43	0.34	3.57	2.76

Provedte souborový odhad distribuční funkce $F(x, 7)$ a nakreslete ji.

x	count < x	prsta < x
-3	0	0
-2,5	0	0
-2	1	0,1
-1,5	1	0,1
-1	2	0,2
-0,5	2	0,2
0	3	0,3
0,5	5	0,5
1	7	0,7
1,5	7	0,7
2	8	0,8
2,5	8	0,8
3		...

možno řešit i s větším krokem...



Příklad 18 Na $\Omega = 4000$ realizacích náhodného procesu byla naměřena tabulka (sdružený histogram) hodnot mezi časy n_1 a n_2. Spočítejte korelační koeficient $R[n_1, n_2]$. Pomůcka: Jako reprezentativní hodnoty x_1 a x_2 při numerickém výpočtu integrálu $R[n_1, n_2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2, n_1, n_2) dx_1 dx_2$ použijte středy intervalů v tabulce.

intervaly x_1	intervaly x_2: [-20, -10]	[-10, 0]	[0, 10]	[10, 20]
[10, 20]	0	0	0	0
[0, 10]	0	1000	0	0
[-10, 0]	0	0	1000	0
[-20, -10]	0	0	0	2000

Přechod na pravděpodobnosti: dělení 4000. Přechod na PDF: dělení plochou 2D intervalu: 100. Integrace: násobení součinem hodnot $x_1 x_2$ a plochou 2D intervalu: 100

$R[n_1, n_2] = \frac{1000}{4000 \cdot 100} (5)(-5) \cdot 100 + \frac{1000}{4000 \cdot 100} \cdot 5 \cdot (-5) \cdot 100 + \frac{2000}{4000 \cdot 100} 15 \cdot (-15) \cdot 100 =$

$= -\frac{1}{4} \cdot 25 - \frac{1}{4} \cdot 25 - \frac{1}{2} \cdot 225 =$

$= -12{,}5 - 112{,}5 = \underline{\underline{-125}}$

Příklad 19 V jazyce C máte v poli `Xr` o velikosti `N/2+1` uložené hodnoty reálné složky diskrétní Fourierovy transformace pro $k = 0 \dots \frac{N}{2}$ a v poli `Xi` o stejné velikosti imaginární složky diskrétní Fourierovy transformace pro $k = 0 \dots \frac{N}{2}$. Napište kód pro odhad spektrální hustoty výkonu, výsledek nechť je v poli `PSD` o stejné velikosti.

```
for(k=0; k<=N/2; k++) {
    G(k) = 1/N * (Xr * Xr + Xi * Xi);
}
```

Příklad 20 Korelační koeficienty náhodného signálu $R[k]$ jsou: $R[0] = 5$, $R[1] = 1$, $R[-1] = 1$, ostatní jsou nulové. Určete, zda se jedná o bílý šum a svou odpověď zdůvodněte.

Nemůže být bílý šum, ten má pouze R[0] nenulový. Pokud se udělá DTFT tohoto, nevyjde konstanta (není bílý).

Bílý šum: ~~ANO~~ / NE, zdůvodnění: ....

Semestrální zkouška ISS, řádný termín, 12.1.2017, skupina B

Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: ....
(čitelně!)

Příklad 1 Určete střední výkon periodického signálu se spojitým časem s periodou $T_1 = 4$ s. Jedna perioda je dána jako

$$x(t) = \begin{cases} 10 & \text{pro} \quad 0 \leq t < 1\text{s} \\ 2 & \text{pro} \quad 1\text{s} \leq t < 2\text{s} \\ 10 & \text{pro} \quad 2\text{s} \leq t < 3\text{s} \\ 0 & \text{pro} \quad 3\text{s} \leq t < 4\text{s} \end{cases}$$

viz A

$P_s = \frac{204}{4} = \underline{\underline{51}}$

Příklad 2 Ve 2D-signálu (obrázku) o rozměrech 256×256 pixelů má pixel $x[0,0]$ hodnotu 2, všechny ostatní jsou nulové. Určete hodnoty všech koeficientů jeho 2D diskrétní Fourierovy transformace $X[m,n]$ pro $m \in 0 \ldots 255$ a $n \in 0 \ldots 255$

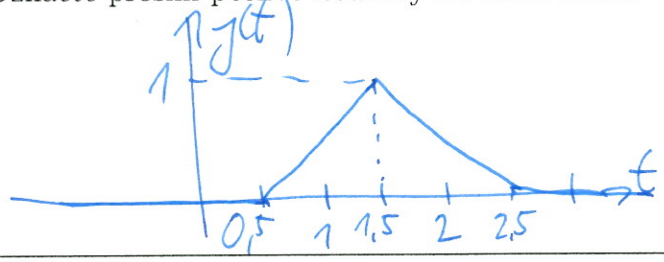
viz A

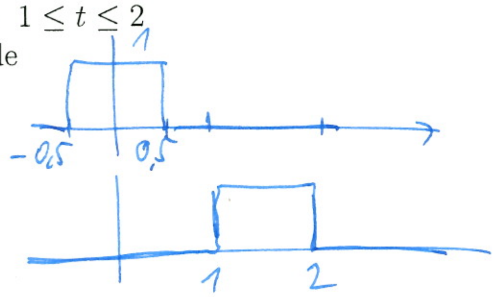
všechny $X[m,n] = 2$

Příklad 3 Nakreslete výsledek konvoluce dvou signálů se spojitým časem: $y(t) = x_1(t) \star x_2(t)$.

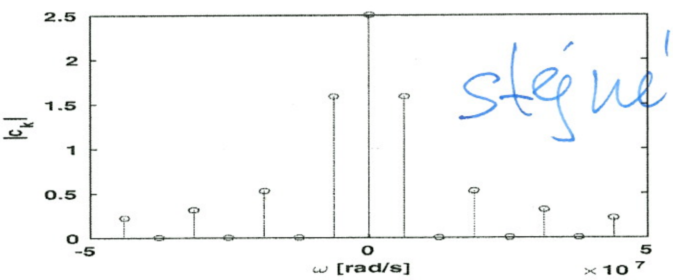
$$x_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad -0.5 \leq t \leq 0.5 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases} \qquad x_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

Označte prosím pečlivě hodnoty na obou osách.





Příklad 4 Na obrázku jsou moduly koeficientů Fourierovy řady (FŘ) signálu $x(t)$. Do stejného obrázku nakreslete moduly koeficientů FŘ signálu $y(t) = x(t + 1\text{ ms})$.



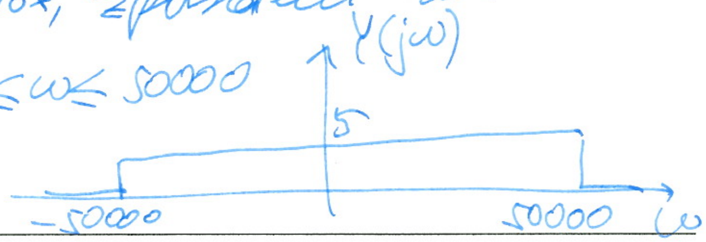
viz A

Příklad 5 Spektrální funkce signálu $x(t)$ je $X(j\omega) = \begin{cases} 50 & \text{pro} \quad -5000 \leq \omega \leq 5000 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$ viz A

Napište a nakreslete spektrální funkci $Y(j\omega)$ signálu $y(t) = x(10t)$.

$m = 10$; $\frac{1}{m} = \frac{1}{10} \Rightarrow$ zmenšení 10×, zpomalení 10×

$Y(j\omega) = \begin{cases} 5 & \text{pro} \quad -50000 \leq \omega \leq 50000 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$



B

Příklad 6 Signál je ideálně vzorkován na vzorkovací frekvenci F_s =32 kHz. Napište vztah pro impulsní odezvu ideálního rekonstrukčního filtru $h_r(t)$ a nakreslete ji.

viz A

$h_r(t)$ =........................

Příklad 7 Systém se spojitým časem je popsán diferenciální rovnicí $\alpha\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$, kde $x(t)$ je vstup a $y(t)$ je výstup.
Napište přenosovou funkci systému $H(s)$.

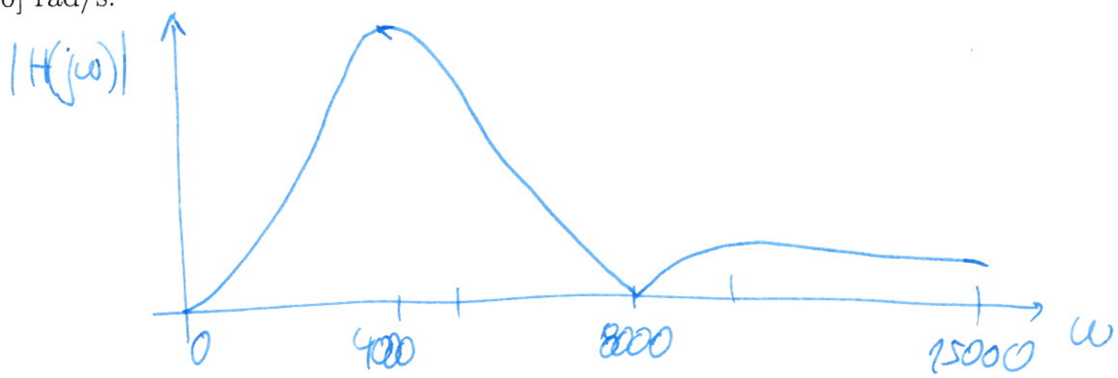
viz A

$H(s) = \frac{1}{\alpha s + 1}$

Příklad 8 Přenosová funkce systému se spojitým časem má nulový bod $n_1 = 0$, dva komplexně sdružené nulové body a dva komplexně sdružené póly:
$n_{2,3} = \pm 8000j$, $p_{1,2} = -10 \pm 4000j$.

viz A

Nakreslete přibližně modulovou frekvenční charakteristiku $|H(j\omega)|$ pro kruhové frekvence $\omega \in [0,\ 15000]$ rad/s.



Příklad 9 Vypočtěte a do tabulky zapište kruhovou konvoluci dvou signálů s diskrétním časem o délce $N = 4$:

n	0	1	2	3
$x_1[n]$	4	3	1	2
$x_2[n]$	-1	-1	0	-1
$x_1[n]$ Ⓝ $x_2[n]$	-9	-8	-6	-7

Příklad 10 Hodnoty dvou vzorků signálu s diskrétním časem $x[n]$ jsou: $x[0] = 1$, $x[1] = -1$, ostatní jsou nulové. Vypočtěte hodnotu Fourierovy transformace s diskrétním časem (DTFT) $\tilde{X}(e^{j\omega})$ tohoto signálu pro kruhovou frekvenci $\omega = 4\pi$ rad/s.

viz A

$\tilde{X}(e^{j4\pi}) = 1 \cdot \underbrace{e^{-j0\cdot 4\pi}}_{1} + (-1)\cdot \underbrace{e^{-j\cdot 1\cdot 4\pi}}_{1} = 1 - 1 = \underline{\underline{0}}$

B

Příklad 11 Provádíme výpočet spektra pomocí diskrétní Fourierovy transformace (DFT). Počet vzorků je $N = 256$, vzorkovací frekvence je $F_s = 64$ kHz. Zajímá nás frekvence 10 kHz. Který koeficient $X[k]$ budeme zobrazovat ?

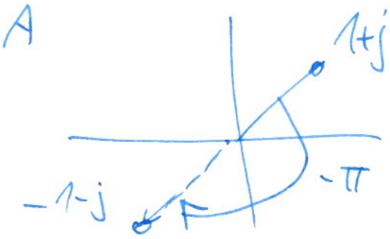
viz A

$k = \frac{256 \cdot 10}{64} = \underline{\underline{40}}$

Příklad 12 Diskrétní signál $x[n]$ má délku $N = 8$ vzorků. Hodnoty jsou následující: $x[n]$=1 -1 0 0 0 0 0 0. Známe hodnotu koeficientu jeho diskrétní Fourierovy transformace (DFT): $X[2] = 1 + j$. Určete hodnotu koeficientu DFT $Y[2]$ signálu $y[n]$, který je kruhově posunutou verzí signálu $x[n]$: $y[n]$=0 0 1 -1 0 0 0 0.

viz A

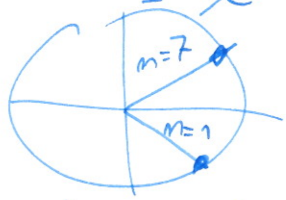
$m=2$



$Y[2] = (1+j)\,e^{-j\frac{2\cdot 2}{8}\cdot 2\pi} = (1+j)\,e^{-j\pi} = (1+j)(-1) = \underline{\underline{-1-j}}$

Příklad 13 Diskrétní signál $x[n]$ má délku $N = 8$ vzorků. Jeho hodnoty jsou $x[0] = 1$, $x[1] = \sqrt{2}$, $x[7] = \sqrt{2}$, ostatní jsou nulové. Spočítejte koeficient $X[1]$ diskrétní Fourierovy transformace (DFT).

$e^{-j\frac{2\pi}{N}km} = e^{-j\frac{2\pi}{8}\cdot 1\cdot m} = e^{-j\frac{\pi}{4}m}$



pro $m=0 \Rightarrow 1$

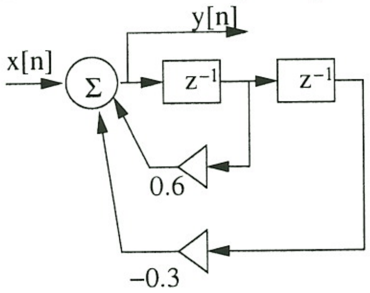
$m=1 \Rightarrow e^{-j\frac{\pi}{4}} = +\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}$

$m=7 \quad e^{-j7\frac{\pi}{4}} = +\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}$

$X[1] = 1\cdot 1 + \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cancel{- j\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) + \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \cancel{+ j\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) = 1+1+1 = \underline{\underline{3}}$

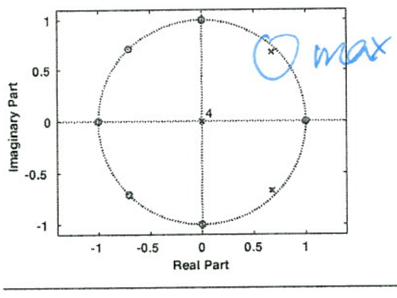
Příklad 14 Napište přenosovou funkci IIR filtru podle schématu.

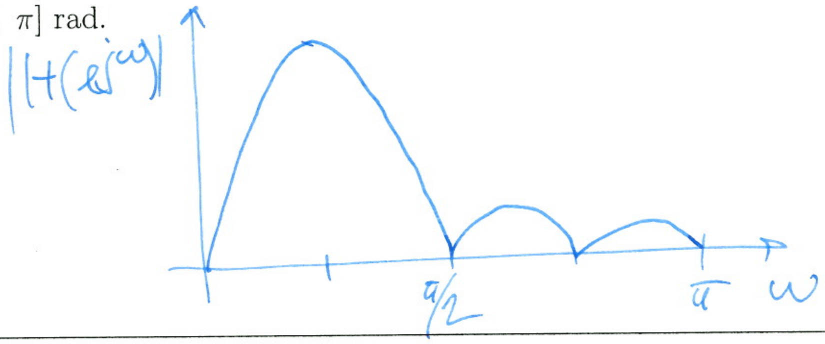
viz A



$H(z) = \frac{1}{1-0{,}6z^{-1}+0{,}3z^{-2}}$

Příklad 15 Na obrázku je rozložení nulových bodů a pólů číslicového filtru. Číslo 4 v počátku značí, že se jedná o čtyřnásobný pól. Nakreslete přibližně modulovou frekvenční charakteristiku $|H(e^{j\omega})|$ pro normované kruhové frekvence $\omega \in [0, \pi]$ rad.





B

Příklad 16 Máte k disposici záznam $\Omega = 10^6$ šachových partií. Popište, jak odhadnete sdruženou pravděpodobnost toho, že v té samé partii jel v 5. tahu bílý pěšcem a v 7. tahu černý věží.

viz A

Příklad 17 V tabulce jsou hodnoty vzorku $n = 7$ náhodného signálu pro $\Omega = 10$ realizací:

ω	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\xi_\omega[7]$	0.53	1.83	-2.25	0.86	0.31	-1.30	-0.43	0.34	3.57	2.76

Proveďte souborový odhad distribuční funkce $F(x, 7)$ a nakreslete ji.

viz A

Příklad 18 Na $\Omega = 4000$ realizacích náhodného procesu byla naměřena tabulka (sdružený histogram) hodnot mezi časy n_1 a n_2. Spočítejte korelační koeficient $R[n_1, n_2]$. Pomůcka: Jako reprezentativní hodnoty x_1 a x_2 při numerickém výpočtu integrálu $R[n_1, n_2] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2, n_1, n_2) dx_1 dx_2$ použijte středy intervalů v tabulce.

intervaly x_1	intervaly x_2 [-20, -10]	[-10, 0]	[0, 10]	[10, 20]
[10, 20]	0	0	0	0
[0, 10]	0	1000	0	0
[-10, 0]	0	0	1000	0
[-20, -10]	0	0	0	2000

viz A

$R[n_1, n_2] =$ ....

Příklad 19 V jazyce C máte v poli `Xr` o velikosti `N/2+1` uložené hodnoty reálné složky diskrétní Fourierovy transformace pro $k = 0 \dots \frac{N}{2}$ a v poli `Xi` o stejné velikosti imaginární složky diskrétní Fourierovy transformace pro $k = 0 \dots \frac{N}{2}$. Napište kód pro odhad spektrální hustoty výkonu, výsledek nechť je v poli `PSD` o stejné velikosti.

viz A

Příklad 20 Korelační koeficienty náhodného signálu $R[k]$ jsou: $R[0] = 6$, $R[1] = 2$, $R[-1] = 2$, ostatní jsou nulové. Určete, zda se jedná o bílý šum a svou odpověď zdůvodněte.

viz A

Bílý šum: ANO / NE, zdůvodnění: ....

Semestrální zkouška ISS, řádný termín, 12.1.2017, skupina C

Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: ....
(čitelně!)

Příklad 1 Určete střední výkon periodického signálu se spojitým časem s periodou $T_1 = 4$ s. Jedna perioda je dána jako

$$x(t) = \begin{cases} 10 & \text{pro} \quad 0 \leq t < 1\text{s} \\ 3 & \text{pro} \quad 1\text{s} \leq t < 2\text{s} \\ 10 & \text{pro} \quad 2\text{s} \leq t < 3\text{s} \\ 0 & \text{pro} \quad 3\text{s} \leq t < 4\text{s} \end{cases}$$

viz A

$P_s = \frac{209}{4} = \underline{\underline{52,25}}$

Příklad 2 Ve 2D-signálu (obrázku) o rozměrech 256×256 pixelů má pixel $x[0,0]$ hodnotu 1, všechny ostatní jsou nulové. Určete hodnoty všech koeficientů jeho 2D diskrétní Fourierovy transformace $X[m,n]$ pro $m \in 0 \ldots 255$ a $n \in 0 \ldots 255$

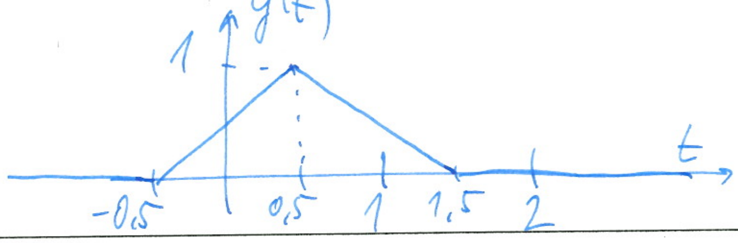
viz A

všechny $X[m,n] = 1$

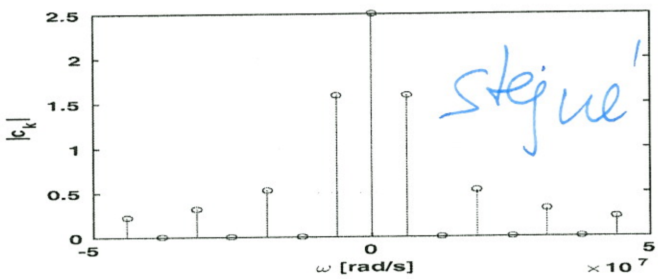
Příklad 3 Nakreslete výsledek konvoluce dvou signálů se spojitým časem: $y(t) = x_1(t) \star x_2(t)$.

$$x_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad -0.5 \leq t \leq 0.5 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases} \qquad x_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

Označte prosím pečlivě hodnoty na obou osách.



Příklad 4 Na obrázku jsou moduly koeficientů Fourierovy řady (FŘ) signálu $x(t)$. Do stejného obrázku nakreslete moduly koeficientů FŘ signálu $y(t) = x(t - 3 \text{ ms})$.



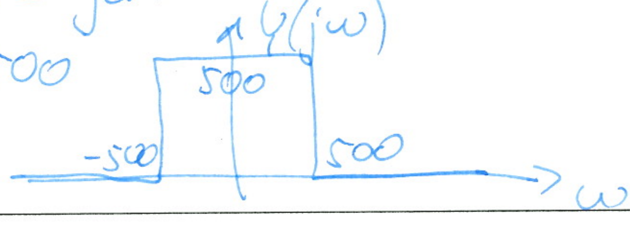
viz A

Příklad 5 Spektrální funkce signálu $x(t)$ je $X(j\omega) = \begin{cases} 50 & \text{pro} \quad -5000 \leq \omega \leq 5000 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

Napište a nakreslete spektrální funkci $Y(j\omega)$ signálu $y(t) = x(\frac{t}{10})$.

$m = \frac{1}{10}, \ \frac{1}{m} = 10 \Rightarrow$ zvětšení 10x, zrychlení 10x

$$Y(j\omega) = \begin{cases} 500 & \text{pro} \quad -500 \leq \omega \leq 500 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$



C

Příklad 6 Signál je ideálně vzorkován na vzorkovací frekvenci F_s =32 kHz. Napište vztah pro impulsní odezvu ideálního rekonstrukčního filtru $h_r(t)$ a nakreslete ji.

viz A

$h_r(t)$ =.......................

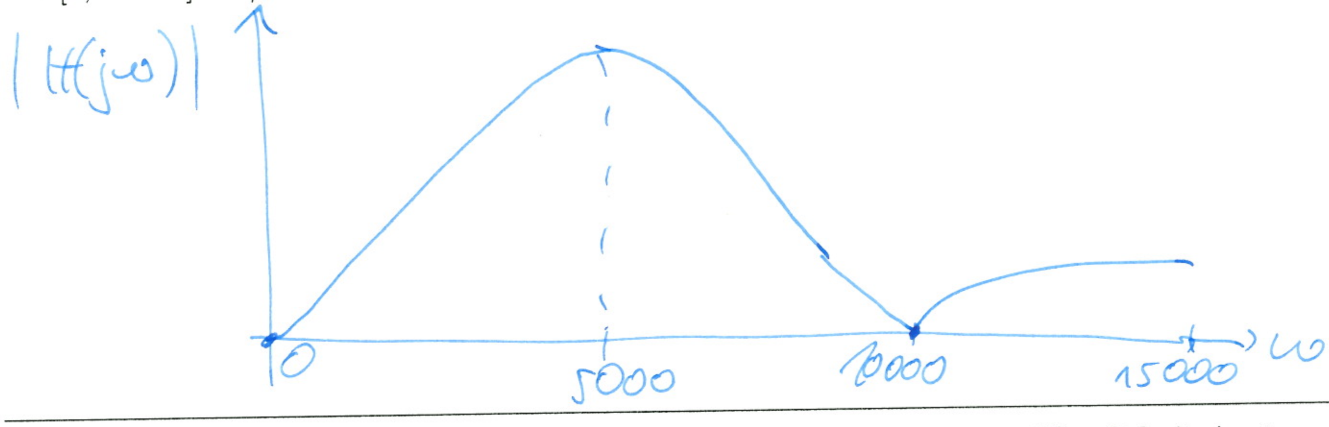
Příklad 7 Systém se spojitým časem je popsán diferenciální rovnicí $\beta\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$, kde $x(t)$ je vstup a $y(t)$ je výstup.
Napište přenosovou funkci systému $H(s)$.

viz A

$H(s)$ =$\frac{1}{\beta s + 1}$

Příklad 8 Přenosová funkce systému se spojitým časem má nulový bod $n_1 = 0$, dva komplexně sdružené nulové body a dva komplexně sdružené póly:
$n_{2,3} = \pm 10000j, \quad p_{1,2} = -10 \pm 5000j$.
Nakreslete přibližně modulovou frekvenční charakteristiku $|H(j\omega)|$ pro kruhové frekvence $\omega \in [0,\ 15000]$ rad/s.

viz A



Příklad 9 Vypočtěte a do tabulky zapište kruhovou konvoluci dvou signálů s diskrétním časem o délce $N = 4$:

n	0	1	2	3
$x_1[n]$	4	3	1	2
$x_2[n]$	1	-1	0	1
$x_1[n]$ Ⓝ $x_2[n]$	5	0	0	5

Příklad 10 Hodnoty dvou vzorků signálu s diskrétním časem $x[n]$ jsou: $x[0] = 1, \quad x[1] = -1$, ostatní jsou nulové. Vypočtěte hodnotu Fourierovy transformace s diskrétním časem (DTFT) $\tilde{X}(e^{j\omega})$ tohoto signálu pro normovanou ~~kruhovou~~ frekvenci $\omega = \pi$ rad/~~s~~.

viz A

$\tilde{X}(e^{j\pi})$ =$1 \cdot \underbrace{e^{-j \cdot 0 \cdot \pi}}_{1} + (-1)\underbrace{e^{-j \cdot 1 \cdot \pi}}_{-1} = 1 + 1 = \underline{\underline{2}}$

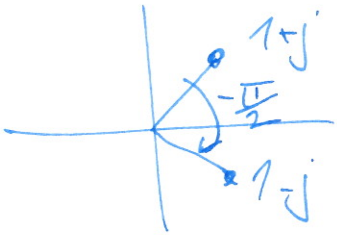
C

Příklad 11 Provádíme výpočet spektra pomocí diskrétní Fourierovy transformace (DFT). Počet vzorků je $N = 256$, vzorkovací frekvence je $F_s = 64$ kHz. Zajímá nás frekvence 20 kHz. Který koeficient $X[k]$ budeme zobrazovat ? viz A

$k = \frac{256 \cdot 20}{64} = \underline{\underline{80}}$

Příklad 12 Diskrétní signál $x[n]$ má délku $N = 8$ vzorků. Hodnoty jsou následující: viz A
$x[n]$=1 -1 0 0 0 0 0 0. Známe hodnotu koeficientu jeho diskrétní Fourierovy transformace (DFT): $X[2] = 1 + j$. Určete hodnotu koeficientu DFT $Y[2]$ signálu $y[n]$, který je kruhově posunutou verzí signálu $x[n]$: $y[n]$=0 1 -1 0 0 0 0 0.

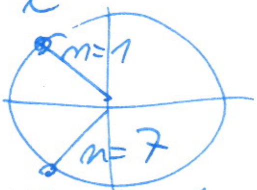
$m=1$



$Y[2] = (1+j)e^{-j\frac{1\cdot 2}{8}\cdot 2\pi} = (1+j)e^{-j\frac{\pi}{2}} = (1+j)(-j) = \underline{\underline{1-j}}$

Příklad 13 Diskrétní signál $x[n]$ má délku $N = 8$ vzorků. Jeho hodnoty jsou
$x[0] = 1, \quad x[1] = \sqrt{2}, \quad x[7] = \sqrt{2}$, ostatní jsou nulové. Spočítejte koeficient $X[5]$ diskrétní Fourierovy transformace (DFT).

$e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = e^{-j\frac{2\pi}{8}5\cdot n} = e^{-j\frac{5}{4}\pi n}$



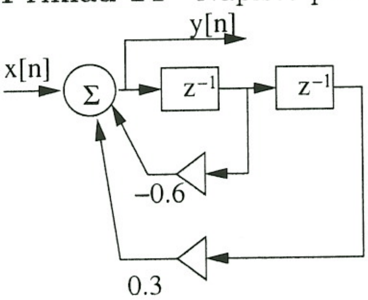
pro $n=0 \Rightarrow 1$

$n=1 \Rightarrow e^{-j\frac{5}{4}\pi} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}$

$n=7 \Rightarrow e^{-j\frac{35}{4}\pi} = e^{-j\frac{32}{4}\pi} \cdot e^{-j\frac{3}{4}\pi} = e^{-j\frac{3}{4}\pi} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}$

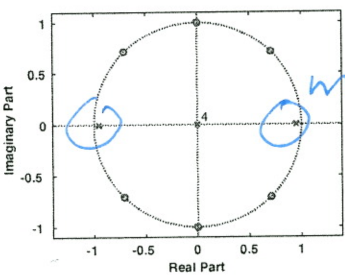
$X[5] = 1\cdot 1 + \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \cancel{j\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) + \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \cancel{j\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) = 1 - 2 = \underline{\underline{-1}}$

Příklad 14 Napište přenosovou funkci IIR filtru podle schématu. viz A

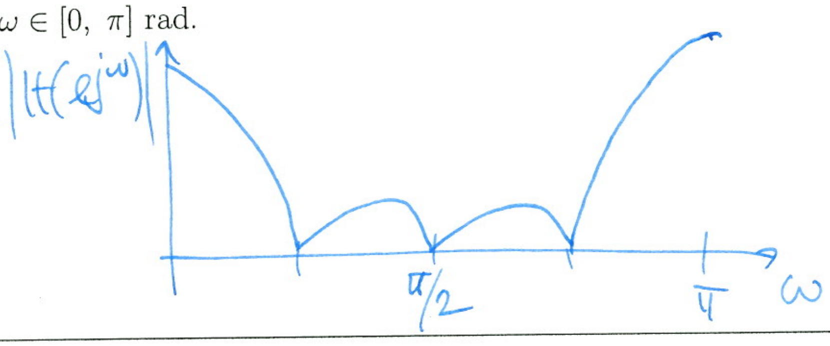


$H(z) = \frac{1}{1 + 0{,}6z^{-1} - 0{,}3z^{-2}}$

Příklad 15 Na obrázku je rozložení nulových bodů a pólů číslicového filtru. Číslo 4 v počátku značí, že se jedná o čtyřnásobný pól. Nakreslete přibližně modulovou frekvenční charakteristiku $|H(e^{j\omega})|$ pro normované kruhové frekvence $\omega \in [0, \pi]$ rad.



max



C

Příklad 16 Máte k disposici záznam $\Omega = 10^6$ šachových partií. Popište, jak odhadnete sdruženou pravděpodobnost toho, že v té samé partii jel v 5. tahu bílý pěšcem a v 7. tahu černý věží.

viz A

Příklad 17 V tabulce jsou hodnoty vzorku $n = 7$ náhodného signálu pro $\Omega = 10$ realizací:

ω	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\xi_\omega[7]$	0.53	1.83	-2.25	0.86	0.31	-1.30	-0.43	0.34	3.57	2.76

viz A

Provedte souborový odhad distribuční funkce $F(x, 7)$ a nakreslete ji.

Příklad 18 Na $\Omega = 4000$ realizacích náhodného procesu byla naměřena tabulka (sdružený histogram) hodnot mezi časy n_1 a n_2. Spočítejte korelační koeficient $R[n_1, n_2]$. Pomůcka: Jako reprezentativní hodnoty x_1 a x_2 při numerickém výpočtu integrálu $R[n_1, n_2] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2, n_1, n_2) dx_1 dx_2$ použijte středy intervalů v tabulce.

intervaly x_1	intervaly x_2 [-20, -10]	[-10, 0]	[0, 10]	[10, 20]
[10, 20]	0	0	0	0
[0, 10]	0	1000	0	0
[-10, 0]	0	0	1000	0
[-20, -10]	0	0	0	2000

viz A

$R[n_1, n_2] =$ ....

Příklad 19 V jazyce C máte v poli `Xr` o velikosti `N/2+1` uložené hodnoty reálné složky diskrétní Fourierovy transformace pro $k = 0 \dots \frac{N}{2}$ a v poli `Xi` o stejné velikosti imaginární složky diskrétní Fourierovy transformace pro $k = 0 \dots \frac{N}{2}$. Napište kód pro odhad spektrální hustoty výkonu, výsledek nechť je v poli `PSD` o stejné velikosti.

viz A

Příklad 20 Korelační koeficienty náhodného signálu $R[k]$ jsou: $R[0] = 6$, $R[1] = 1$, $R[-1] = 1$, ostatní jsou nulové. Určete, zda se jedná o bílý šum a svou odpověď zdůvodněte.

viz A

Bílý šum: ANO / NE, zdůvodnění: ....

D

Semestrální zkouška ISS, řádný termín, 12.1.2017, skupina D

Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: ....
(čitelně!)

Příklad 1 Určete střední výkon periodického signálu se spojitým časem s periodou $T_1 = 4$ s. Jedna perioda je dána jako

$$x(t) = \begin{cases} 10 & \text{pro } 0 \le t < 1\text{s} \\ 4 & \text{pro } 1\text{s} \le t < 2\text{s} \\ 10 & \text{pro } 2\text{s} \le t < 3\text{s} \\ 0 & \text{pro } 3\text{s} \le t < 4\text{s} \end{cases}$$

viz A

$P_s = \frac{216}{4} = 54$

Příklad 2 Ve 2D-signálu (obrázku) o rozměrech 256×256 pixelů má pixel $x[0,0]$ hodnotu 0.5, všechny ostatní jsou nulové. Určete hodnoty všech koeficientů jeho 2D diskrétní Fourierovy transformace $X[m,n]$ pro $m \in 0 \dots 255$ a $n \in 0 \dots 255$

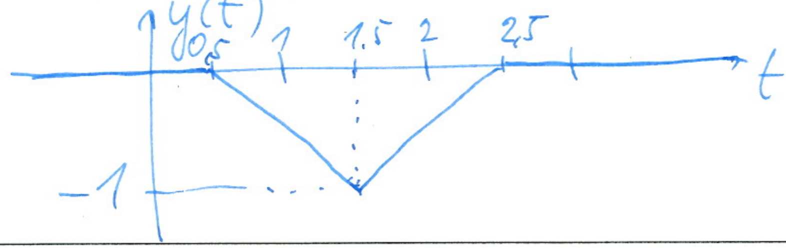
viz A

všechny $X[m,n] = 0{,}5$

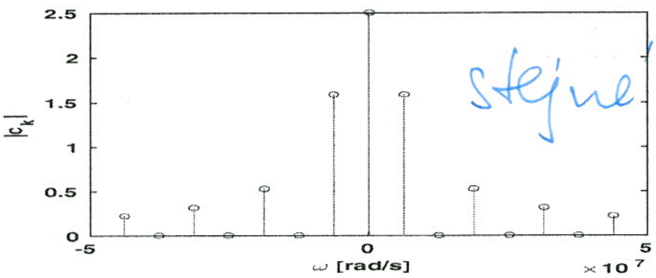
Příklad 3 Nakreslete výsledek konvoluce dvou signálů se spojitým časem: $y(t) = x_1(t) \star x_2(t)$.

$$x_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } -0.5 \le t \le 0.5 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases} \qquad x_2(t) = \begin{cases} -1 & \text{pro } 1 \le t \le 2 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

Označte prosím pečlivě hodnoty na obou osách.



Příklad 4 Na obrázku jsou moduly koeficientů Fourierovy řady (FŘ) signálu $x(t)$. Do stejného obrázku nakreslete moduly koeficientů FŘ signálu $y(t) = x(t + 3\text{ ms})$.



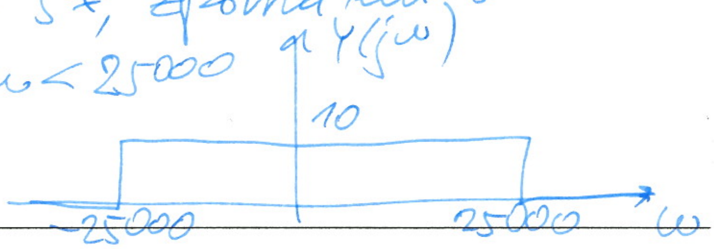
viz A

Příklad 5 Spektrální funkce signálu $x(t)$ je $X(j\omega) = \begin{cases} 50 & \text{pro } -5000 \le \omega \le 5000 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

Napište a nakreslete spektrální funkci $Y(j\omega)$ signálu $y(t) = x(5t)$.

$m = 5; \frac{1}{m} = \frac{1}{5} \Rightarrow$ zmenšení 5×, zpomalení 5×

$$Y(j\omega) = \begin{cases} 10 & \text{pro } -25000 \le \omega < 25000 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$



D

Příklad 6 Signál je ideálně vzorkován na vzorkovací frekvenci $F_s = 32$ kHz. Napište vztah pro impulsní odezvu ideálního rekonstrukčního filtru $h_r(t)$ a nakreslete ji.

viz A

$h_r(t) =$........................

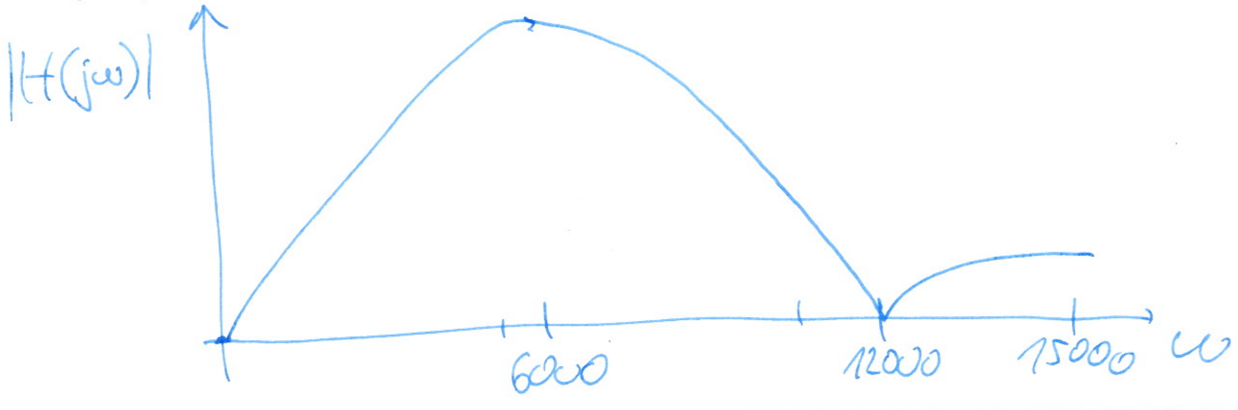
Příklad 7 Systém se spojitým časem je popsán diferenciální rovnicí $A\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$, kde $x(t)$ je vstup a $y(t)$ je výstup.
Napište přenosovou funkci systému $H(s)$.

viz A

$H(s) = \frac{1}{As+1}$

Příklad 8 Přenosová funkce systému se spojitým časem má nulový bod $n_1 = 0$, dva komplexně sdružené nulové body a dva komplexně sdružené póly:
$n_{2,3} = \pm 12000j, \quad p_{1,2} = -10 \pm 6000j.$
Nakreslete přibližně modulovou frekvenční charakteristiku $|H(j\omega)|$ pro kruhové frekvence $\omega \in [0,\ 15000]$ rad/s.

viz A



Příklad 9 Vypočtěte a do tabulky zapište kruhovou konvoluci dvou signálů s diskrétním časem o délce $N = 4$:

n	0	1	2	3
$x_1[n]$	4	3	1	2
$x_2[n]$	-1	1	0	-1
$x_1[n]$ Ⓝ $x_2[n]$	−5	0	0	−5

Příklad 10 Hodnoty dvou vzorků signálu s diskrétním časem $x[n]$ jsou: $x[0] = 1$, $x[1] = -1$, ostatní jsou nulové. Vypočtěte hodnotu Fourierovy transformace s diskrétním časem (DTFT) $\tilde{X}(e^{j\omega})$ tohoto signálu pro ~~kruhovou~~ normovanou frekvenci $\omega = 2\pi$ rad~~/s~~ (1).

viz A

$\tilde{X}(e^{j2\pi}) = 1 \cdot \underbrace{e^{-j0\cdot 2\pi}}_{1} + (-1)\underbrace{e^{-j1\cdot 2\pi}}_{1} = 1 - 1 = \underline{\underline{0}}$

D

Příklad 11 Provádíme výpočet spektra pomocí diskrétní Fourierovy transformace (DFT). Počet vzorků je $N = 256$, vzorkovací frekvence je $F_s = 64$ kHz. Zajímá nás frekvence 30 kHz. Který koeficient $X[k]$ budeme zobrazovat ?

viz A

$k = \dfrac{256 \cdot 30}{64} = \underline{\underline{120}}$

Příklad 12 Diskrétní signál $x[n]$ má délku $N = 8$ vzorků. Hodnoty jsou následující: $x[n]$=1 -1 0 0 0 0 0 0. Známe hodnotu koeficientu jeho diskrétní Fourierovy transformace (DFT): $X[2] = 1 + j$. Určete hodnotu koeficientu DFT $Y[2]$ signálu $y[n]$, který je kruhově posunutou verzí signálu $x[n]$: $y[n]$=0 0 0 0 1 -1 0 0.

$m = 4$

1, bez změny!

$Y[2] = (1+j)\, e^{-j\frac{4\cdot 2}{8}\cdot 2\pi} = (1+j)\, e^{-j2\pi} = \underline{\underline{1+j}}$

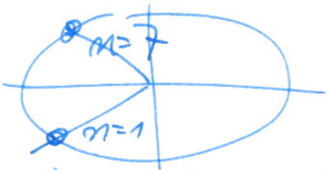
Příklad 13 Diskrétní signál $x[n]$ má délku $N = 8$ vzorků. Jeho hodnoty jsou $x[0] = 1$, $x[1] = \sqrt{2}$, $x[7] = \sqrt{2}$, ostatní jsou nulové. Spočítejte koeficient $X[3]$ diskrétní Fourierovy transformace (DFT).

$e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = e^{-j\frac{2\pi}{8}3n} = e^{-j\frac{3}{4}\pi}$

pro $n=0 \Rightarrow 1$

$n=1 \Rightarrow e^{-j\frac{3}{4}\pi} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}$

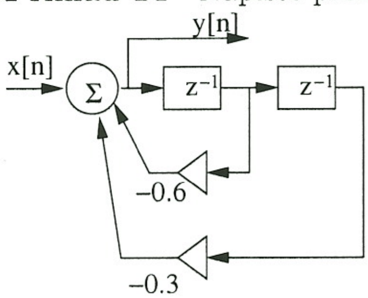
$n=7 \Rightarrow e^{-j\frac{21}{4}\pi} = \underline{e^{-j\frac{16}{4}\pi}} \cdot e^{-j\frac{5}{4}\pi} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}$



$X[3] = 1 + \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} - \cancel{j\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) + \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \cancel{j\frac{1}{\sqrt{2}}}\right) = 1-2 = \underline{\underline{-1}}$

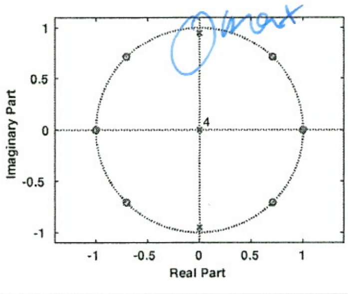
viz A

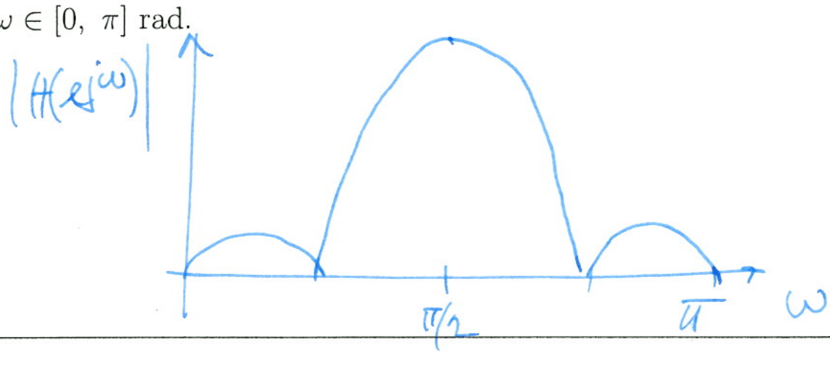
Příklad 14 Napište přenosovou funkci IIR filtru podle schématu.



$H(z) = \dfrac{1}{1 + 0{,}6z^{-1} + 0{,}3z^{-2}}$

Příklad 15 Na obrázku je rozložení nulových bodů a pólů číslicového filtru. Číslo 4 v počátku značí, že se jedná o čtyřnásobný pól. Nakreslete přibližně modulovou frekvenční charakteristiku $|H(e^{j\omega})|$ pro normované kruhové frekvence $\omega \in [0,\ \pi]$ rad.





D

Příklad 16 Máte k disposici záznam $\Omega = 10^6$ šachových partií. Popište, jak odhadnete sdruženou pravděpodobnost toho, že v té samé partii jel v 5. tahu bílý pěšcem a v 7. tahu černý věží.

viz A

Příklad 17 V tabulce jsou hodnoty vzorku $n = 7$ náhodného signálu pro $\Omega = 10$ realizací:

ω	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\xi_\omega[7]$	0.53	1.83	-2.25	0.86	0.31	-1.30	-0.43	0.34	3.57	2.76

Provedte souborový odhad distribuční funkce $F(x, 7)$ a nakreslete ji.

viz A

Příklad 18 Na $\Omega = 4000$ realizacích náhodného procesu byla naměřena tabulka (sdružený histogram) hodnot mezi časy n_1 a n_2. Spočítejte korelační koeficient $R[n_1, n_2]$. Pomůcka: Jako reprezentativní hodnoty x_1 a x_2 při numerickém výpočtu integrálu $R[n_1, n_2] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2, n_1, n_2) dx_1 dx_2$ použijte středy intervalů v tabulce.

intervaly x_1	intervaly x_2 [-20, -10]	[-10, 0]	[0, 10]	[10, 20]
[10, 20]	0	0	0	0
[0, 10]	0	1000	0	0
[-10, 0]	0	0	1000	0
[-20, -10]	0	0	0	2000

viz A

$R[n_1, n_2] =$ ....

Příklad 19 V jazyce C máte v poli `Xr` o velikosti `N/2+1` uložené hodnoty reálné složky diskrétní Fourierovy transformace pro $k = 0 \dots \frac{N}{2}$ a v poli `Xi` o stejné velikosti imaginární složky diskrétní Fourierovy transformace pro $k = 0 \dots \frac{N}{2}$. Napište kód pro odhad spektrální hustoty výkonu, výsledek nechť je v poli `PSD` o stejné velikosti.

viz A

Příklad 20 Korelační koeficienty náhodného signálu $R[k]$ jsou: $R[0] = 10$, $R[1] = 3$, $R[-1] = 3$, ostatní jsou nulové. Určete, zda se jedná o bílý šum a svou odpověď zdůvodněte.

viz A

Bílý šum: ANO / NE, zdůvodnění: ....