Semestrální zkouška ISS, 2. opravný termín, 31.1.2018, skupina α

Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: ....
(čitelně!)

$\cos\alpha = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}$

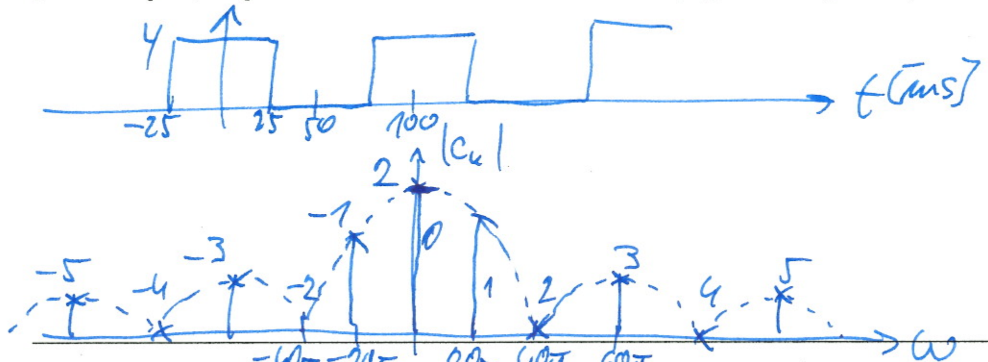
Příklad 1 Dva signály se spojitým časem jsou: $x_1(t) = \frac{3}{4}e^{-j\frac{\pi}{4}}e^{j100\pi t}$ a $x_2(t) = \frac{3}{4}e^{+j\frac{\pi}{4}}e^{-j100\pi t}$. Určete, zda je jejich součet $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ reálný signál a pokud ano, napište pro něj vztah bez funkcí $e^{j\cdot}$.

$x(t) = \frac{3}{4}e^{j(100\pi t - \frac{\pi}{4})} + \frac{3}{4}e^{-j(100\pi t - \frac{\pi}{4})} = 2 \cdot \frac{3}{4}\cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{4}\right)$

Reálný ANO / NE. $x(t) =$ $1{,}5\cos\left(100\pi t - \frac{\pi}{4}\right)$

$c_k = \frac{D\vartheta}{T_1}\,\text{sinc}\left(\frac{\vartheta}{2}k\omega_1\right)$

Příklad 2 Je dán periodický signál se spojitým časem:
$$x(t) = \begin{cases} 4 & \text{pro } -25 \text{ ms} \le t \le 25 \text{ ms} \\ 0 & \text{pro } -50 \text{ ms} < t < -25 \text{ ms} \\ 0 & \text{pro } 25 \text{ ms} < t < 50 \text{ ms} \end{cases}$$
s periodou T_1 =100 ms. Nakreslete moduly koeficientů jeho Fourierovy řady $|c_k|$ v závislosti na frekvenci, pro $k \in [-5, \; 5]$. Hodnotu modulu koeficientu $|c_0|$ určete přesně, ostatní mohou být přibližně.



$D = 4 \quad \vartheta = 50 \text{ ms}$

$T_1 = 100 \text{ ms}$

$\frac{D\vartheta}{T_1} = \frac{4 \cdot 50}{100} = 2$

$\frac{2\pi}{\vartheta} = \frac{2\pi}{50 \cdot 10^{-3}} = 40\pi$

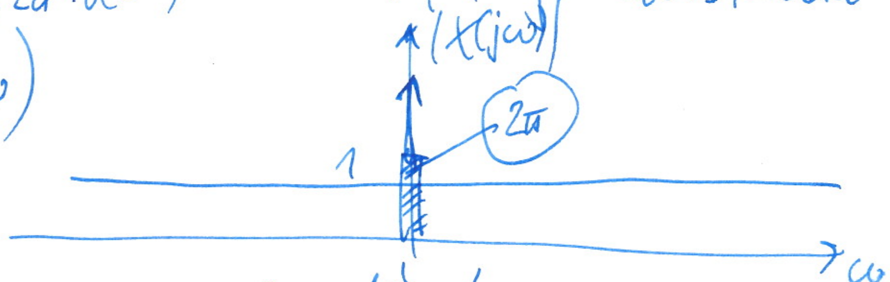
$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = \frac{2\pi}{100 \cdot 10^{-3}} = 20\pi$

Příklad 3 Vypočtěte a nakreslete spektrální funkci (stačí pouze modul) signálu, který je směsí stejnosměrného signálu a Diracova impulsu: $x(t) = 1 + \delta(t)$. Pomůcka 1: Fourierova transformace je lineární. Pomůcka 2: Fourierova transformace stejnosměrného signálu o velikosti A je $2\pi A\delta(\omega)$.

FT je $1 \cdot 2\pi \cdot \delta(\omega)$

FT je konstanta 1.

$X(j\omega) = 1 + 2\pi\delta(\omega)$



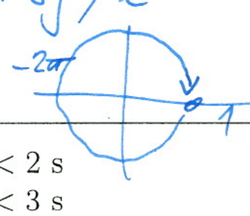
Příklad 4 Hodnota spektrální funkce signálu se spojitým časem $x(t)$ na frekvenci $\omega_1 = 10\pi$ rad/s je $X(j10\pi) = 5 + 5j$. Určete hodnotu spektrální funkce signálu $y(t) = x(t - 0{,}2)$ na téže frekvenci.

zpoždění

$Y(j\omega_1) = X(j\omega_1) \cdot e^{-j\tau\omega_1} = (5+5j) \cdot e^{-j0{,}2 \cdot 10\pi} = (5+5j)\,e^{-j2\pi} =$

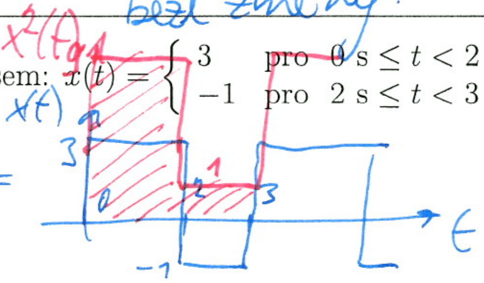
$(5+5j) \cdot 1$

bez změny.



$Y(j10\pi) =$ $5+5j$

Příklad 5 Je dán periodický signál se spojitým časem: $x(t) = \begin{cases} 3 & \text{pro } 0 \text{ s} \le t < 2 \text{ s} \\ -1 & \text{pro } 2 \text{ s} \le t < 3 \text{ s} \end{cases}$
s periodou T_1 =3 s. Vypočtěte jeho střední výkon.

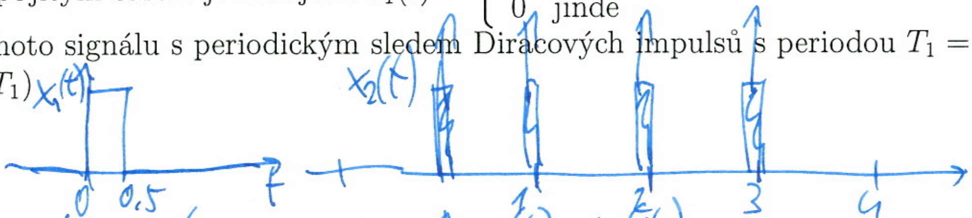


$P_s = \frac{1}{T_1}\int_{T_1} x^2(t)\,dt = \frac{1}{3}(9 \cdot 2 + 1 \cdot 1) = \frac{19}{3} = 6{,}33$

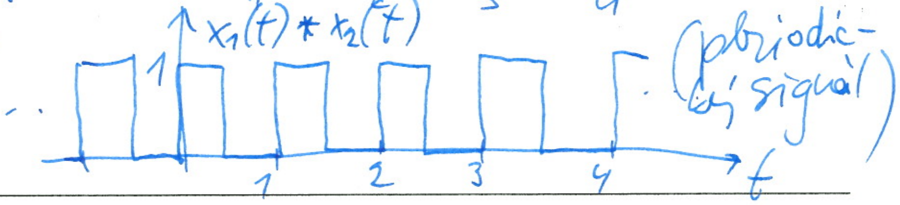
$P_s =$ $6{,}333$

Příklad 6 Signál se spojitým časem je dán jako $x_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } 0\,\text{s} \le t < 0.5\,\text{s} \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

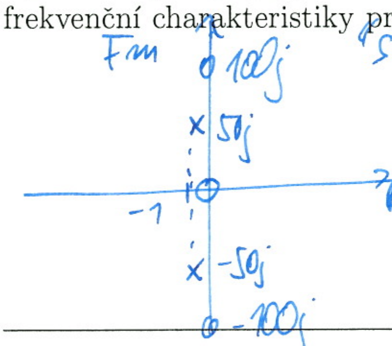
Nakreslete konvoluci tohoto signálu s periodickým sledem Diracových impulsů s periodou $T_1 = 1$ s: $x_2(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_1)$



Konvoluce s Dir. impulsem funguje jako kopírka, výsledky se sečtou...

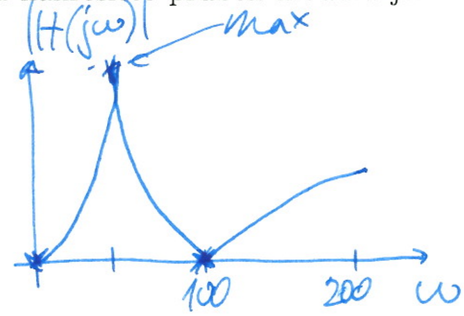


Příklad 7 Přenosová funkce systému se spojitým časem má nulové body: $n_1 = 0$, $n_2 = 100j$, $n_3 = -100j$ a póly $p_1 = -1 + 50j$, $p_2 = -1 - 50j$. Přibližně určete a nakreslete průběh modulu jeho frekvenční charakteristiky pro kruhové frekvence $\omega \in [0,\ 200]$ rad/s.



nula na Im. ose ⇒ nula ve frekv. char.

pól blízko Im. osy ⇒ maximum frekv. char.



Příklad 8 Určete, zda je systém, který pro vstupní signál $x(t)$ produkuje výstupní signál $y(t) = x^2(t)$, lineární. Své tvrzení dokažte pomocí definice linearity: pokud $x_1(t) \rightarrow y_1(t)$ a $x_2(t) \rightarrow y_2(t)$, pak $ax_1(t) + bx_2(t) \rightarrow ay_1(t) + by_2(t)$.

je nelineární.

Důkaz např. pro $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = 4$, $a = b = 1$:

$y_1(t) = 1$ $y_2(t) = 16$

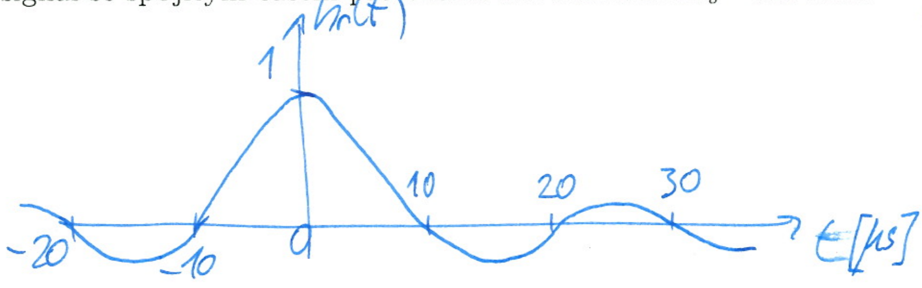
$y(t) = (1 \cdot 1 + 1 \cdot 4)^2 = \underline{\underline{25}}$ což není $1 \cdot 1 + 1 \cdot 16 = \underline{\underline{17}}$

Příklad 9 Napište v jakémkoliv programovacím jazyce (včetně Matlabu) kód pro generování pole (vektoru) vzorků, které při přehrání na vzorkovací frekvenci F_s =8000 Hz vyprodukuje 1 sekundu tónu na frekvenci 440 Hz (komorní 'a').

```
n = 0 : 7999;
omega = 440/8000 * 2*pi;
x = cos(n * omega);
```

```
float x[8000];
int n;
for (n=0; n<8000; n++){
  x[n] = cos(2*PI*440/8000*n);
}
```

Příklad 10 Nakreslete impulsní odezvu ideálního rekonstrukčního filtru pro převod vzorkovaného signálu na signál se spojitým časem pro vzorkovací frekvenci F_s =100 kHz.

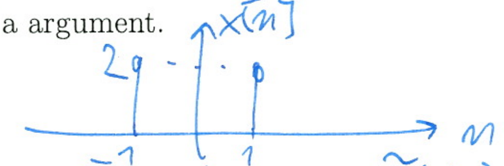


Kardinální sinus „prosekávající" nuly pro násobky vzork. periody

$T_s = \frac{1}{F_s} = 10\,\mu s$

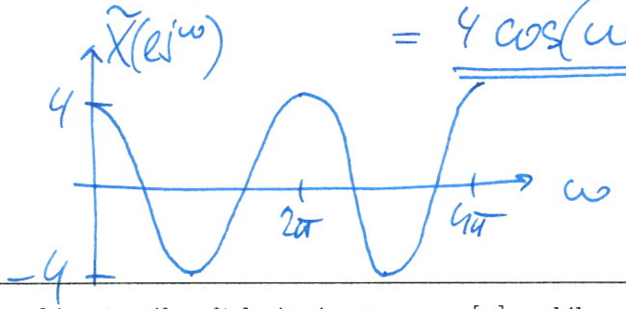
2·08

Příklad 11 Diskrétní signál $x[n]$ má pouze dvě nenulové hodnoty: $x[-1] = 2, \quad x[1] = 2$. Vypočtěte jeho Fourierovu transformaci s diskrétním časem (DTFT) a nakreslete ji v intervalu normovaných kruhových frekvencí $0 \dots 4\pi$ rad. Vzhledem k tomu, že je signál sudý, vyjde DTFT reálná, nemusíte ji proto dělit na modul a argument.



$$\tilde{X}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n} = 2e^{j\omega} + 2e^{-j\omega} = 4\cos(\omega).$$

$$\cos\alpha = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2}$$



Příklad 12 V tabulce je zadán signál s diskrétním časem $x[n]$ o délce $N = 5$. Napište hodnoty signálu $y[n] = R_5[n]x[\mathrm{mod}_5(n-2)]$ — kruhové zpoždění o 2 vzorky.

n	0	1	2	3	4
$x[n]$	4	0	1	0	1
$y[n]$	0	1	4	0	1

Příklad 13 V tabulce je zadána impulsní odezva číslicového filtru $h[n]$ a vstupní signál $x[n]$. Napište hodnoty vzorků na výstupu filtru. konvoluce $h[n]$ a $x[n]$

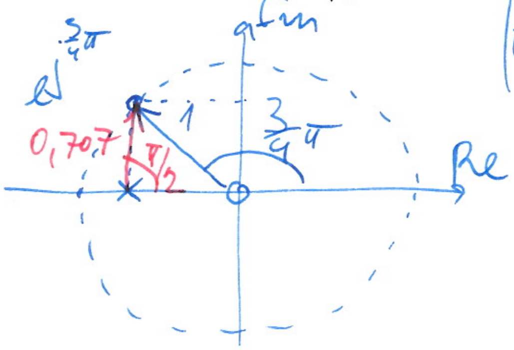
n	0	1	2	3	4	5	6	7
$h[n]$	4	-2	2	0	0	0	0	0
$x[n]$	4	0	1	0	1	0	0	0
$y[n]$	16	-8	12	-2	6	-2	2	0 ...

Příklad 14 Napište přenosovou funkci filtru s impulsní odezvou $h[n]$ z předcházejícího příkladu.

$H(z) =$ $4 - 2z^{-1} + 2z^{-2}$

$$= \frac{z - 0}{z - (-0{,}707)}$$

Příklad 15 Přenosová funkce číslicového filtru je $H(z) = \frac{1}{1+0.707z^{-1}}$. Určete modul a argument frekvenční charakteristiky tohoto filtru $H(e^{j\omega})$ na normované kruhové frekvenci $\omega = \frac{3\pi}{4}$ rad.
Pomůcka: $\sqrt{2} = 1.414$, $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0.707$



$$|H(e^{j\frac{3}{4}\pi})| = \frac{1}{0{,}707} = 1{,}414$$

$$\arg H(e^{j\frac{3}{4}\pi}) = \frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

2·OP

Příklad 16 Reálný signál s diskrétním časem je periodický s periodou $N = 50$ vzorků. Popište vztah mezi koeficienty $\tilde{X}[1]$ a $\tilde{X}[48]$ Diskrétní Fourierovy řady (DFŘ) tohoto signálu. Pokud žádný není, napište jasně "není".

$\tilde{X}[k] = \tilde{X}^*[N-k]$ $\quad$ $\tilde{X}[1] = X^*[49]$

žádný vztah není

Příklad 17 Signál s diskrétním časem má délku $N = 16$ vzorků a je pro $n = 0 \ldots 15$ dán jako: $x[n] = 3\cos(2\pi\frac{2}{16}n + \frac{\pi}{4})$. Určete indexy a hodnoty nenulových koeficientů jeho Diskrétní Fourierovy transformace (DFT).

$\frac{3}{2}e^{j\frac{\pi}{4}} e^{j(2\pi\frac{2}{16}n)} + \frac{3}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}} e^{-j(2\pi\frac{2}{16}n)}$

IDFT: $x[n] = \frac{1}{N}\sum X[k] e^{+j\frac{2\pi}{N}nk}$

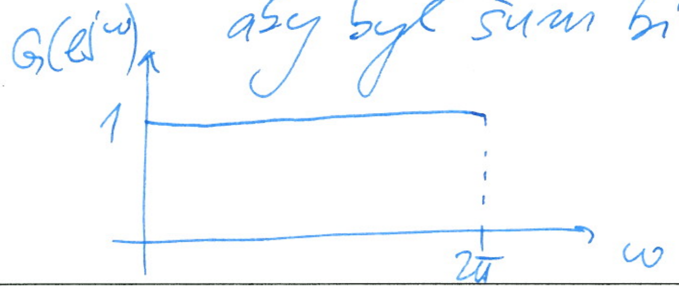
$\frac{1}{N}X[2]$ $\quad$ $\frac{1}{N}X[-2]$

-2 nejde, takže $\frac{1}{N}X[14]$

$X[2] = 24e^{j\frac{\pi}{4}}$ $\quad$ $X[14] = 24e^{-j\frac{\pi}{4}}$

Příklad 18 Nakreslete spektrální hustotu výkonu $G(e^{j\omega})$ Gaussovského bílého šumu s diskrétním časem jako funkci normované kruhové frekvence ω od 0 do 2π rad. Pomůcka: autokorelační koeficient $R[0]$ takového signálu je nenulový, koeficienty $R[k]$ pro $k \neq 0$ jsou nulové.

aby byl šum bílý, musí být konstantní.



Příklad 19 Pixely obrázku o rozměrech 100×100 jsou všechny černé (hodnota 0), pouze 152 z nich je bílých (hodnota 1). Vypočtěte koeficient $X[0,0]$ 2D diskrétní Fourierovy transformace (2D-DFT) tohoto obrázku.

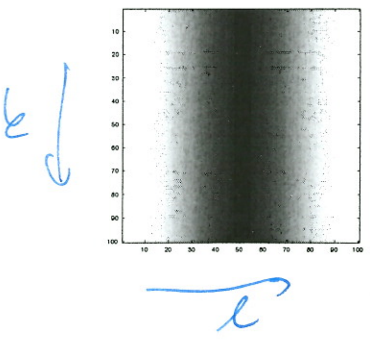
$X[m,n] = \sum_k \sum_l x[k,l] \underbrace{e^{-j\left(\frac{2\pi km}{M} + \frac{2\pi nl}{N}\right)}}_{1} = \sum_k \sum_l x[k,l]$

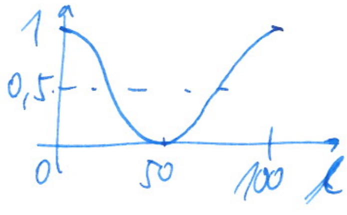
obyčejná suma hodnot všech pixelů.

$X[0,0] =$ 152

Příklad 20 Na následujícím obrázku o rozměrech 100×100 označuje černá barva hodnotu 0, bílá je 1. Napište vztah pro jeho pixely $x[k,l]$.

něco se děje jen ve vodorovném rozměru: 1 perioda cosinusovky





$x[k,l] = 0,5 + 0,5\cos\left(\frac{2\pi}{100}l\right)$

2.0b