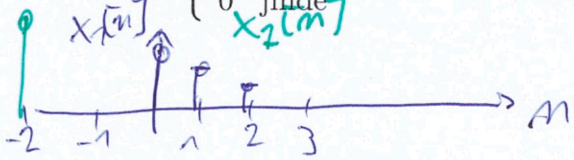
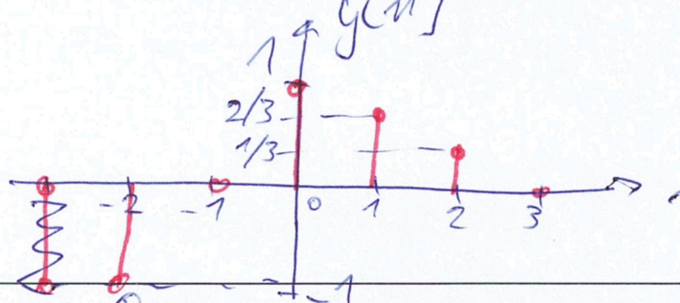
Semestrální zkouška ISS, 2. opravný termín, 29.1.2021, skupina poledne

Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: ....REF..........
(čitelně!)

Příklad 1 Signály $x_1[n]$ a $x_2[n]$ s **diskrétním časem** jsou dány: $x_1[n] = \begin{cases} 1 - \frac{n}{3} & \text{pro } 0 \leq n \leq 2 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

a $x_2[n] = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = -2 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$ Nakreslete signál, který vznikne jejich rozdílem: $y[n] = x_1[n] - x_2[n]$.





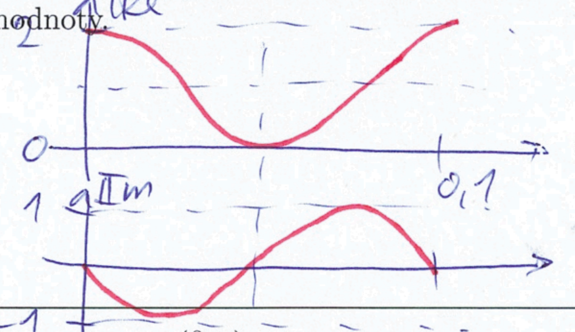
Příklad 2 Signál se spojitým časem je: $x(t) = 1 + e^{-j20\pi t}$. Nakreslete průběh jeho reálné i imaginární složky: $\mathcal{R}[x(t)]$ a $\mathcal{I}[x(t)]$. Na osách jasně vyznačte důležité hodnoty.

$x(t) = 1 + \cos(20\pi t) - j\sin(20\pi t)$

sudá, lichá

Re, Im

$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{20\pi} = 0{,}1\,s$



Příklad 3 Určete základní periodu N_1 diskrétního signálu $x[n] = 5\cos\left(\frac{8\pi n}{31}\right)$.
Pomůcka: pro periodický signál musí platit $x[n] = x[n + N_1]$.

$\cos(\omega_1 n) = \cos(\omega_1(n + N_1))$ $\quad \cancel{\omega_1 n} + \omega_1 N - \cancel{\omega_1 n} = k2\pi$

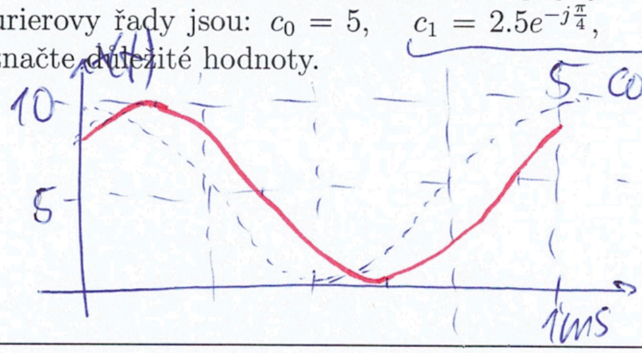
$\omega_1 N_1 = k2\pi$

$N_1 = k\frac{2\pi}{\omega_1}$

$N_1 = k\frac{2\pi}{\frac{8\pi}{31}} = k\frac{31}{4}$ $\quad k = 4, \quad N_1 = 31$

Příklad 4 $x(t)$ je periodický signál se spojitým časem s periodou $T_1 = 1$ ms. Nenulové koeficienty jeho Fourierovy řady jsou: $c_0 = 5$, $\underbrace{c_1 = 2.5e^{-j\frac{\pi}{4}}, \quad c_{-1} = 2.5e^{+j\frac{\pi}{4}}}_{5\cos(\omega_1 t - \frac{\pi}{4})}$. Nakreslete signál $x(t)$. Na osách jasně vyznačte důležité hodnoty.

(zpoždění o 1/8 periody)



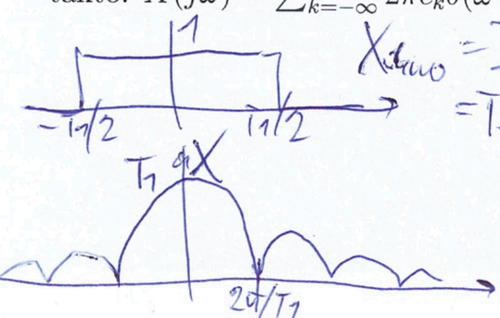
Příklad 5 Signál se spojitým časem je dán: $x(t) = \begin{cases} e^{j\frac{2\pi}{T_1}t} & \text{pro } -\frac{T_1}{2} \leq t \leq +\frac{T_1}{2} \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

součin komplex. exp. a obdélníku

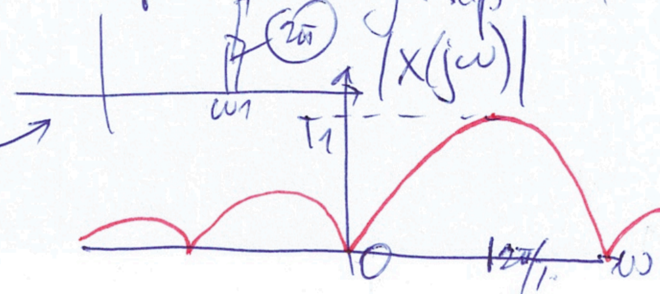
Vypočtěte a nakreslete průběh modulu jeho spektrální funkce $|X(j\omega)|$. Pomůcka 1: pro $y(t) = x_1(t)x_2(t)$ je $Y(j\omega) = X_1(j\omega) \star X_2(j\omega)$. Pomůcka 2: koeficienty Fourierovy řady se dají na spektrální funkci zkonvertovat takto: $X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi c_k \delta(\omega - k\omega_1)$, kde $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$.

$c_{1exp} = 1$ tedy $X_{exp} = 2\pi\delta(\omega - \omega_1)$

$X_{obd} = D\vartheta \,\mathrm{sinc}\left(\frac{\vartheta}{2}\omega\right) = T_1 \,\mathrm{sinc}\left(\frac{T_1}{2}\omega\right)$



konvoluce (+ dělení 2π ...)



Příklad 6 Spektrální funkce signálu $y(t)$ je $Y(j\omega) = X(j\omega)e^{-j4\omega}$. Napište vztah pro výpočet signálu $y(t)$ ze signálu $x(t)$ v časové oblasti.

$y(t) = x(t-\tau) \Rightarrow Y(j\omega) = X(j\omega)e^{-j\omega\tau}$

$y(t) =$ $x(t-4)$

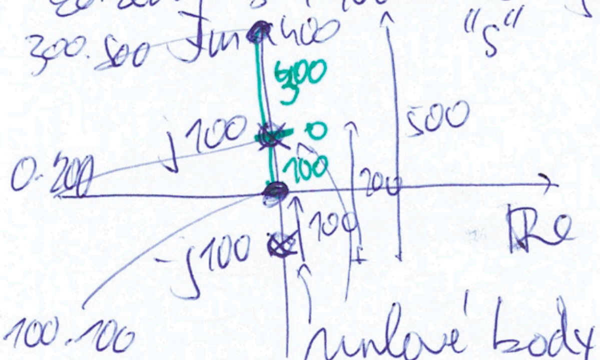
Příklad 7 Chování systému se spojitým časem je dáno rovnicí $y(t) = |x(t)|$.
Dokažte že systém není lineární tak, že ukážete, že neplatí poučka o linearitě:
$x_1(t) \to y_1(t), \quad x_2(t) \to y_2(t) \quad \Rightarrow \quad ax_1(t) + bx_2(t) \to ay_1(t) + by_2(t)$.

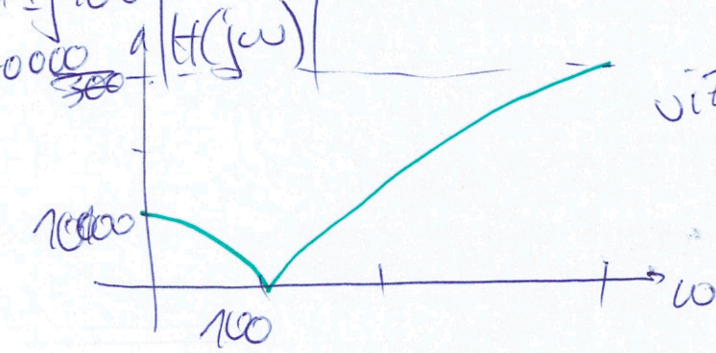
Např. $x_1(t) = 1$, $x_2(t) = -1$ pro $a, b = 1$:
$y_1(t) = 1$ $y_2(t) = 1$ $ax_1(t) + bx_1(t) = 0$,
pak $y(t) = 0$,
ale $ay_1(t) + by_2(t) = 2$
$0 \neq 2$

Není lineární

Příklad 8 Systém se spojitým časem má přenosovou funkci $H(s) = s^2 + 10000$. Nakreslete přibližně průběh modulu jeho frekvenční charakteristiky $|H(j\omega)|$ pro kruhové frekvence $\omega = 0 \ldots 400$ rad/s

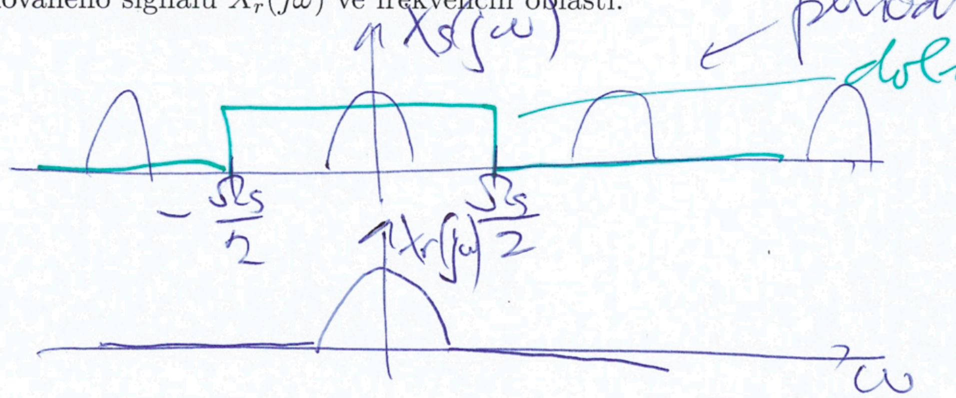
kořeny $s^2 + 10000 = 0$ $(s = \pm j100)$





viz také png.

Příklad 9 Popište a nakreslete, jak ze spektra navzorkovaného signálu $X_s(j\omega)$ získat spektrum rekonstruovaného signálu $X_r(j\omega)$ ve frekvenční oblasti.



periodizované spektrum

dolní propust

násobení

↓

výsledek.

Příklad 10 Vypočtěte a do tabulky napište kruhovou konvoluci dvou signálů s diskrétním časem o délce $N = 4$:

n	0	1	2	3
$x_1[n]$	4	0	1	0
$x_2[n]$	1	-1	0	3
$x_1[n] \circledast x_2[n]$	4	-1	1	11

Polední

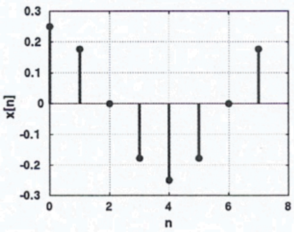
Příklad 11 Diskrétní Fourierova řada (DFŘ) $\tilde{X}[k]$ diskrétního signálu s periodou $N = 8$ má v intervalu $k = 0 \dots N-1$ pouze jeden nenulový koeficient: $\tilde{X}[1] = 16e^{j0.1}$. Napište vztah pro signál $x[n]$. Pomůcka: signál nemusí být reálný.

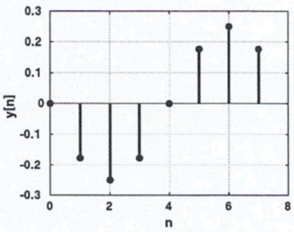
IDFŘ: $x[n] = \frac{1}{N}\sum \tilde{X}[k] e^{+j\frac{2\pi}{N}kn}$ – pouze 1 člen pro $k = 1$

$\frac{1}{8} 16 e^{j0,1} e^{j\frac{2\pi}{8}1n}$ komplex. exponenciála

$x[n] =$ $2e^{j(\frac{2\pi}{8}n + 0,1)}$

Příklad 12 Signál $x[n]$ s diskrétním časem o délce $N = 8$ na obrázku byl kruhově posunut - viz druhý obrázek. První koeficient diskrétní Fourierovy transformace (DFT) signálu $x[n]$ má hodnotu $X[1] = 1$. Určete (ve složkovém tvaru) první koeficient DFT posunutého signálu.





kruhové předběhnutí o $m = 2$ vzorky

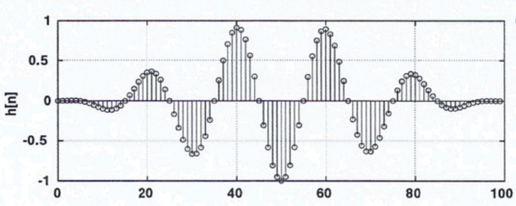
$Y[k] = X[k] \cdot e^{+j\frac{2\pi}{N}km}$

$Y[1] =$ $1 \cdot e^{j\frac{2\pi}{8} \cdot 1 \cdot 2} = 1e^{j\frac{\pi}{2}} = j$

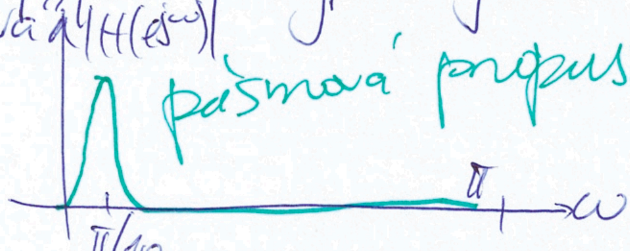
Příklad 13 Máme k disposici signál $x[n]$ o délce $N = 256$ vzorků, vzorkovací frekvence je $F_s = 16$ kHz. Popište (slovně, kódem, pseudo-kódem, obrázkem nebo jejich kombinací), jak vypočítat a zobrazit spektrum signálu s osou v Hertzích od 0 do $\frac{F_s}{2}$. V tomto intervalu požadujeme 1024 bodů. Pozornost laskavě věnujte i výpočtu správných hodnot pro frekvenční osu.

1. doplnit x[n] nulami na 2048 bodů (zero padding)
2. FFT (x) → 2048 bodů ve spektru
3. omezit na 1024 bodů (0 – 1023)
4. vyrobit frekv. osu, např. f = range(1024)/2048 * 16000
5. zobrazit modul (abs) a argument (angle)

Příklad 14 Impulsní odezva číslicového filtru má $N = 100$ vzorků a je dána: $h[n] = w[n]\cos(\frac{2\pi}{20}n)$. kde $w[n]$ je okno tlumící odezvu na okrajích, viz obrázek.
Nakreslete přibližně modul frekvenční charakteristiky filtru $|H(e^{j\omega})|$ pro interval normovaných kruhových frekvencí $\omega = 0 \dots \pi$ rad. Pokud má frekvenční charakteristika extrém, označte, na jaké frekvenci.



„výstup filtru" vypadá jako imp. odezva



viz PNG

Příklad 15 Přenosová funkce číslicového filtru je $H(z) = \frac{1+0.5z^{-1}-0.2z^{-2}}{1-0.3z^{-1}-0.1z^{-2}}$ Napište kód v jazyce C pro implementaci tohoto filtru: funkce, jejímž vstupem je vzorek $x[n]$ a výstupem vzorek $y[n]$. Pomůcka: nezapomeňte na static, je-li třeba.

naopak znaménka!

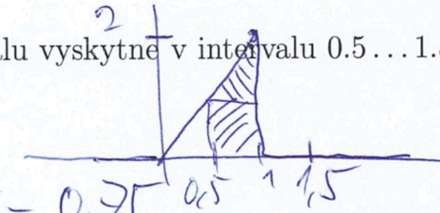
```
float filter(float xn) {
static float x1, x2, y1, y2;
yn = xn + 0.5*x1 - 0.2*x2 + 0.3*y1 + 0.1*y2;
y2 = y1; y1 = yn; x2 = x1; x1 = xn;

  return yn;
}
```

Poledne

Příklad 16 Funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti stacionárního náhodného signálu $\xi[n]$ je

$$p(x) = \begin{cases} 2x & \text{pro } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

Určete pravděpodobnost, že se hodnota náhodného signálu vyskytne v intervalu $0.5 \ldots 1.5$



$$\int_{0,5}^{1,5} p(x)dx = 0,5 + 0,25 = 0,75$$

$\mathcal{P}(0.5 \le \xi[n] \le 1.5) =$....................

Příklad 17 Na vstup kvantizéru přichází signál $x[n]$, který může nabývat pouze dvou hodnot: +10 nebo -10. Pravděpodobnost obou hodnot je stejná. Kvantizér ale nefunguje a dává na výstupu pořád hodnotu $x_q[n] = 10$. Určete poměr signálu k šumu (chybě) způsobenému kvantováním v deciBellech. Pomůcka 1: můžete si situaci simulovat třeba pro N = 100 vzorků. Pomůcka 2: $\log_{10} 0.5 = -0.3$.

pro N=100 energie užit. signálu $E_s = 100 \cdot (10)^2 = 10\,000$

energie chyb. signálu $E_e = 50 \cdot 0^2 + 50 \cdot 20^2 = 50 \cdot 400 = 20000$

pro +10 dobře

pro -10: $10-(-10)=20$

Pokud je celkově dost stejně dlouhý signál, je jedno, jestli počítáme s energií nebo výkonem...

$$SNR = 10 \log_{10} \frac{E_s}{E_e} = 10 \log_{10} \frac{1000}{2000} = 10(-0,3) = -3\,dB$$

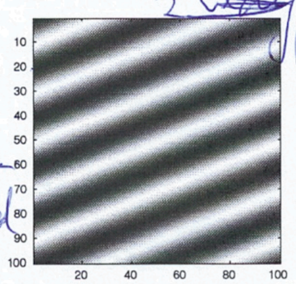
Příklad 18 Spektrální hustota výkonu stacionárního náhodného signálu s diskrétním časem je konstantní: $G(e^{j\omega}) = 5$. Určete zadaný korelační koeficient signálu.

→ bílý šum, pouze R[0] je nenulový

$R[5] =$.....0.....

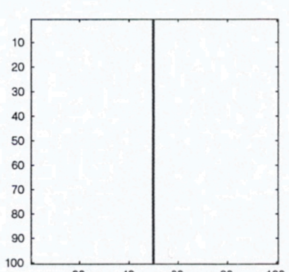
Příklad 19 2D signál má rozměry 100×100 pixelů a je na obrázku (černá je 1, bílá je 0). Určete, které koeficienty jeho 2D-DFT $X[m,n]$ budou nenulové pro interval $m = 0 \ldots 10$ a $n = 0 \ldots 10$. Pokud bude $X[0,0]$ nenulový, určete jeho hodnotu přesně.

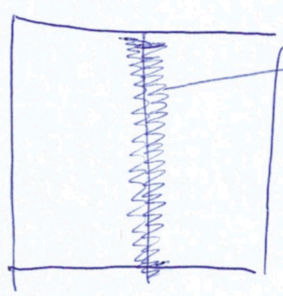
Pokud není obrázek nulový, musí být $X[0,0]$ (ss. složka) nenulový



$X[5,2]$ a $X[0,0] = 100 \cdot 100 \cdot 0,5 = 5000$

Příklad 20 2D signál má rozměry 100×100 pixelů a je na obrázku (černá je 1, bílá je 0). Nakreslete, jak bude vypadat po filtraci maskou o rozměrech 9×9 se všemi hodnotami $\frac{1}{81}$.





rozmazaná čára

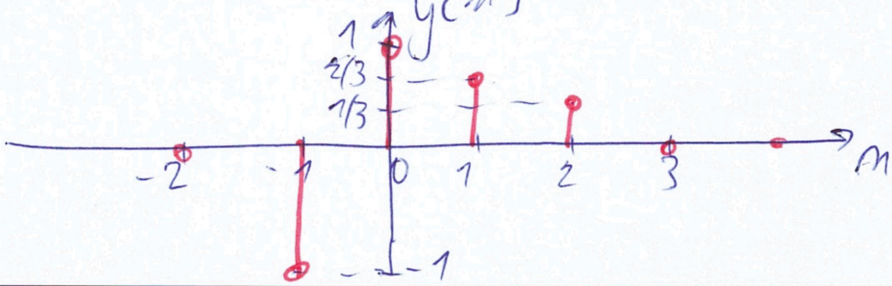
Semestrální zkouška ISS, 2. opravný termín, 29.1.2021, skupina odpoledne

REF

Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: ....
(čitelně!)

Příklad 1 Signály $x_1[n]$ a $x_2[n]$ s **diskrétním časem** jsou dány: $x_1[n] = \begin{cases} 1 - \frac{n}{3} & \text{pro } 0 \leq n \leq 2 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

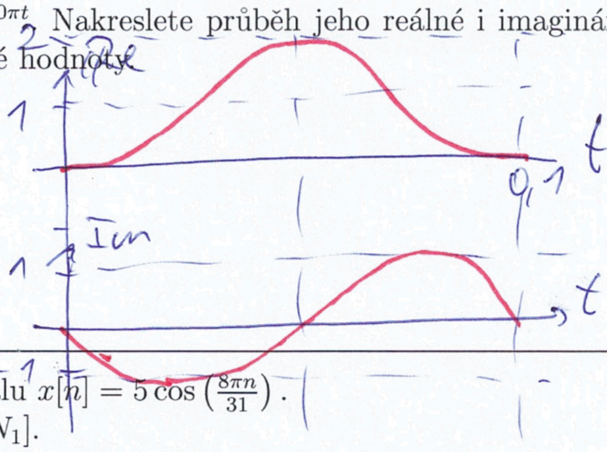
a $x_2[n] = \begin{cases} 1 & \text{pro } n = -1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$ Nakreslete signál, který vznikne jejich rozdílem: $y[n] = x_1[n] - x_2[n]$.



Příklad 2 Signál se spojitým časem je: $x(t) = 1 - e^{j20\pi t}$. Nakreslete průběh jeho reálné i imaginární složky: $\mathcal{R}[x(t)]$ a $\mathcal{I}[x(t)]$. Na osách jasně vyznačte důležité hodnoty.

$x(t) = \underbrace{1 - \cos(20\pi t)}_{\mathrm{Re}} \underbrace{- j \sin 20\pi t}_{\mathrm{Im}}$

$T_1 = \frac{2\pi}{20\pi} = 0{,}1\,s$



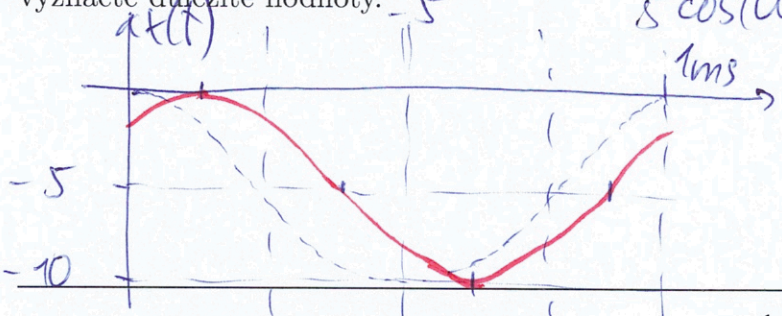
Příklad 3 Určete základní periodu N_1 diskrétního signálu $x[n] = 5\cos\left(\frac{8\pi n}{31}\right)$.
Pomůcka: pro periodický signál musí platit $x[n] = x[n + N_1]$.

viz A

$N_1 =$ ....31....

Příklad 4 $x(t)$ je periodický signál se spojitým časem s periodou $T_1 = 1$ ms. Nenulové koeficienty jeho Fourierovy řady jsou: $c_0 = 5e^{j\pi}$, $\underbrace{c_1 = 2.5e^{-j\frac{\pi}{4}}, \quad c_{-1} = 2.5e^{+j\frac{\pi}{4}}}_{5\cos(\omega_1 t - \frac{\pi}{4})}$. Nakreslete signál $x(t)$. Na osách jasně vyznačte důležité hodnoty.

-5



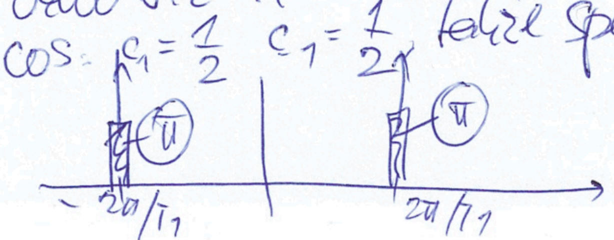
(zpoždění o $\frac{1}{8}$ periody

Příklad 5 Signál se spojitým časem je dán: $x(t) = \begin{cases} \cos(\frac{2\pi}{T_1}t) & \text{pro } -\frac{T_1}{2} \leq t \leq +\frac{T_1}{2} \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

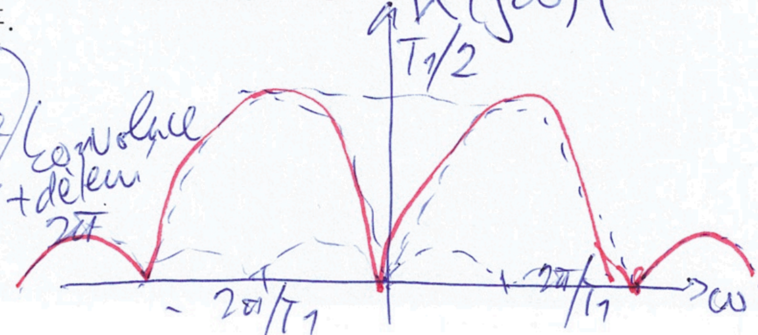
Vypočtěte a nakreslete průběh modulu jeho spektrální funkce $|X(j\omega)|$. Pomůcka 1: pro $y(t) = x_1(t)x_2(t)$ je $Y(j\omega) = X_1(j\omega) \star X_2(j\omega)$. Pomůcka 2: koeficienty Fourierovy řady se dají na spektrální funkci zkonvertovat takto: $X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} 2\pi c_k \delta(\omega - k\omega_1)$, kde $\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1}$.

odpověď viz A

cos: $c_{-1} = \frac{1}{2}$ $c_1 = \frac{1}{2}$ takže spek. fce



konvoluce + dělení 2π



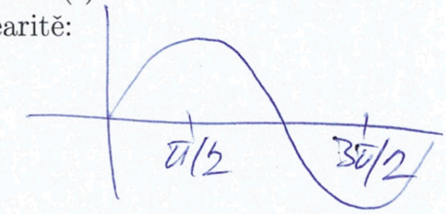
odpo

Příklad 6 Spektrální funkce signálu $y(t)$ je $Y(j\omega) = X(j\omega)e^{+j2\omega}$. Napište vztah pro výpočet signálu $y(t)$ ze signálu $x(t)$ v časové oblasti.

viz A

$y(t) = x(t+2)$

Příklad 7 Chování systému se spojitým časem je dáno rovnicí $y(t) = \sin x(t)$.
Dokažte že systém není lineární tak, že ukážete, že neplatí poučka o linearitě:
$x_1(t) \rightarrow y_1(t), \quad x_2(t) \rightarrow y_2(t) \quad \Rightarrow \quad ax_1(t) + bx_2(t) \rightarrow ay_1(t) + by_2(t)$.



Např: $x_1(t) = \pi/2$ $\quad x_2(t) = \frac{3\pi}{2}$

$y_1(t) = 1$ $\quad y_2(t) = -1$

pro $a = -1$, $b = 1$:

$ax_1(t) + bx_2(t) = \pi$ $\quad y(t) = \sin(\pi) = 0$

$ay_1(t) + by_2(t) = -1 - 1 = -2$

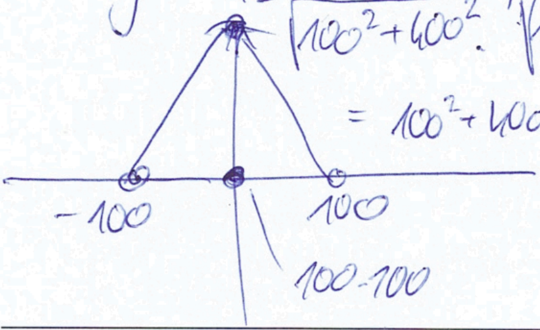
$0 \neq -2$

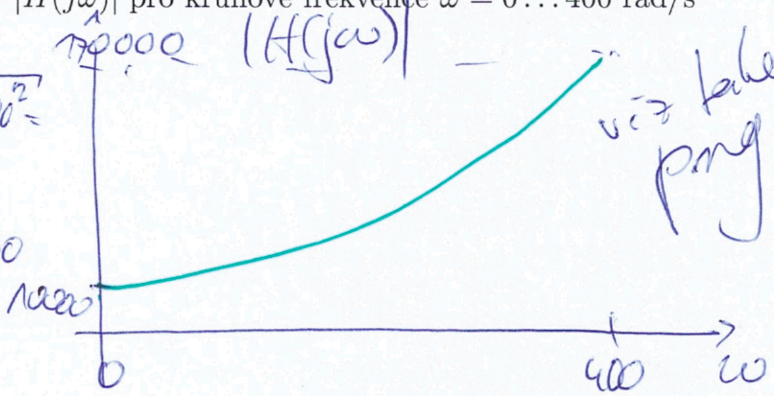
Není lineární

Příklad 8 Systém se spojitým časem má přenosovou funkci $H(s) = s^2 - 10000$. Nakreslete přibližně průběh modulu jeho frekvenční charakteristiky $|H(j\omega)|$ pro kruhové frekvence $\omega = 0 \dots 400$ rad/s

Kořeny: $s_{1/2} = \pm 100$

$\sqrt{100^2+400^2} \cdot \sqrt{100^2+400^2} = 100^2 + 400^2 = 170000$





viz také png.

Příklad 9 Popište a nakreslete, jak ze spektra navzorkovaného signálu $X_s(j\omega)$ získat spektrum rekonstruovaného signálu $X_r(j\omega)$ ve frekvenční oblasti.

viz A

Příklad 10 Vypočtěte a do tabulky napište kruhovou konvoluci dvou signálů s diskrétním časem o délce $N = 4$:

n	0	1	2	3
$x_1[n]$	4	0	1	0
$x_2[n]$	-1	-1	0	3
$x_1[n] \circledN x_2[n]$	-4	-1	-1	11

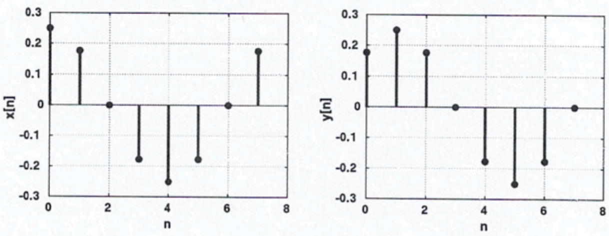
odpo

Příklad 11 Diskrétní Fourierova řada (DFŘ) $\tilde{X}[k]$ diskrétního signálu s periodou $N = 8$ má v intervalu $k = 0 \dots N-1$ pouze jeden nenulový koeficient: $\tilde{X}[1] = e^{-j0.1}$. Napište vztah pro signál $x[n]$. Pomůcka: signál nemusí být reálný.

viz A

$x[n] = \frac{1}{8} e^{j\left(\frac{2\pi}{8}n - 0,1\right)}$ komplex. exp.

Příklad 12 Signál $x[n]$ s diskrétním časem o délce $N = 8$ na obrázku byl kruhově posunut - viz druhý obrázek. První koeficient diskrétní Fourierovy transformace (DFT) signálu $x[n]$ má hodnotu $X[1] = 1$. Určete (ve složkovém tvaru) první koeficient DFT posunutého signálu.



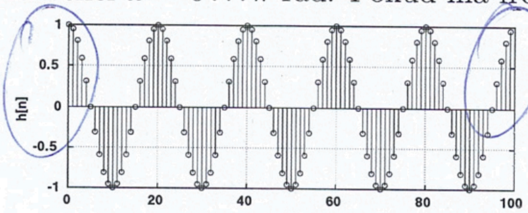
kruhové zpoždění o $m = 1$ vzorek
viz A, ale s mínus ...

$Y[1] = 1 e^{-j\frac{2\pi}{8}1 \cdot 1} = 1 e^{-j\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}}$

Příklad 13 Máme k disposici signál $x[n]$ o délce $N = 256$ vzorků, vzorkovací frekvence je $F_s = 16$ kHz. Popište (slovně, kódem, pseudo-kódem, obrázkem nebo jejich kombinací), jak vypočítat a zobrazit spektrum signálu s osou v Hertzích od $-\frac{F_s}{2}$ do $\frac{F_s}{2}$. V tomto intervalu požadujeme 1024 bodů. Pozornost laskavě věnujte i výpočtu správných hodnot pro frekvenční osu.

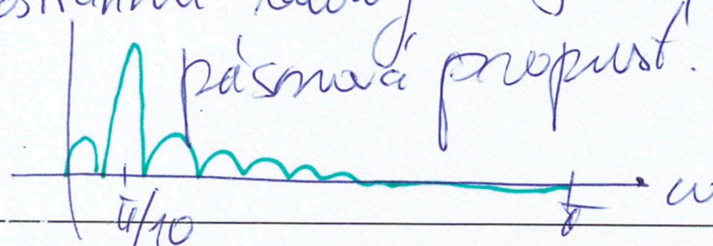
1. doplnit nulami na 1024 bodů (zero padding)
2. FFT → 1024 bodů ve spektru
3. přesunout pravou polovinu doleva (např. fftshift)
4. vyrobit frekv. osu, např. f = range(-512, 511) / 1024 * 16 000
5. zobrazit modul (abs) a argument (angle)

Příklad 14 Impulsní odezva číslicového filtru má $N = 100$ vzorků a je dána: $h[n] = \cos(\frac{2\pi}{20}n)$, viz obrázek.
Nakreslete přibližně modul frekvenční charakteristiky filtru $|H(e^{j\omega})|$ pro interval normovaných kruhových frekvencí $\omega = 0 \dots \pi$ rad. Pokud má frekvenční charakteristika extrém, označte, na jaké frekvenci.



jako A, ale ostré hrany přidají postranní laloky ...

pásmová propust



Příklad 15 Frekvenční charakteristika číslicového filtru je $H(e^{j\omega}) = \frac{1+0.5e^{-j\omega}-0.2e^{-j2\omega}}{1-0.3e^{-j\omega}-0.1e^{-j2\omega}}$ Napište kód v jazyce C pro implementaci tohoto filtru: funkce, jejímž vstupem je vzorek $x[n]$ a výstupem vzorek $y[n]$. Pomůcka: nezapomeňte na `static`, je-li třeba.

záměnou $z = e^{j\omega}$ lze přepsat na

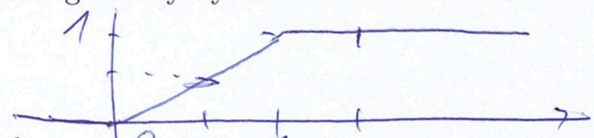
$$H(z) = \frac{1 + 0,5z^{-1} - 0,2z^{-2}}{1 - 0,3z^{-1} - 0,1z^{-2}}$$

```
float filter(float xn) {

  viz A

  return yn;
}
```

pak viz A.

Příklad 16 Distribuční funkce stacionárního náhodného signálu $\xi[n]$ je $F(x) = \begin{cases} x & \text{pro } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{~~jinde~~} \end{cases}$ chyba!

Určete pravděpodobnost, že se hodnota náhodného signálu vyskytne v intervalu 0.5 . . . 1.5



$\mathcal{P}(0.5 \le \xi[n] \le 1.5) =$ F(1,5) − F(0,5) = 1 − 0,5 = 0,5

Příklad 17 Na vstup kvantizéru přichází signál $x[n]$, který může nabývat pouze dvou hodnot: +10 nebo -10. Pravděpodobnost obou hodnot je stejná. Kvantizér ale nefunguje a dává na výstupu pořád hodnotu $x_q[n] = 0$. Určete poměr signálu k šumu (chybě) způsobenému kvantováním v deciBellech. Pomůcka: můžete si situaci simulovat třeba pro N = 100 vzorků.

pro N = 100: energie užit. signálu $E_s = 100(10)^2 = 10000$

energie chyb. signálu $E_e = 100 \cdot 10^2 = 10000$

chyba je stejně velká jako vstup!

$SNR = 10\log_{10}\frac{E_s}{E_e} = 10\log_{10}\frac{10000}{10000} = 10 \cdot 0 = \underline{0 \text{ dB}}$

Příklad 18 Spektrální hustota výkonu stacionárního náhodného signálu s diskrétním časem je konstantní: $G(e^{j\omega}) = 5$. Určete zadaný korelační koeficient signálu.

viz A

$R[55] =$ 0

Příklad 19 2D signál má rozměry 100×100 pixelů a je na obrázku (černá je 1, bílá je 0). Určete, které koeficienty jeho 2D-DFT $X[m, n]$ budou nenulové pro interval $m = 0 \ldots 10$ a $n = 0 \ldots 10$. Pokud bude $X[0, 0]$ nenulový, určete jeho hodnotu přesně.

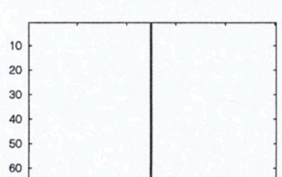
4 periody

viz A

3 periody

$X[3,4]$ a $X[0,0] = 100 \cdot 100 \cdot 0,5 = 5000$

Příklad 20 2D signál má rozměry 100×100 pixelů a je na obrázku (černá je 1, bílá je 0). Nakreslete, jak bude vypadat po filtraci mediánovým filtrem o rozměrech 9 × 9.



čára zmizí, medián vždy převáží nuly nad jedničkami!