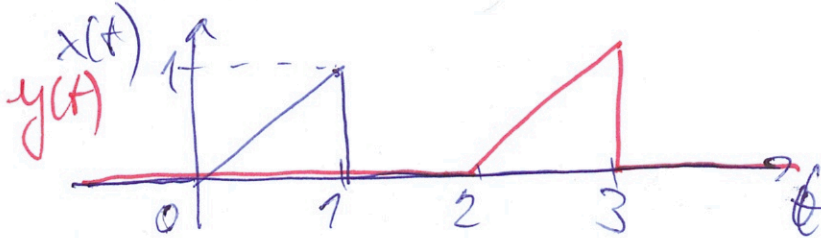


Semestrální zkouška ISS, řádný termín, 13.1.2021, skupina ráno

Login: Příjmení a jméno: Podpis:
(čitelně!)

Příklad 1 Signál se spojitým časem je dán jako: $x(t) = \begin{cases} t & \text{pro } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

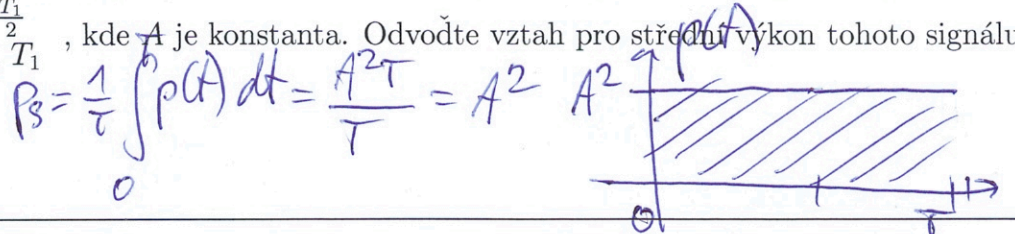
Nakreslete tento signál a do stejného obrázku nakreslete signál $y(t) = x(t - 2)$.



Příklad 2 Periodický signál se spojitým časem má periodu T_1 . Jedna jeho perioda je dána jako:

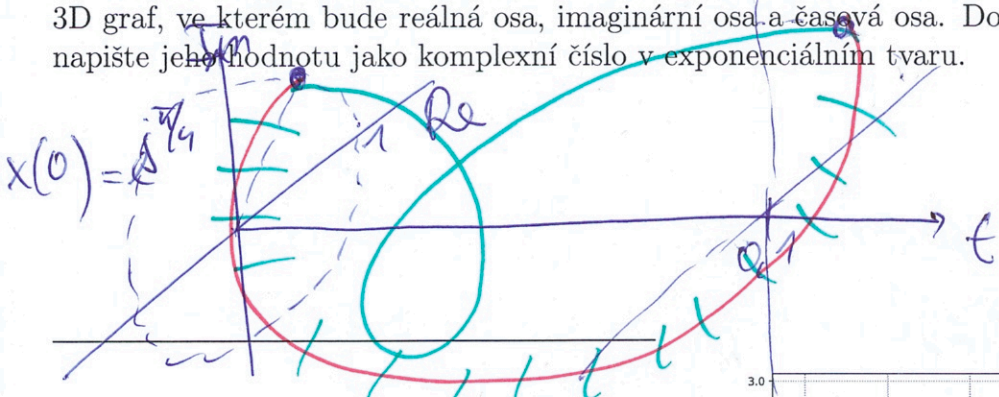
$x(t) = \begin{cases} A & \text{pro } 0 < t \leq \frac{T_1}{2} \\ -A & \text{pro } \frac{T_1}{2} < t \leq T_1 \end{cases}$, kde A je konstanta. Odvoďte vztah pro střední výkon tohoto signálu.

$P_s = A^2$

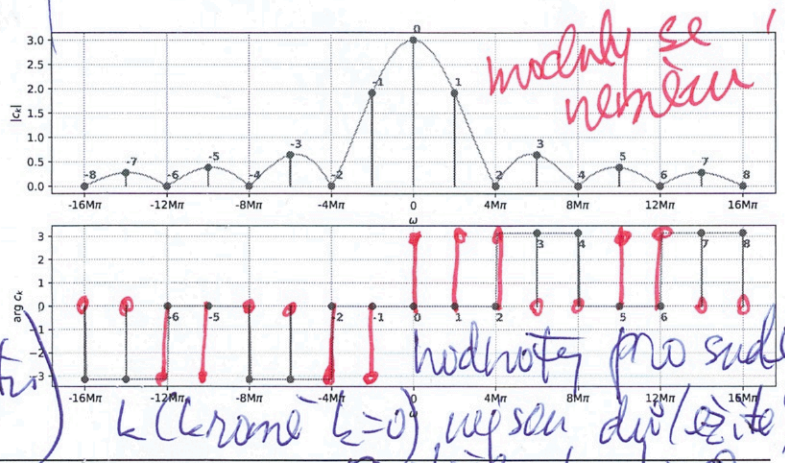


Příklad 3 Signál se spojitým časem je komplexní exponenciála: $x(t) = e^{j\frac{\pi}{4}} e^{-j20\pi t}$. Nakreslete ji jako 3D graf, ve kterém bude reálná osa, imaginární osa a časová osa. Do obrázku jasně vyznačte bod $x(0)$ a napište jeho hodnotu jako komplexní číslo v exponenciálním tvaru.

$T_1 = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{20\pi} = 0,1 \text{ s}$

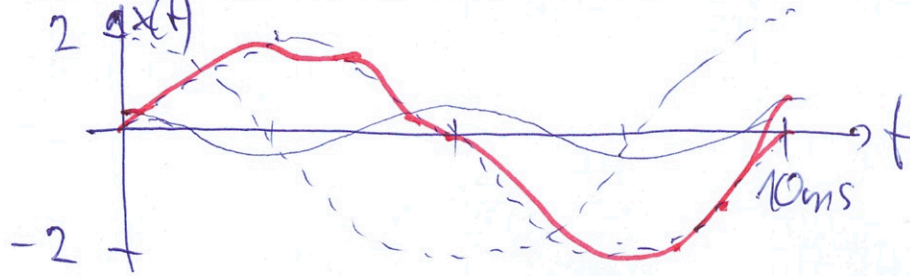


Příklad 4 Na obrázku jsou koeficienty Fourierovy řady signálu $x(t)$. Nakreslete do stejného obrázku koeficienty Fourierovy řady signálu $y(t) = -x(t)$



$c_{-k} = -c_k$ změna znaménka \Rightarrow změna fáze
 $0 \rightarrow \pi$ nebo $-\pi$ (argument)
 $\pi/\pi \rightarrow 0$

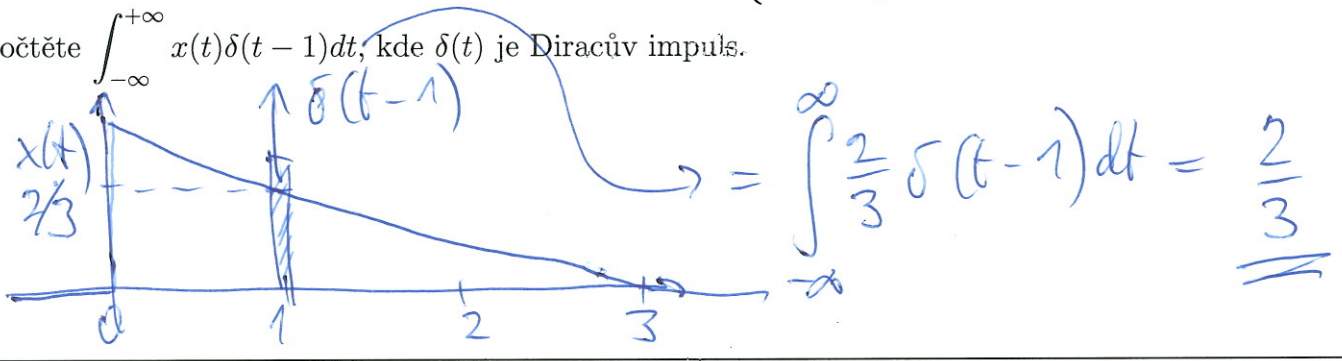
Příklad 5 Koeficienty Fourierovy řady signálu $x(t)$ s periodou $T_1 = 10 \text{ ms}$ jsou $c_1 = e^{-j\frac{\pi}{2}}$, $c_{-1} = e^{+j\frac{\pi}{2}}$, $c_2 = 0,1$, $c_{-2} = 0,1$.
 $x(t) = \frac{1}{4} \cos(200\pi t - \pi/2) + 0,2 \cos(400\pi t)$



řádko

Příklad 6 Signál se spojitým časem je dán jako: $x(t) = \begin{cases} 1 - \frac{t}{3} & \text{pro } 0 \leq t \leq 3 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

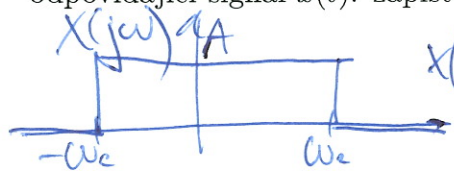
Vypočítejte $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-1)dt$, kde $\delta(t)$ je Diracův impuls.



Příklad 7 Spektrální funkce signálu se spojitým časem má tvar obdélníka:

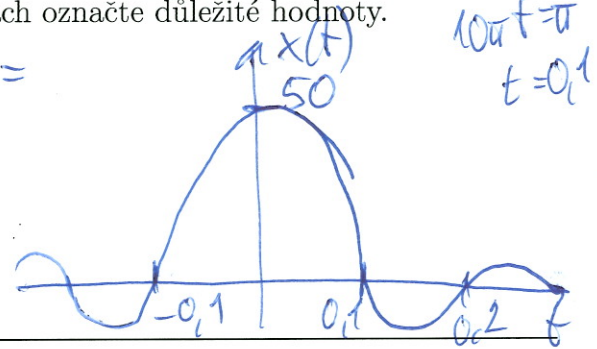
$X(j\omega) = \begin{cases} 5 & \text{pro } -10\pi \text{ rad/s} \leq \omega \leq +10\pi \text{ rad/s} \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$. Pomocí inverzní Fourierovy transformace spočítejte

odpovídající signál $x(t)$: запиšte jej výrazem a nakreslete, na osách označte důležité hodnoty.



$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega =$
 = sč. pomůcka =
 = $\frac{A}{2\pi} 2\omega_c \text{sinc}(\omega_c t) =$
 = $\frac{A\omega_c}{\pi} \text{sinc}(\omega_c t)$

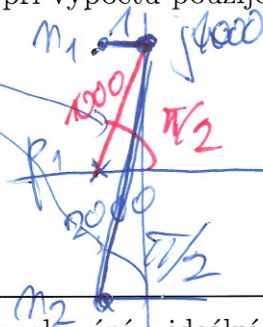
$x(t) = \underline{50 \text{sinc}(10\pi t)}$



Příklad 8 Přenosová funkce systému se spojitým časem $H(s)$ má dva nulové body a jeden pól:

$n_1 = -1 + j1000$, $n_2 = -1 - j1000$, $p_1 = -1$. Do systému vstupuje signál $x(t) = A \cos(1000t)$. Napište vztah pro signál na výstupu. Pokud při výpočtu použijete zjednodušení, krátce je popište.

zjednodušení:
 elementy vektorů
 jeden svíže udává



$|H(j1000)| = \frac{1 \cdot 2000}{1000} = 2$

$\text{arg } H(j1000) = 0 + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = 0$

$y(t) = \underline{2A \cos(1000t)}$

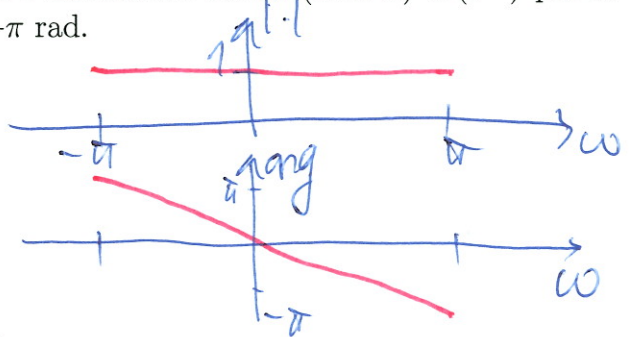
Příklad 9 Do sekvence ideálního vzorkování a ideální rekonstrukce se vzorkovací frekvencí $F_s = 16 \text{ kHz}$ vstupuje kosinusovka na frekvenci 1 kHz . Je použitý anti-aliasingový filtr. Napište, co bude na výstupu, a krátce zdůvodněte.

↓ splňuje vzh. teorém

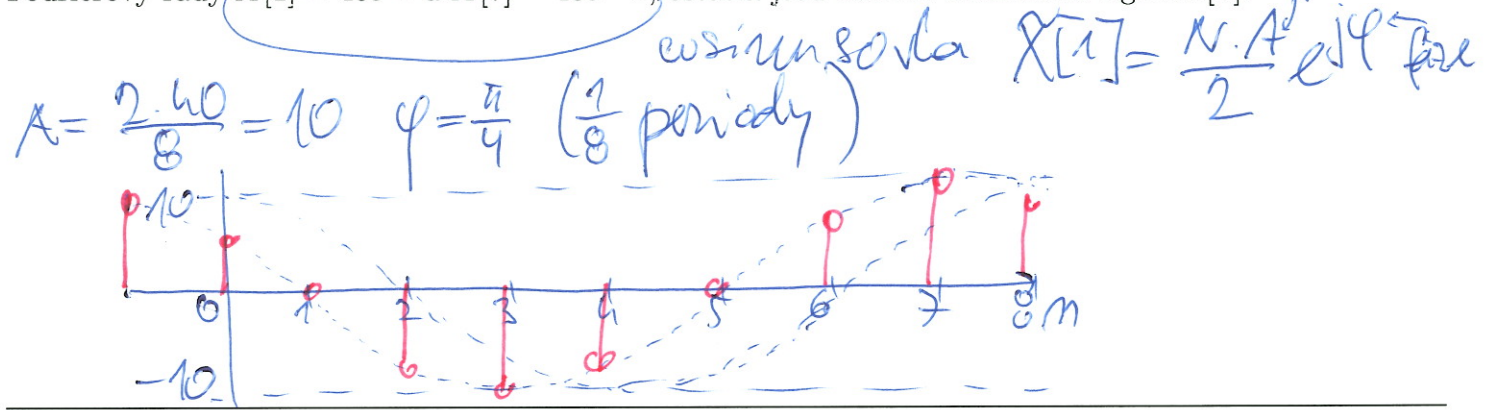
presně stejná kosinusovka na frekvenci 1 kHz

Příklad 10 Diskrétní signál $x[n]$ je všude nulový kromě jednoho vzorku: $x[1] = 1$. Vypočítejte a nakreslete modul i argument jeho Fourierovy transformace s diskrétním časem (DTFT) $\tilde{X}(e^{j\omega})$ pro interval normovaných kruhových frekvencí ω od $-\pi$ rad do $+\pi$ rad.

$\tilde{X}(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{j\omega n} = \underline{e^{j\omega}}$
 $| \cdot | = 1$
 $\text{arg} = -\omega$



Příklad 11 Periodický signál s diskretním časem $\tilde{x}[n]$ má periodu $N = 8$ vzorků a koeficienty diskretní Fourierovy řady $\tilde{X}[1] = 40e^{j\frac{\pi}{4}}$ a $\tilde{X}[7] = 40e^{-j\frac{\pi}{4}}$, ostatní jsou nulové. Nakreslete signál $\tilde{x}[n]$.



Příklad 12 Je spočítána Diskretní Fourierova transformace (DFT) $X[k]$ reálného diskretního signálu $x[n]$ o délce $N = 256$ vzorků a jsou ponechány pouze reálné složky koeficientů $X[k]$. Napište, zda zůstalo dost informace pro přesnou rekonstrukci původního signálu $x[n]$ a krátce zdůvodněte.

NE, nemáme informaci pro imaginární složky, z reálných nejde vypočítat.

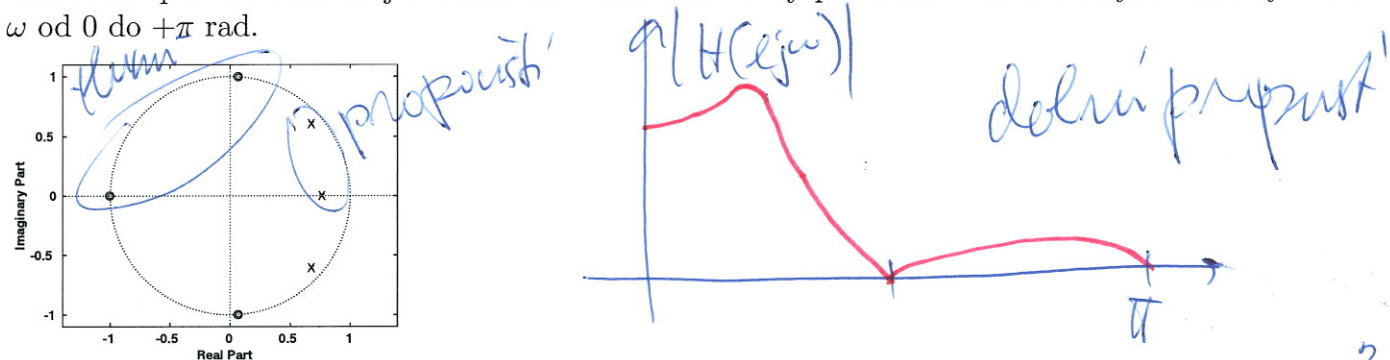
Příklad 13 Napište v C nebo v Pythonu (numpy) kód pro výpočet Diskretní Fourierovy transformace (DFT). Vstupem je pole x o délce N vzorků. Výstupem je pole Xr s reálnými složkami výstupu a pole Xi s imaginárními složkami výstupu, obě o délce N . Smíte použít pouze funkce \sin a \cos , nesmíte použít komplexní proměnné. Proměnné x , Xr , Xi , N již nemusíte definovat.

```

float sumr, sumi;
for (k=0; k<N; k++) {
    sumr = 0; sumi = 0;
    for (n=0; n<N; n++) {
        sumr += x[n] * cos(f * float(n) * float(k));
        sumi += x[n] * sin(f * float(n) * float(k));
    }
    Xr[k] = sumr; Xi[k] = sumi;
}
float sumr, sumi;
f = 2 * PI / ((float)N);
    
```

Python viz B...

Příklad 14 Na obrázku je rozmístění nulových bodů a pólů přenosové funkce číslicového filtru IIR. Nakreslete přibližně modul jeho frekvenční charakteristiky pro interval normovaných kruhových frekvencí ω od 0 do $+\pi$ rad.



Příklad 15 Číslicový filtr IIR druhého řádu má přenosovou funkci $H(z) = \frac{1}{1-2z^{-1}+2z^{-2}}$. Určete, zda je stabilní. Pomůcka: řešení kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ jsou $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

NEJENI, póly mimo jedn. kružnici

$p_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = 1 \pm j$

ráno

Příklad 16 Funkce hustoty pravděpodobnosti stacionárního náhodného signálu je dána jako

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & \text{pro } -\frac{\Delta}{2} \leq x \leq \frac{\Delta}{2} \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

Pomůcka: $P_s = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx$

$$= \frac{1}{\Delta} \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} x^2 dx = \frac{1}{\Delta} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} = \frac{1}{\Delta} \left[\frac{\Delta^3}{24} - \left(-\frac{\Delta^3}{24} \right) \right]$$

$$P_s = \frac{\Delta^2}{12}$$

Příklad 17 Na $\Omega = 4000$ realizacích náhodného procesu byla naměřena tabulka (sdružený histogram) hodnot mezi časy n_1 a n_2 . Spočítejte korelační koeficient $R[n_1, n_2]$.

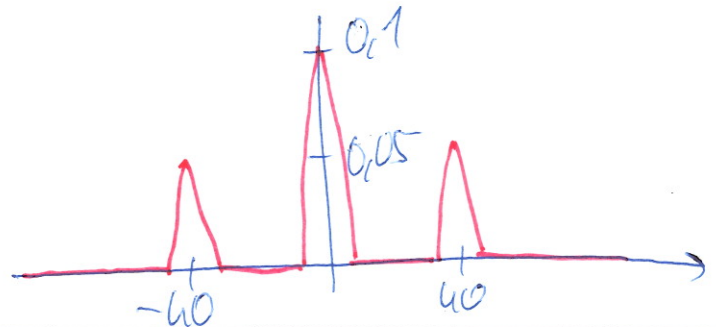
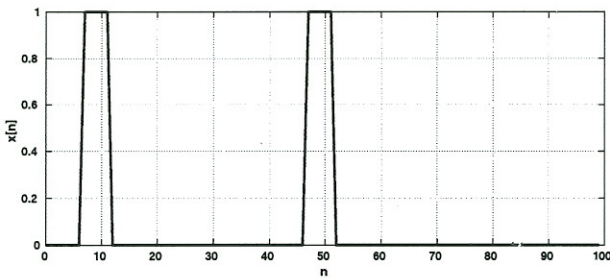
Pomůcka: Jako reprezentativní hodnoty x_1 a x_2 při numerickém výpočtu integrálu $R[n_1, n_2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2, n_1, n_2) dx_1 dx_2$ použijte středy intervalů v tabulce.

intervaly x_1	intervaly x_2			
	[-20, -10]	[-10, 0]	[0, 10]	[10, 20]
[10, 20]	0	0	0	0
[0, 10]	0	1000	1000	0
[-10, 0]	0	1000	1000	0
[-20, -10]	0	0	0	0

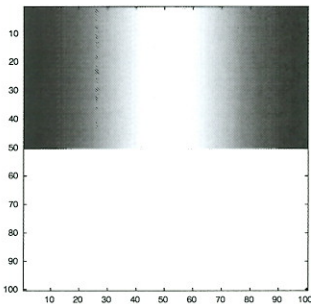
funkce hustoty: dělení Ω a plochou 2D článků...

$$R[n_1, n_2] = \left[5 \cdot 5 \cdot \frac{0,25}{100} + 5 \cdot (-5) \cdot \frac{0,25}{100} + (-5) \cdot 5 \cdot \frac{0,25}{100} + (-5) \cdot (-5) \cdot \frac{0,25}{100} \right] \cdot 100 = 0$$

Příklad 18 Na obrázku je průběh náhodného signálu $x[n]$ o délce 100 vzorků. Impulzy jsou široké 5 vzorků a mají výšku 1. Nakreslete průběh autokorelačních koeficientů $R[k]$ získaných vychýleným odhadem pro $k = -99 \dots 99$.



Příklad 19 Napište kód (C nebo Python/numpy) pro generování obrázku $x[k, l]$ o rozměrech 100×100 pixelů. Na rozdíl od přednášek je bílá barva nula, černá maximum (1). Kód musí obsahovat volání funkce `cos`. Dvourozměrné pole `x` je již alokováno, zobrazováním se nemusíte zabývat.



```

např. tento:
l = np.arange(100)
hor = 1/2 + 1/2 * np.cos(2 * np.pi / 100 * l)
vert = np.zeros(100)
vert[0:50] = 1
X = np.outer(vert, hor)
    
```

Příklad 20 Navrhněte konvoluční jádro (2D filtr) o rozměrech 3×3 , které bude v obrázku zvýrazňovat šikmé hrany jdoucí z levého dolního rohu do horního pravého rohu (např. velkou ručičku ukazující na 7.5 minuty na klasickém ciferníku).

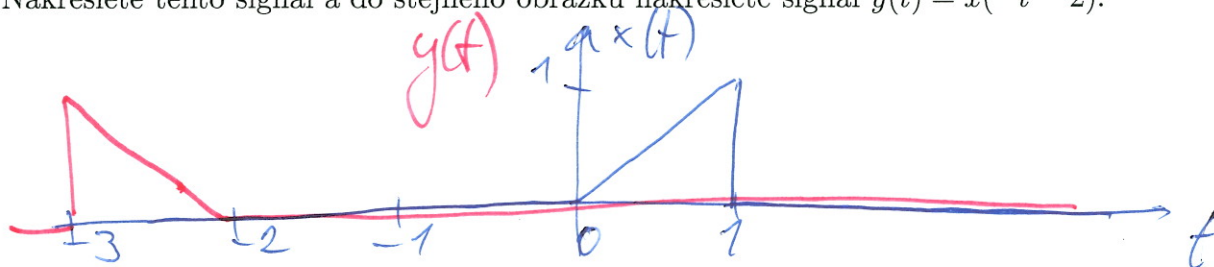
$$\begin{bmatrix} 0 & 0,25 & 0 \\ 0,25 & 0 & -0,25 \\ 0 & -0,25 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{nebo} \quad \begin{bmatrix} 0 & -0,25 & 0 \\ -0,25 & 0 & 0,25 \\ 0 & 0,25 & 0 \end{bmatrix}$$

Semestrální zkouška ISS, řádný termín, 13.1.2021, skupina poledne

Login: Příjmení a jméno: Podpis:
(čitelně!)

Příklad 1 Signál se spojitým časem je dán jako: $x(t) = \begin{cases} t & \text{pro } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

Nakreslete tento signál a do stejného obrázku nakreslete signál $y(t) = x(-t - 2)$.

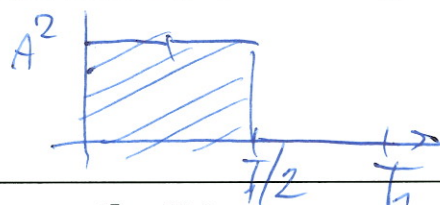


Příklad 2 Periodický signál se spojitým časem má periodu T_1 . Jedna jeho perioda je dána jako:

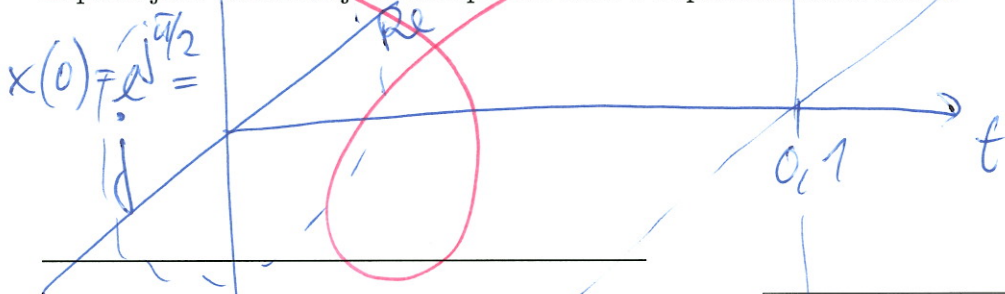
$x(t) = \begin{cases} A & \text{pro } 0 < t \leq \frac{T_1}{4} \\ -A & \text{pro } \frac{T_1}{4} < t \leq \frac{T_1}{2} \\ 0 & \text{pro } \frac{T_1}{2} < t \leq T_1 \end{cases}$, kde A je konstanta. Odvoďte vztah pro střední výkon tohoto signálu.

$P_s = \frac{A^2}{2}$

$P_s = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{A^2 \frac{T}{2}}{T}$



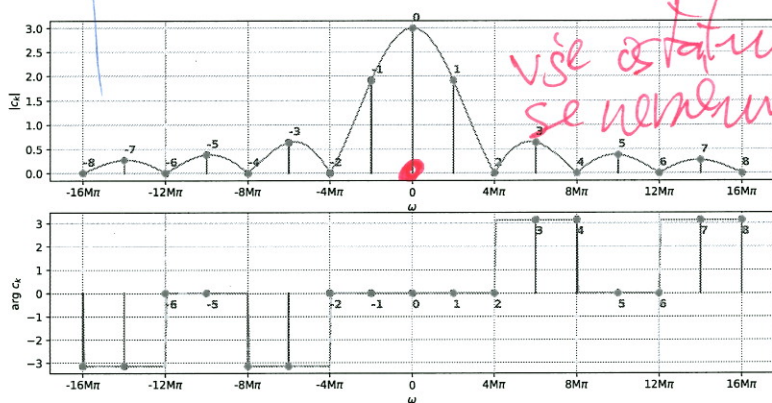
Příklad 3 Signál se spojitým časem je komplexní exponenciála: $x(t) = e^{j\frac{\pi}{2}t} e^{-j20\pi t}$. Nakreslete ji jako 3D graf, ve kterém bude reálná osa, imaginární osa a časová osa. Do obrázku jasně vyznačte bod $x(0)$ a napište jeho hodnotu jako komplexní číslo v exponenciálním tvaru.



$T_1 = \frac{2\pi}{20\pi} = 0.1s$

Příklad 4 Na obrázku jsou koeficienty Fourierovy řady signálu $x(t)$. Nakreslete do stejného obrázku koeficienty Fourierovy řady signálu $y(t) = x(t) - 3$

Pouze změna stejnosměrné složky: c_0



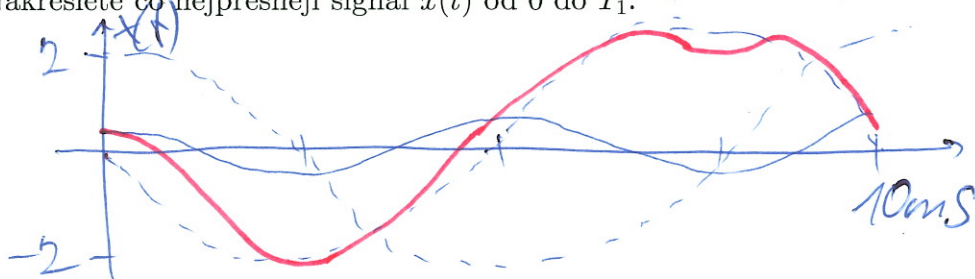
vše ostatní se nemění!

Příklad 5 Koeficienty Fourierovy řady signálu $x(t)$ s periodou $T_1 = 10$ ms jsou

$c_1 = e^{j\frac{\pi}{2}}$, $c_{-1} = e^{-j\frac{\pi}{2}}$, $c_2 = 0.1$, $c_{-2} = 0.1$.

Nakreslete co nej přesněji signál $x(t)$ od 0 do T_1 .

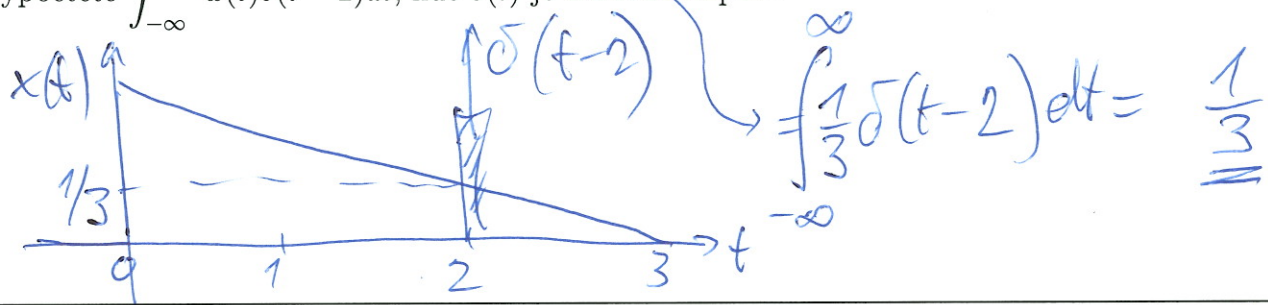
$x(t) = 2 \cos(200\pi t + \pi/2) + 0.2 \cos(400\pi t)$



podle

Příklad 6 Signál se spojitým časem je dán jako: $x(t) = \begin{cases} 1 - \frac{t}{3} & \text{pro } 0 \leq t \leq 3 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

Vypočítejte $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-2)dt$, kde $\delta(t)$ je Diracův impuls.

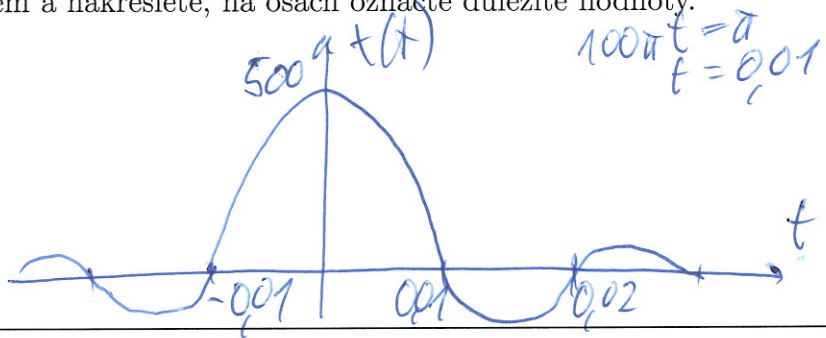


Příklad 7 Spektrální funkce signálu se spojitým časem má tvar obdélníka:

$X(j\omega) = \begin{cases} 5 & \text{pro } -100\pi \text{ rad/s} \leq \omega \leq +100\pi \text{ rad/s} \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$. Pomocí inverzní Fourierovy transformace spočítejte

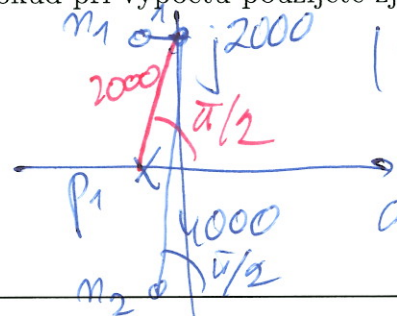
odpovídající signál $x(t)$: запиšte jej výrazem a nakreslete, na osách označte důležité hodnoty.

$x(t) = 500 \text{ sinc}(100\pi t)$



Příklad 8 Přenosová funkce systému se spojitým časem $H(s)$ má dva nulové body a jeden pól: $n_1 = -1 + j2000$, $n_2 = -1 - j2000$, $p_1 = -1$. Do systému vstupuje signál $x(t) = A \cos(2000t)$. Napište vztah pro signál na výstupu. Pokud při výpočtu použijete zjednodušení, krátce je popište.

zjednodušení: viz A

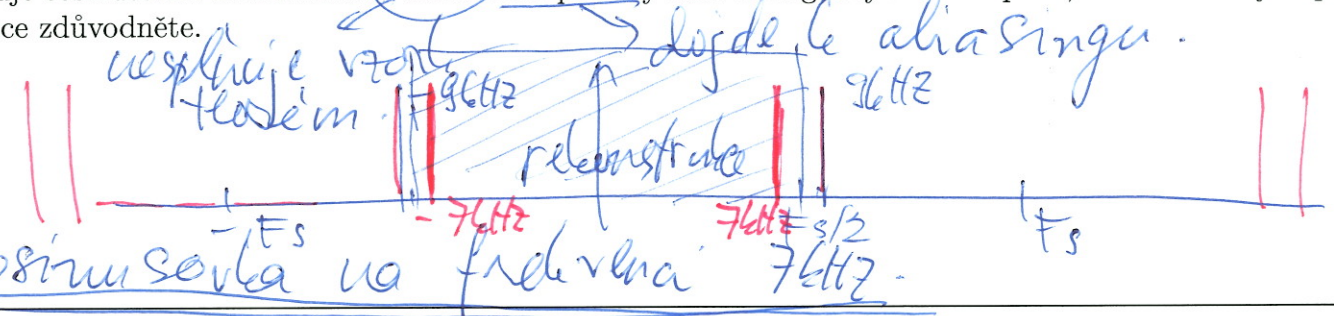


$|H(j2000)| = \frac{1 \cdot 4000}{2000} = 2$

$\text{ang } H(j2000) = 0 + \pi/2 - \pi/2 = 0$

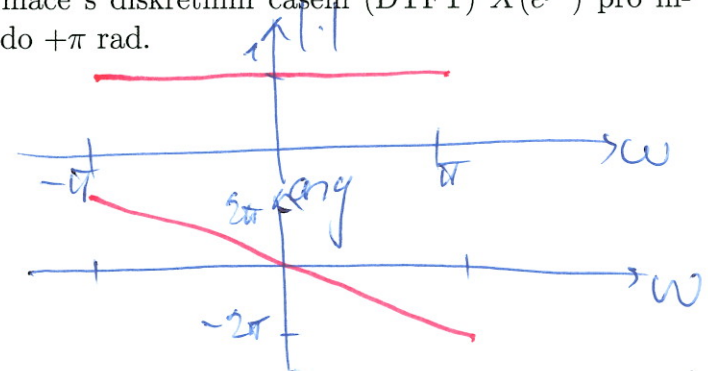
$y(t) = 2A \cos(2000t)$

Příklad 9 Do sekvence ideálního vzorkování a ideální rekonstrukce se vzorkovací frekvencí $F_s = 16 \text{ kHz}$ vstupuje kosinůvka na frekvenci 9 kHz . Není použitý anti-aliasingový filtr. Napište, co bude na výstupu, a krátce zdůvodněte.



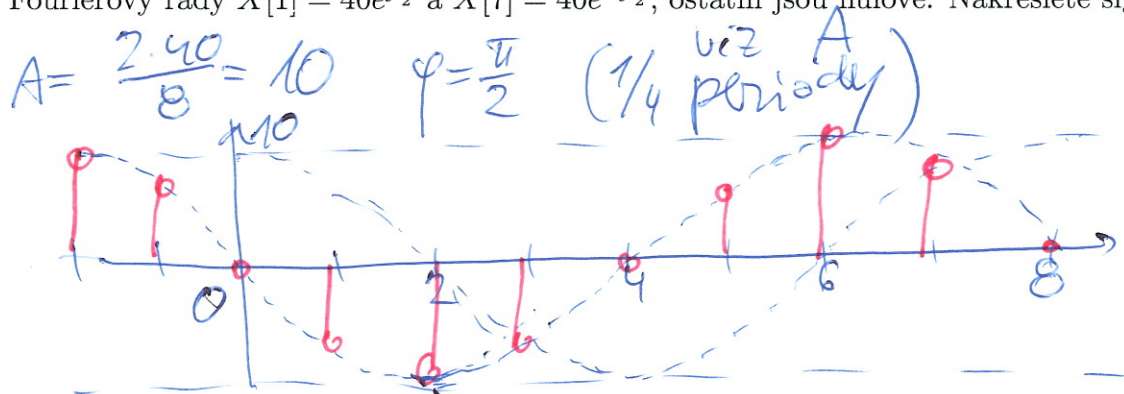
Příklad 10 Diskrétní signál $x[n]$ je všude nulový kromě jednoho vzorku: $x[2] = 1$. Vypočítejte a nakreslete modul i argument jeho Fourierovy transformace s diskretním časem (DTFT) $\tilde{X}(e^{j\omega})$ pro interval normovaných kruhových frekvencí ω od $-\pi$ rad do $+\pi$ rad.

viz A
 $\tilde{X}(e^{j\omega}) = e^{-j2\omega}$
 $| \cdot | = 1$
 $\text{ang} = -2\omega$



poledne

Příklad 11 Periodický signál s diskretním časem $\tilde{x}[n]$ má periodu $N = 8$ vzorků a koeficienty diskretní Fourierovy řady $\tilde{X}[1] = 40e^{j\frac{\pi}{2}}$ a $\tilde{X}[7] = 40e^{-j\frac{\pi}{2}}$, ostatní jsou nulové. Nakreslete signál $\tilde{x}[n]$.



Příklad 12 Je spočítána Diskretní Fourierova transformace (DFT) $X[k]$ reálného diskretního signálu $x[n]$ o délce $N = 256$ vzorků a jsou ponechány pouze koeficienty $X[0] \dots X[127]$. Napište, zda zůstalo dost informace pro přesnou rekonstrukci původního signálu $x[n]$ a krátce zdůvodněte.

NE, chybí koeficient $X[128]$, který není z čísla vyrobít.

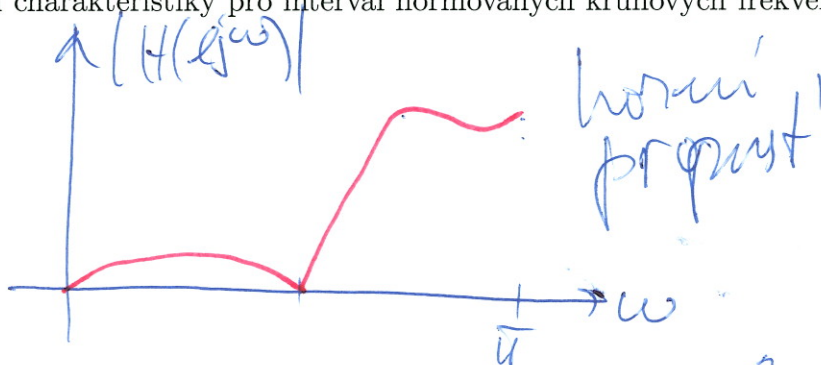
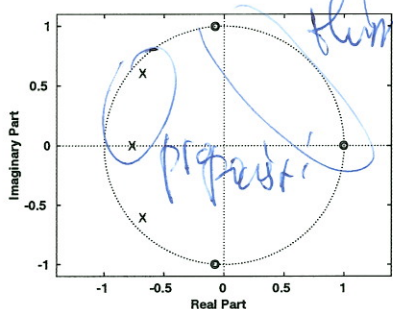
Příklad 13 Napište v C nebo v Pythonu (numpy) kód pro výpočet Diskretní Fourierovy transformace (DFT). Vstupem je pole x o délce N vzorků. Výstupem je pole X_r s reálnými složkami výstupu a pole X_i s imaginárními složkami výstupu, obě o délce N . Smíte použít pouze funkce \sin a \cos , nesmíte použít komplexní proměnné. Proměnné x , X_r , X_i , N již nemusíte definovat.

```

n = np.arange(N)
for k in np.arange(N):
    Xr[k] = np.dot(x, 2 * np.pi / N * n)
    Xi[k] = np.dot(x, -np.pi * n)

```

Příklad 14 Na obrázku je rozmístění nulových bodů a pólů přenosové funkce číslicového filtru IIR. Nakreslete přibližně modul jeho frekvenční charakteristiky pro interval normovaných kruhových frekvencí ω od 0 do $+\pi$ rad.



Příklad 15 Číslicový filtr IIR druhého řádu má přenosovou funkci $H(z) = \frac{1}{1+2z^{-1}+2z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2+2z+2}$. Určete, zda je stabilní. Pomůcka: řešení kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ jsou $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

$p_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} = -1 \pm j$

NEJENÍ, póly mimo jednotkovou kružnici

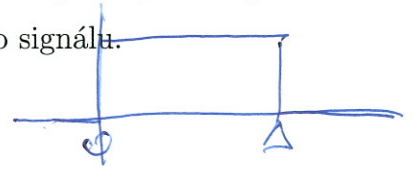
poledne

Příklad 16 Funkce hustoty pravděpodobnosti stacionárního náhodného signálu je dána jako

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & \text{pro } 0 \leq x \leq \Delta \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

Pomůcka: $P_s = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx$.

$$\text{viz } A = \frac{1}{\Delta} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^\Delta = \frac{1}{\Delta} \left[\frac{\Delta^3}{3} - 0 \right]$$



$$P_s = \frac{\Delta^2}{3}$$

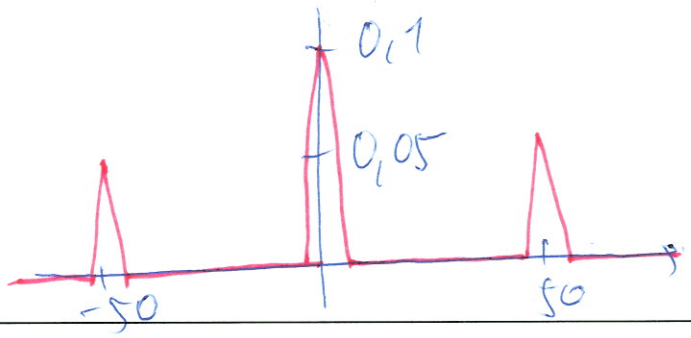
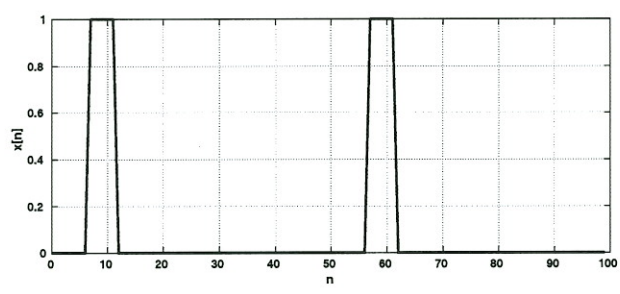
Příklad 17 Na $\Omega = 4000$ realizacích náhodného procesu byla naměřena tabulka (sdružený histogram) hodnot mezi časy n_1 a n_2 . Spočítejte korelační koeficient $R[n_1, n_2]$.

Pomůcka: Jako reprezentativní hodnoty x_1 a x_2 při numerickém výpočtu integrálu $R[n_1, n_2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2, n_1, n_2) dx_1 dx_2$ použijte středy intervalů v tabulce.

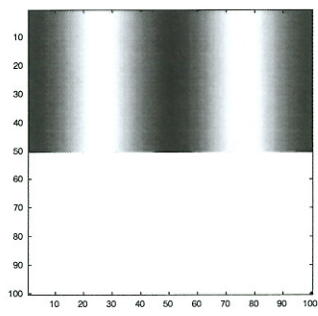
intervaly x_1	-15	intervaly x_2	-15	
	[-20, -10]	[-10, 0]	[0, 10]	[10, 20]
15	500	0	0	0
5	0	1500	0	0
-5	0	0	1500	0
-15	0	0	0	500

$$R[n_1, n_2] = \left[-15 \cdot 15 \cdot \frac{1}{400} + (-5) \cdot 5 \cdot \frac{3}{400} + 15 \cdot (-15) \cdot \frac{3}{400} + 15 \cdot (-15) \cdot \frac{7}{400} \right] 100 = -75$$

Příklad 18 Na obrázku je průběh náhodného signálu $x[n]$ o délce 100 vzorků. Impulsy jsou široké 5 vzorků a mají výšku 1. Nakreslete průběh autokorelačních koeficientů $R[k]$ získaných vychýleným odhadem pro $k = -99 \dots 99$.



Příklad 19 Napište kód (C nebo Python/numpy) pro generování obrázku $x[k, l]$ o rozměrech 100×100 pixelů. Na rozdíl od přednášek je bílá barva nula, černá maximum (1). Kód musí obsahovat volání funkce cos. Dvourozměrné pole x je již alokováno, zobrazováním se nemusíte zabývat.



```

např: l = np.arange(100)
hor = 1/2 + 1/2 * np.cos(4 * np.pi / 100 * l)
vert = np.zeros(100)
vert[0:50] = 1
X = np.outer(vert, hor)

```

Příklad 20 Navrhněte konvoluční jádro (2D filtr) o rozměrech 3×3 , které bude v obrázku zvýrazňovat šikmé hrany jdoucí z levého dolního rohu do horního pravého rohu (např. velkou ručičku ukazující na 7.5 minuty na klasickém ciferníku).

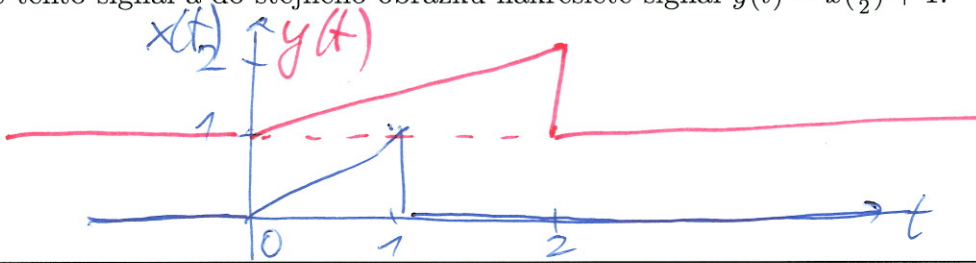
viz A

Semestrální zkouška ISS, řádný termín, 13.1.2021, skupina večer

Login: Příjmení a jméno: Podpis:
(čitelně!)

Příklad 1 Signál se spojitým časem je dán jako: $x(t) = \begin{cases} t & \text{pro } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

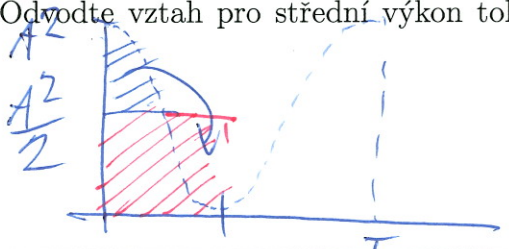
Nakreslete tento signál a do stejného obrázku nakreslete signál $y(t) = x(\frac{t}{2}) + 1$.



Příklad 2 Periodický signál se spojitým časem má periodu T_1 . Jedna jeho perioda je dána jako:

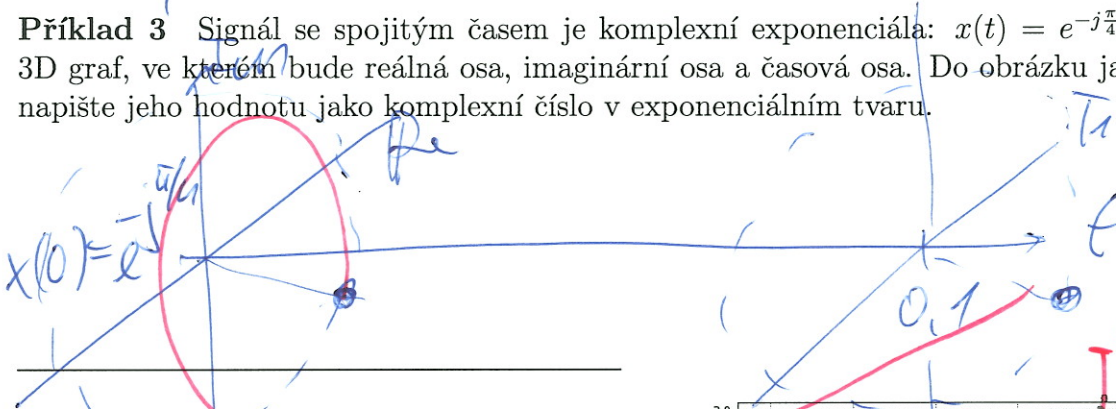
$x(t) = \begin{cases} A \cos(\frac{2\pi}{T_1}t) & \text{pro } 0 < t \leq \frac{T_1}{2} \\ 0 & \text{pro } \frac{T_1}{2} < t \leq T_1 \end{cases}$, kde A je konstanta. Odvoďte vztah pro střední výkon tohoto signálu.

$$P_s = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{\frac{A^2}{2} \cdot \frac{T}{2}}{T} = \frac{A^2}{4}$$



$P_s = \frac{A^2}{4}$

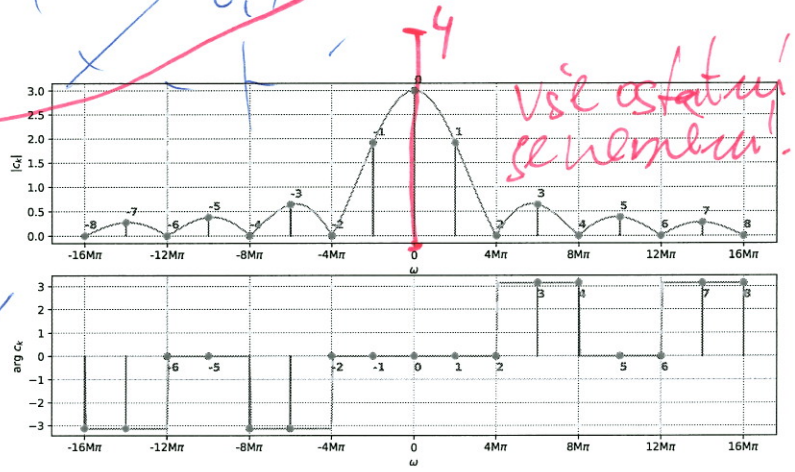
Příklad 3 Signál se spojitým časem je komplexní exponenciála: $x(t) = e^{-j\frac{\pi}{4}} e^{j20\pi t}$. Nakreslete ji jako 3D graf, ve kterém bude reálná osa, imaginární osa a časová osa. Do obrázku jasně vyznačte bod $x(0)$ a napište jeho hodnotu jako komplexní číslo v exponenciálním tvaru.



$T_1 = \frac{2\pi}{20\pi} = 0,1 \text{ s}$

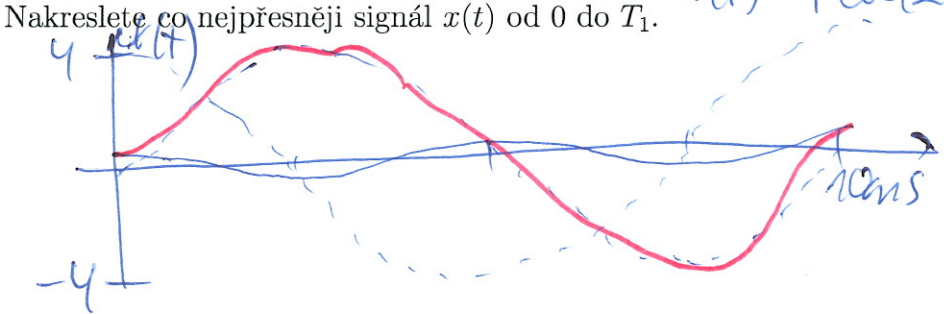
Příklad 4 Na obrázku jsou koeficienty Fourierovy řady signálu $x(t)$. Nakreslete do stejného obrázku koeficienty Fourierovy řady signálu $y(t) = x(t) + 1$

pozor, změna stejnosměrné složky: c_0



Příklad 5 Koeficienty Fourierovy řady signálu $x(t)$ s periodou $T_1 = 10 \text{ ms}$ jsou

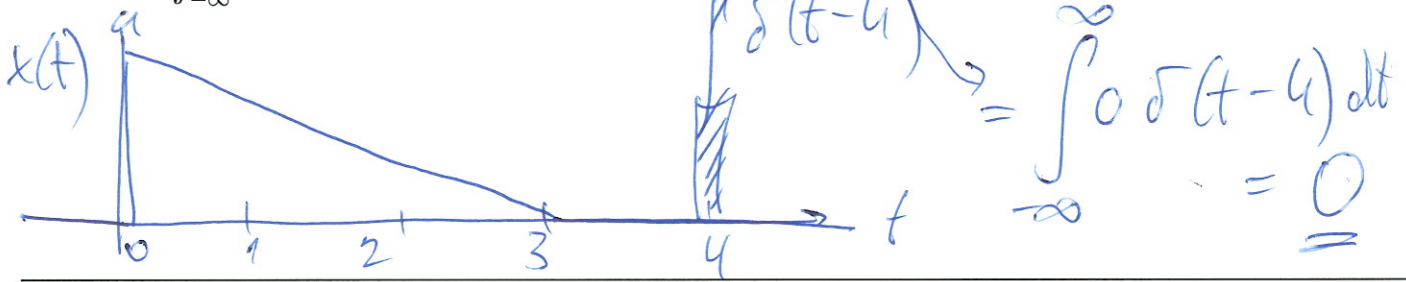
$c_1 = 2e^{-j\frac{\pi}{2}}$, $c_{-1} = 2e^{+j\frac{\pi}{2}}$, $c_2 = 0,1$, $c_{-2} = 0,1$. $x(t) = 4 \cos(200\pi t - \frac{\pi}{2}) + 0,2 \cos(400\pi t)$



več b

Příklad 6 Signál se spojitým časem je dán jako: $x(t) = \begin{cases} 1 - \frac{t}{3} & \text{pro } 0 \leq t \leq 3 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

Vypočítejte $\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\delta(t-4)dt$, kde $\delta(t)$ je Diracův impuls.

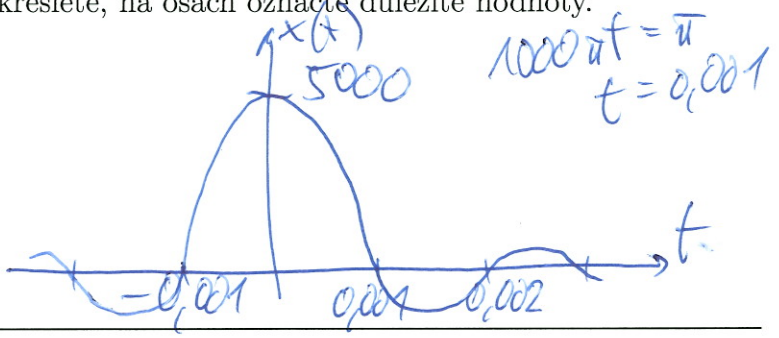


Příklad 7 Spektrální funkce signálu se spojitým časem má tvar obdélníka:

$X(j\omega) = \begin{cases} 5 & \text{pro } -1000\pi \text{ rad/s} \leq \omega \leq +1000\pi \text{ rad/s} \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$. Pomocí inverzní Fourierovy transformace spočítejte

odpovídající signál $x(t)$: запиште jej výrazem a nakreslete, na osách označte důležité hodnoty.

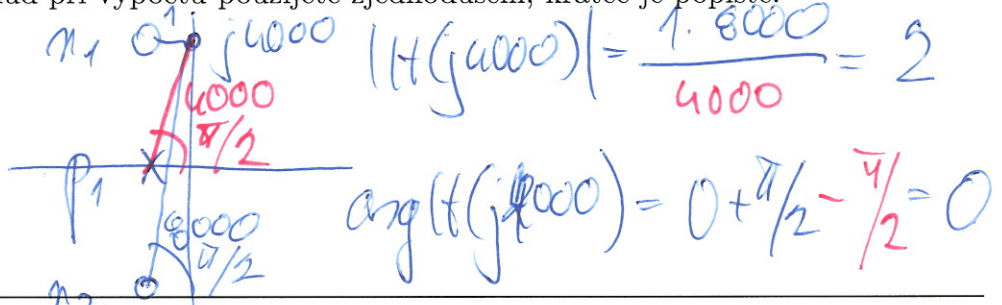
$x(t) = 5000 \text{ sinc}(1000\pi t)$



Příklad 8 Přenosová funkce systému se spojitým časem $H(s)$ má dva nulové body a jeden pól:

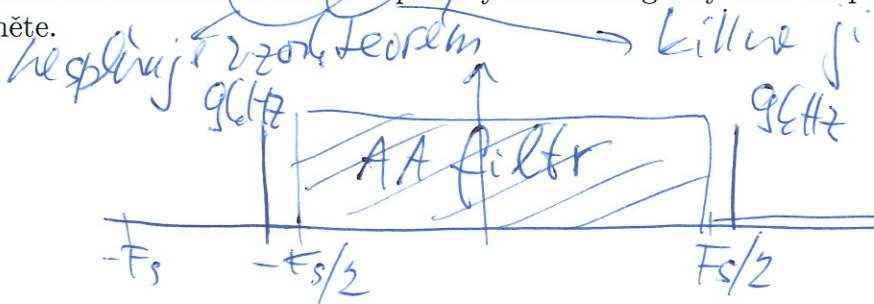
$n_1 = -1 + j4000$, $n_2 = -1 - j4000$, $p_1 = -1$. Do systému vstupuje signál $x(t) = A \cos(4000t)$. Napište vztah pro signál na výstupu. Pokud při výpočtu použijete zjednodušení, krátce je popište.

zjednodušen: viz A



$y(t) = 2A \cos(4000t)$

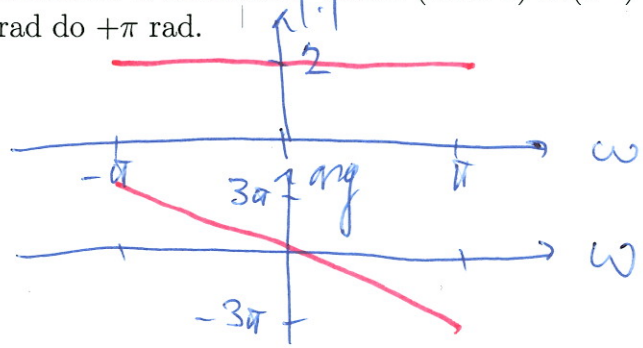
Příklad 9 Do sekvence ideálního vzorkování a ideální rekonstrukce se vzorkovací frekvencí $F_s = 16$ kHz vstupuje cosinusovka na frekvenci 9 kHz. Je použitý anti-aliasingový filtr. Napište, co bude na výstupu, a krátce zdůvodněte.



nula

Příklad 10 Diskrétní signál $x[n]$ je všude nulový kromě jednoho vzorku: $x[3] = 2$. Vypočítejte a nakreslete modul i argument jeho Fourierovy transformace s diskrétním časem (DTFT) $\tilde{X}(e^{j\omega})$ pro interval normovaných kruhových frekvencí ω od $-\pi$ rad do $+\pi$ rad.

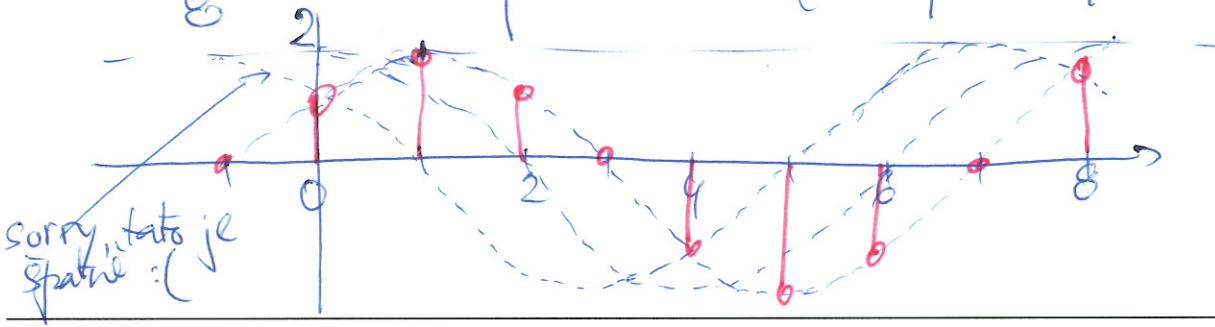
viz A $\tilde{X}(e^{j\omega}) = 2e^{-j3\omega}$
 $| \cdot | = 2$
 $\arg = -3\omega$



učeb

Příklad 11 Periodický signál s diskretním časem $\tilde{x}[n]$ má periodu $N = 8$ vzorků a koeficienty diskretní Fourierovy řady $\tilde{X}[1] = 8e^{-j\frac{\pi}{4}}$ a $\tilde{X}[7] = 8e^{j\frac{\pi}{4}}$, ostatní jsou nulové. Nakreslete signál $\tilde{x}[n]$.

$A = \frac{2 \cdot 8}{8} = 2$ $\varphi = -\frac{\pi}{4}$ (1/8 periody)



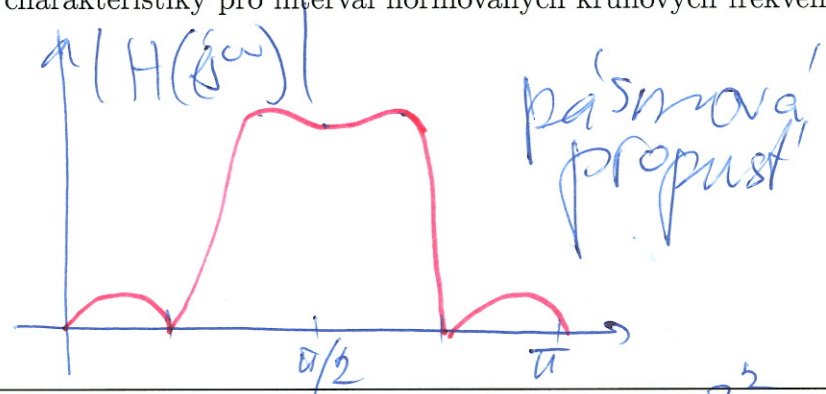
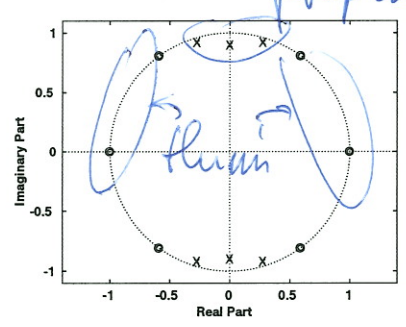
Příklad 12 Je spočítána Diskretní Fourierova transformace (DFT) $X[k]$ reálného diskretního signálu $x[n]$ o délce $N = 256$ vzorků a jsou ponechány pouze koeficienty $X[0] \dots X[128]$. Napište, zda zůstalo dost informace pro přesnou rekonstrukci původního signálu $x[n]$ a krátce zdůvodněte.

ANO, pro reálný signál ideou $X[129 \dots 255]$ vyrobit pomocou $X[k] = X^*[N-k]$, pak IDFT.

Příklad 13 Napište v C nebo v Pythonu (numpy) kód pro výpočet Diskretní Fourierovy transformace (DFT). Vstupem je pole x o délce N vzorků. Výstupem je pole Xr s reálnými složkami výstupu a pole Xi s imaginárními složkami výstupu, obě o délce N . Smíte použít pouze funkce \sin a \cos , nesmíte použít komplexní proměnné. Proměnné x , Xr , Xi , N již nemusíte definovat.

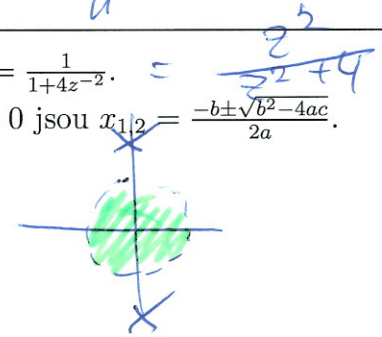
uč A, B

Příklad 14 Na obrázku je rozmístění nulových bodů a pólů přenosové funkce číslicového filtru IIR. Nakreslete přibližně modul jeho frekvenční charakteristiky pro interval normovaných kruhových frekvencí ω od 0 do $+\pi$ rad.



Příklad 15 Číslicový filtr IIR druhého řádu má přenosovou funkci $H(z) = \frac{1}{1+4z^{-2}}$. Určete, zda je stabilní. Pomůcka: řešení kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ jsou $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

$P_{1/2} = \frac{0 \pm \sqrt{-16}}{2} = \pm 2j$
NEJÍ, póly mimo jednot. kružnici.



lecies

Příklad 16 Funkce hustoty pravděpodobnosti stacionárního náhodného signálu je dána jako

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} & \text{pro } -\Delta \leq x \leq 0 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

Pomůcka: $P_s = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx$

$$P_s = \frac{\Delta^2}{3}$$

$$A = \frac{1}{\Delta} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{-\Delta} = \frac{1}{\Delta} \left[0 - \left(-\frac{\Delta^3}{3} \right) \right]$$

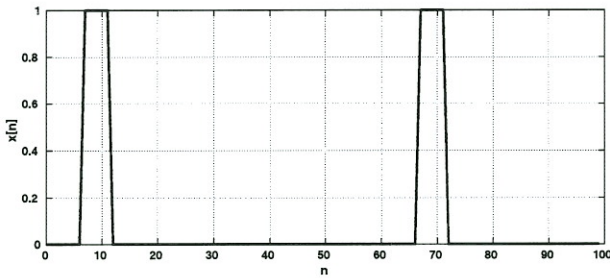


Příklad 17 Na $\Omega = 4000$ realizacích náhodného procesu byla naměřena tabulka (sdružený histogram) hodnot mezi časy n_1 a n_2 . Spočítejte korelační koeficient $R[n_1, n_2]$. Pomůcka: Jako reprezentativní hodnoty x_1 a x_2 při numerickém výpočtu integrálu $R[n_1, n_2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2, n_1, n_2) dx_1 dx_2$ použijte středy intervalů v tabulce.

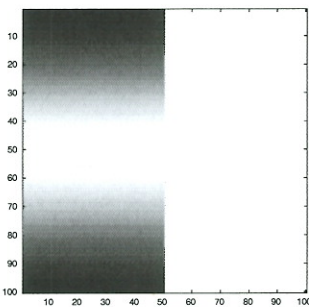
intervaly x_1	intervaly x_2			
	[-20, -10]	[-10, 0]	[0, 10]	[10, 20]
[10, 20]	0	0	0	1000
[0, 10]	0	0	1000	0
[-10, 0]	0	1000	0	0
[-20, -10]	1000	0	0	0

$$R[n_1, n_2] = \left[(-15)(-15) \frac{0,25}{400} + (-5)(-5) \frac{0,25}{400} + 5 \cdot 5 \cdot \frac{0,25}{400} + 15 \cdot 15 \cdot \frac{0,25}{400} \right] \cdot 400 = 225 \cdot 0,25 + 25 \cdot 0,25 = 125$$

Příklad 18 Na obrázku je průběh náhodného signálu $x[n]$ o délce 100 vzorků. Impulzy jsou široké 5 vzorků a mají výšku 1. Nakreslete průběh autokorelačních koeficientů $R[k]$ získaných vychýleným odhadem pro $k = -99 \dots 99$.



Příklad 19 Napište kód (C nebo Python/numpy) pro generování obrázku $x[k, l]$ o rozměrech 100×100 pixelů. Na rozdíl od přednášek je bílá barva nula, černá maximum (1). Kód musí obsahovat volání funkce `cos`. Dvourozměrné pole `x` je již alokováno, zobrazováním se nemusíte zabývat.



```
napiš: k = np.arange(100)
l = 1/2 + 1/2 * cos(2 * np.pi / 100 * k)
hor = np.zeros(100)
hor[0:50] = 1
X = np.outer(hor, l)
```

Příklad 20 Navrhněte konvoluční jádro (2D filtr) o rozměrech 3×3 , které bude v obrázku zvýrazňovat šikmé hrany jdoucí z levého dolního rohu do horního pravého rohu (např. velkou ručičku ukazující na 7.5 minuty na klasickém ciferníku).

viz A