Semestrální zkouška ISS/VSG, 1. opravný termín, 26.1.2022, skupina A

Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: ....

(čitelně!)

$\tau = 0{,}5$ ms $\quad D = 5 \quad T_1 = 1$ ms $\qquad$ REF

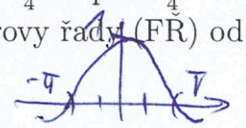
$\omega_1 = \frac{2\pi}{T_1} = 2000\pi$ rad/s

Příklad 1 Periodický signál se spojitým časem má periodu $T_1 = 1$ ms. Jedna jeho perioda je dána jako:

$$x(t) = \begin{cases} 5 & \text{pro} \quad -\frac{T_1}{4} < t \le \frac{T_1}{4} \\ 0 & \text{pro} \quad -\frac{T_1}{2} < t \le -\frac{T_1}{4} \quad \text{a pro} \quad \frac{T_1}{4} < t \le \frac{T_1}{2} \end{cases}$$

Určete koeficienty jeho Fourierovy řady (FŘ) od c_{-2} do c_2. Pomůcka: $\text{sinc}(\frac{\pi}{2}) = 0.64$.

$c_k = \frac{D\tau}{T_1}\,\text{sinc}\left(\frac{\tau}{2}k\omega_1\right) = \frac{5 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-3}}{1 \cdot 10^{-3}} \cdot \text{sinc}(0{,}25 \cdot 10^{-3} k \cdot 2000\pi) = 2{,}5 \cdot \text{sinc}\left(k\frac{\pi}{2}\right)$



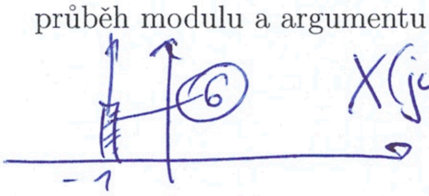
$c_{-2} = 0 \qquad c_{-1} = 1{,}6 \qquad c_0 = 2{,}5 \qquad c_1 = 1{,}6 \qquad c_2 = 0$

Příklad 2 Argumenty koeficientů FŘ pro periodický signál se spojitým časem $x(t)$ se základní kruhovou frekvencí $\omega_1 = 0.1\pi$ rad/s jsou pro $k = 0, 1, 2, 3$ tyto: $\arg c_{x0} = 0$, $\arg c_{x1} = 0$, $\arg c_{x2} = 0$, $\arg c_{x3} = \pi$. Signál byl v čase posunut: $y(t) = x(t-2)$. Napište hodnoty argumentů koeficientů FŘ posunutého signálu. Ve výsledcích můžete ponechat π.

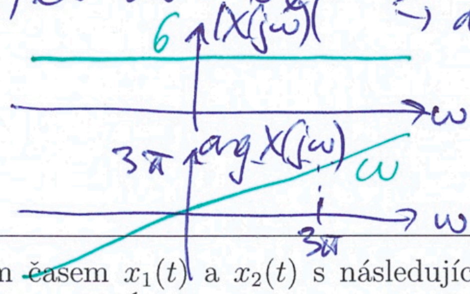
$\arg c_{yk} = \arg c_{xk} - k\omega_1\tau = \arg c_{xk} - k\,2 \cdot 0{,}1\pi =$
$= \arg c_{xk} - k\,0{,}2\pi$

$\arg c_{y0} = 0 \qquad \arg c_{y1} = -0{,}2\pi \qquad \arg c_{y2} = -0{,}4\pi \qquad \arg c_{y3} = \pi - 0{,}6\pi = 0{,}4\pi$

Příklad 3 Signál se spojitým časem je dán: $x(t) = 6\delta(t+1)$, kde $\delta(t)$ je Diracův impuls. Nakreslete průběh modulu a argumentu jeho spektrální funkce pro kruhové frekvence ω od -3π rad/s do 3π rad/s.



$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = 6e^{+j\omega}$ ⇒ modul = 6, argument = ω

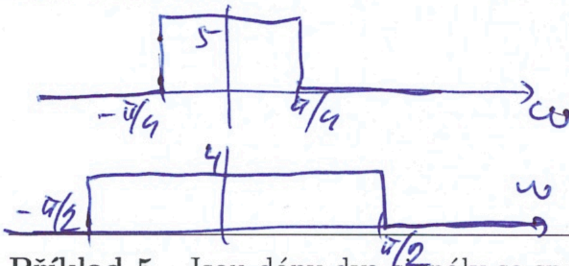


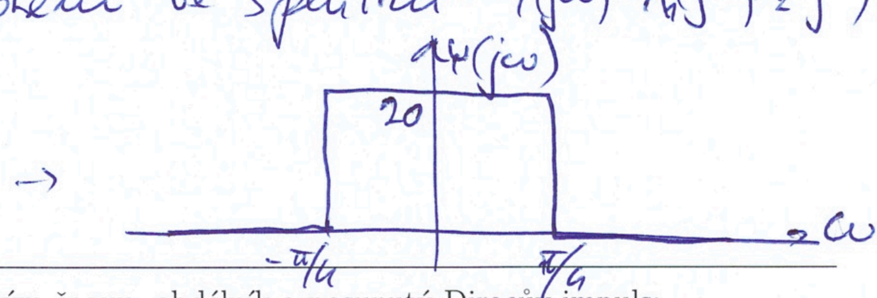
Příklad 4 Jsou dány signály se spojitým časem $x_1(t)$ a $x_2(t)$ s následujícími spektrálními funkcemi:

$$X_1(j\omega) = \begin{cases} 5 & \text{pro} \quad -\frac{\pi}{4} < \omega < \frac{\pi}{4} \\ 0 & \text{jinde} \end{cases} \qquad X_2(j\omega) = \begin{cases} 4 & \text{pro} \quad -\frac{\pi}{2} < \omega < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

Určete a nakreslete spektrální funkci $Y(j\omega)$ jejich konvoluce $y(t) = x_1(t) \star x_2(t)$.

konvoluce v čase ⇒ násobení ve spektru. $Y(j\omega) = X_1(j\omega) X_2(j\omega)$



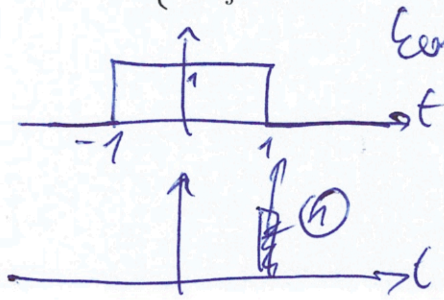


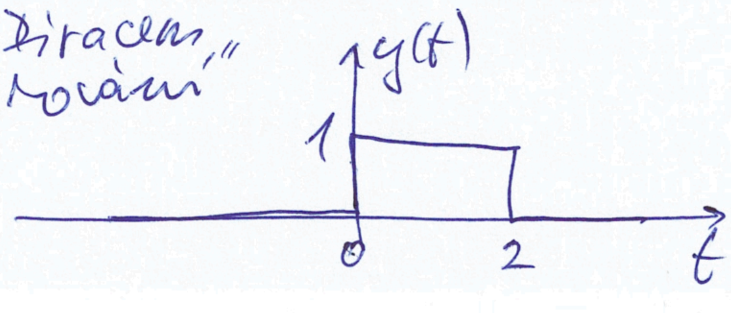
Příklad 5 Jsou dány dva signály se spojitým časem, obdélník a posunutý Diracův impuls:

$$x_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad -1 < t < 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases} \qquad x_2(t) = \delta(t-1).$$

Nakreslete jejich konvoluci $y(t) = x_1(t) \star x_2(t)$.

Konvoluce s Diracem „kopírování"



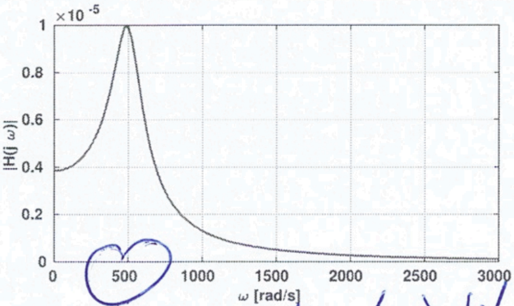


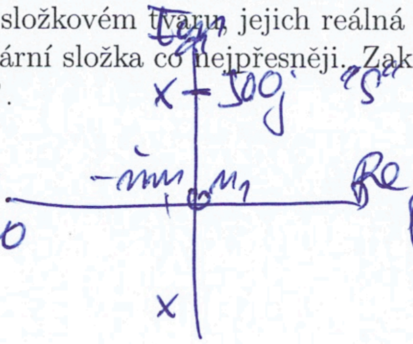
Příklad 6 Je zadána přenosová funkce systému se spojitým časem: $H(s) = \dfrac{s-1}{s^2-2s+1}$.
Popište tento systém diferenciální rovnicí.

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s-1}{s^2-2s+1} \qquad Y(s)(s^2-2s+1) = X(s)(s-1)$$

$$\frac{dy^2(t)}{dt^2} - 2\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \frac{dx(t)}{dt} - x(t)$$

Příklad 7 Na obrázku je průběh modulu frekvenční charakteristiky $H(j\omega)$ systému se spojitým časem. Víte, že systém má jeden nulový bod $n_1 = 0$ a dva komplexně sdružené póly $p_{1,2}$. Napište tyto póly ve složkovém tvaru, jejich reálná složka může být přibližně, imaginární složka co nejpřesněji. Zakreslete je do komplexní roviny "s".





ním ≈ něco malého

Póly musí být v levé části roviny, aby byl systém stabilní.

$p_1 =$ −ním + 500j $\quad p_2 =$ −ním − 500j

Příklad 8 Systém se spojitým časem je filtr typu dolní propusť, modul jeho přenosové funkce je dán:
$|H(j\omega)| = \begin{cases} 100 & \text{pro} \quad -16000\pi < \omega < 16000\pi \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$ a argument: $\arg H(j\omega) = -\frac{\omega}{10000}$.
Na vstupu je komplexní exponenciála $x(t) = 14e^{j4000\pi t}$. Napište výraz pro výstupní signál.

$H = 100 \cdot e^{-j\frac{4000\pi}{10000}}$ → projde

$y(t) = 14\, e^{j4000\pi t} \cdot 100 \cdot e^{-j0{,}4\pi} = 1400\, e^{-j0{,}4\pi} \cdot e^{j4000\pi t}$ nebo $1400\, e^{j(4000\pi t - 0{,}4\pi)}$

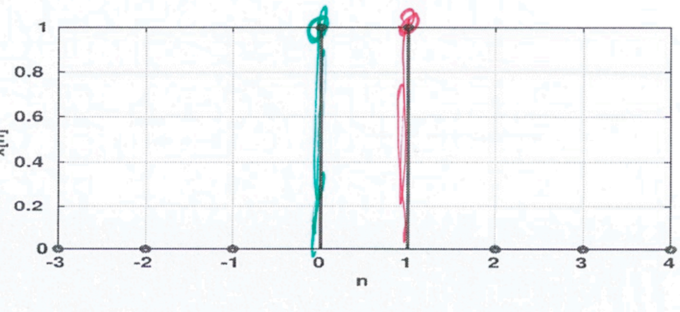
Příklad 9 Jaká bude mezní frekvence f_{max} (cut-off frequency) dolní propusti, která má fungovat jako anti-aliasingový filtr pro vzorkování na vzorkovací frekvenci $F_s = 48000$ Hz ? Frekvenci napište v Hertzích.

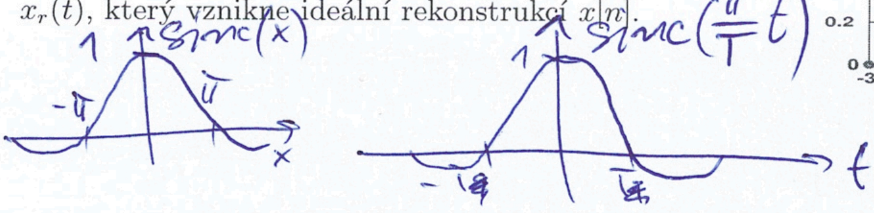
$f_{max} = F_s/2$

$f_{max} =$ 24000 Hz

$T = \frac{1}{F_s}$

Příklad 10 Diskrétní signál $x[n]$ vzorkovaný na $F_s = 8000$ Hz má pouze dva nenulové vzorky - viz obrázek. Napište výraz pro signál se spojitým časem $x_r(t)$, který vznikne ideální rekonstrukcí $x[n]$.





$x_r(t) =$ $\text{sinc}(8000\pi t) + \text{sinc}\left(8000\pi\left(t - \frac{1}{8000}\right)\right)$

A

Příklad 11 V tabulce jsou dány dva diskrétní signály o délce $N = 4$. Vypočtěte a zapište jejich lineární konvoluci $y[n] = x_1[n] \star x_2[n]$.

n	0	1	2	3	4	5	6
$x_1[n]$	1	-3	2	5			
$x_2[n]$	2	2	1	-1			
$y[n]$	2	-4	-1	10	15	3	-5

Příklad 12 Pro signály $x_1[n]$ a $x_2[n]$ z předcházejícího příkladu vypočtěte a zapište jejich kruhovou konvoluci $y[n] = x_1[n] \circledN x_2[n]$.

$y[n] = 17 \quad -1 \quad -6 \quad 10$

Příklad 13 Diskrétní signál $x[n]$ je reálný, hodnotu jeho Fourierovy transformace s diskrétním časem (DTFT) známe pouze na normované kruhové frekvenci $\omega_1 = \frac{\pi}{8}$ rad: $\tilde{X}(e^{j\omega_1}) = 4 - 5j$. Určete hodnotu DTFT na normované kruhové frekvenci $\omega_2 = \frac{5\pi}{8}$ rad. Pokud to nejde, jasně to napište.

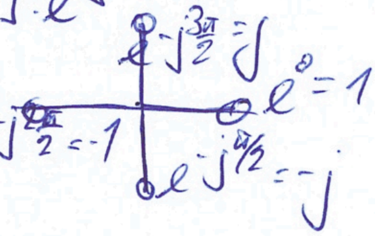
$X(e^{j\omega_1}) = X^*(e^{j(2\pi - \omega_1)})$ $\qquad 2\pi - \frac{\pi}{8} = \frac{15}{8}\pi \neq \frac{5}{8}\pi$

$\tilde{X}(e^{j\omega_2}) =$ nejde

Příklad 14 Je dán signál s diskrétním časem o délce $N = 8$, vzorky $x[0] \dots x[7]$ jsou 1, -1, 1, -1, 1, -1, 1, -1.
Vypočtěte druhý koeficient jeho Diskrétní Fourierovy transformace (DFT).

$X[k] = \sum x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$ $\qquad X[2] = \sum x[n] \cdot e^{-j\frac{2\pi}{8}2n} =$

$= \sum x[n] \cdot e^{-jn\pi/2}$



$x[n]$	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1
$e^{-jn\pi/2}$	1	$-j$	-1	j	1	$-j$	-1	j

$X[2] =$ 0

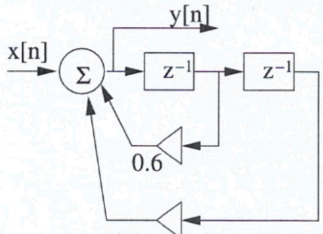
Příklad 15 DFT diskrétního signálu $x[n]$ o délce $N = 8$ se vzorky $x[0] \dots x[7]$: 1, 0, 5, 0, -1, 0, 1, 0 je $X[k]$. DFT diskrétního signálu $y[n]$ o stejné délce je dána: $Y[k] = X[k]e^{-j\frac{2\pi}{8}k2}$. Napište signál $y[n]$.

pokud je $Y[k] = X[k] e^{-j\frac{2\pi}{N}km}$, pak došlo ke kruhovému zpoždění signálu o m vzorků

o dva!

$y[n] = 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 5 \quad 0 \quad -1 \quad 0$

Příklad 16 Podle schématu číslicového filtru napište jeho přenosovou funkci.



$$y[n] = x[n] + 0{,}6\,y[n-1] + 0{,}3\,y[n-2] \Big\}\ \mathcal{Z}$$

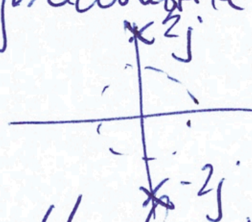
$$Y(z)\left[1 - 0{,}6z^{-1} - 0{,}3z^{-2}\right] = X(z) \qquad H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$H(z) = \frac{1}{1 - 0{,}6z^{-1} - 0{,}3z^{-2}}$$

Příklad 17 Číslicový filtr IIR má přenosovou funkci $H(z) = \dfrac{1}{1+4z^{-2}}$. $= \dfrac{z^2}{z^2+4}$

Určete, zda je tento filtr stabilní, je nutné krátké zdůvodnění, ne pouze odpověď ano/ne.

hledáme póly jmenovatele

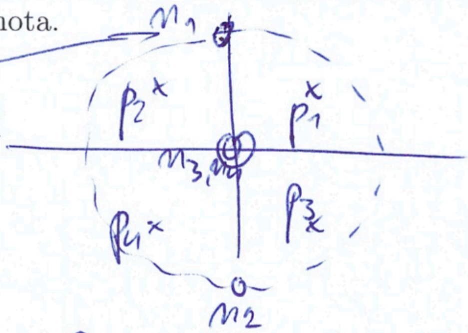


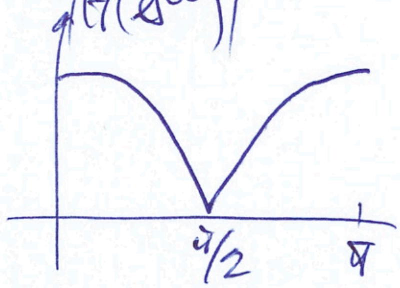
$$p_{1/2} = \frac{-0 \pm \sqrt{0 - 4\cdot 4}}{2} = \pm\frac{\sqrt{-16}}{2} = \pm 2j$$

póly mimo jednot. kružnici ⇒ nestabilní!

Příklad 18 Číslicový filtr typu pásmová zádrž má 4 nulové body: $n_1 = e^{j0.5\pi}$, $n_2 = e^{-j0.5\pi}$, $n_3 = n_4 = 0$, a 4 póly: $p_1 = 0.7e^{j0.25\pi}$, $p_2 = 0.7e^{j0.75\pi}$, $p_3 = p_1^\star$, $p_4 = p_2^\star$ (hvězdička značí komplexní sdružení). Určete, na jaké normované kruhové frekvenci ω_{min} bude ležet minimum modulu jeho frekvenční charakteristiky a jaká zde bude její hodnota.

nula způsobí, že na této frekvenci bude $|H| = 0$.





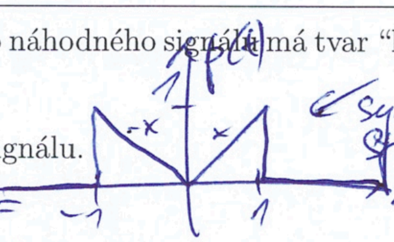
$\omega_{min} = \dfrac{\pi}{2}$ rad, $H(e^{j\omega_{min}}) = 0$

Příklad 19 Funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti stacionárního náhodného signálu má tvar "kočičích uší":

stř. hodnota $a = 0$

$$p(x) = \begin{cases} -x & \text{pro } -1 < x \le 0 \\ x & \text{pro } 0 < x \le 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

Určete rozptyl (varianci) tohoto signálu.

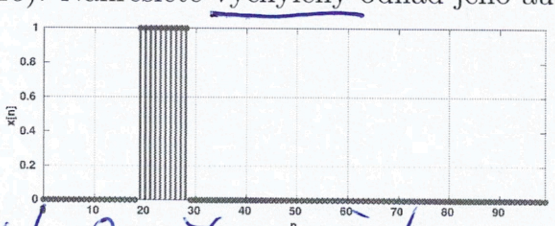


← symetrická, spočítám jen $\int_0^1$

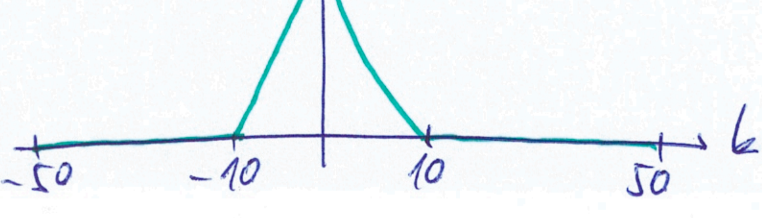
$$D = \int_{-\infty}^{\infty} p(x)(x-a)^2\,dx = 2\int_0^1 x(x-0)^2\,dx = 2\int_0^1 x^3\,dx = 2\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^1 = 2\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$D = \dfrac{1}{2}$

Příklad 20 Na obrázku je průběh náhodného signálu $x[n]$ o délce $N = 100$ vzorků (nenulových vzorků je 10). Nakreslete vychýlený odhad jeho autokorelačních koeficientů $R[k]$ pro k od -50 do +50.



$$R[k] = \frac{1}{N}\sum x[n]\,x[n+k] = \frac{1}{100}\sum x[n]\,x[n+k]$$



při $k=0$ překryv všech vzorků, dále postupně „ubývají"

Semestrální zkouška ISS/VSG, 1. opravný termín, 26.1.2022, skupina B

Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: ....
(čitelně!)

Příklad 1 Periodický signál se spojitým časem má periodu $T_1 = 1$ ms. Jedna jeho perioda je dána jako:
$$x(t) = \begin{cases} 10 & \text{pro} \quad -\frac{T_1}{4} < t \leq \frac{T_1}{4} \\ 0 & \text{pro} \quad -\frac{T_1}{2} < t \leq -\frac{T_1}{4} \quad \text{a pro} \quad \frac{T_1}{4} < t \leq \frac{T_1}{2} \end{cases}$$

Viz A

Určete koeficienty jeho Fourierovy řady (FŘ) od c_{-2} do c_2. Pomůcka: $\text{sinc}(\frac{\pi}{2}) = 0.64$.

$c_k = 5 \,\text{sinc}\left(k\frac{\pi}{2}\right)$

$c_{-2} =$ 0 $\quad c_{-1} =$ 3,2 $\quad c_0 =$ 5 $\quad c_1 =$ 3,2 $\quad c_2 =$ 0

Příklad 2 Argumenty koeficientů FŘ pro periodický signál se spojitým časem $x(t)$ se základní kruhovou frekvencí $\omega_1 = 0.1\pi$ rad/s jsou pro $k = 0, 1, 2, 3$ tyto: $\arg c_{x0} = 0$, $\arg c_{x1} = 0$, $\arg c_{x2} = 0$, $\arg c_{x3} = \pi$. Signál byl v čase posunut: $y(t) = x(t-2)$. Napište hodnoty argumentů koeficientů FŘ posunutého signálu. Ve výsledcích můžete ponechat π.

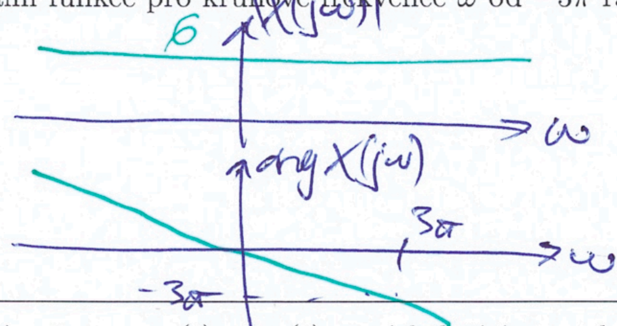
Viz A

$\arg c_{y0} =$ $\quad \arg c_{y1} =$ $\quad \arg c_{y2} =$ $\quad \arg c_{y3} =$

Příklad 3 Signál se spojitým časem je dán: $x(t) = 6\delta(t-1)$, kde $\delta(t)$ je Diracův impuls. Nakreslete průběh modulu a argumentu jeho spektrální funkce pro kruhové frekvence ω od -3π rad/s do 3π rad/s.

Viz A

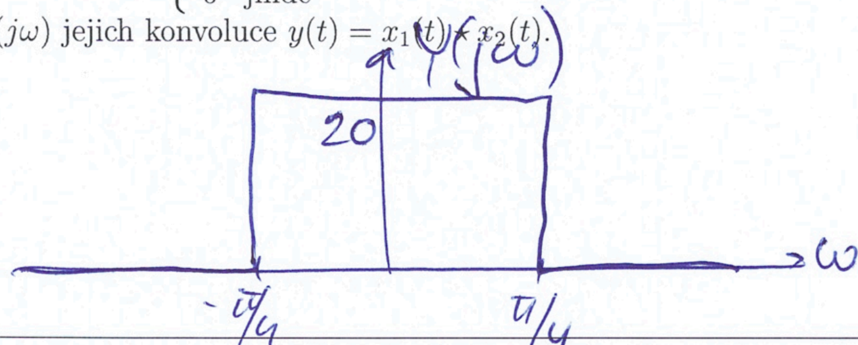
$X(j\omega) = 6e^{-j\omega}$



Příklad 4 Jsou dány signály se spojitým časem $x_1(t)$ a $x_2(t)$ s následujícími spektrálními funkcemi:
$$X_1(j\omega) = \begin{cases} 5 & \text{pro} \quad -\frac{\pi}{4} < \omega < \frac{\pi}{4} \\ 0 & \text{jinde} \end{cases} \qquad X_2(j\omega) = \begin{cases} 4 & \text{pro} \quad -\frac{\pi}{3} < \omega < \frac{\pi}{3} \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$
Určete a nakreslete spektrální funkci $Y(j\omega)$ jejich konvoluce $y(t) = x_1(t) \star x_2(t)$.

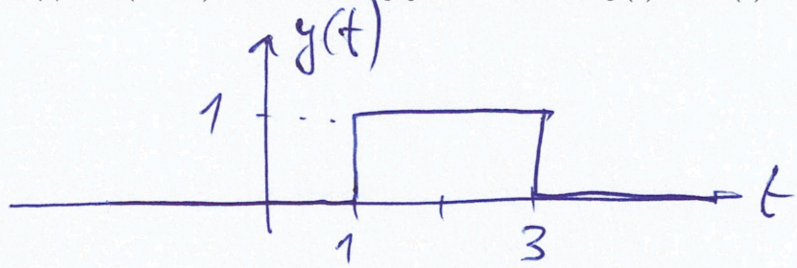
Viz A

$\frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{3}$



Příklad 5 Jsou dány dva signály se spojitým časem, obdélník a posunutý Diracův impuls:
$$x_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad -1 < t < 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases} \qquad x_2(t) = \delta(t-2).$$
Nakreslete jejich konvoluci $y(t) = x_1(t) \star x_2(t)$.

Viz A



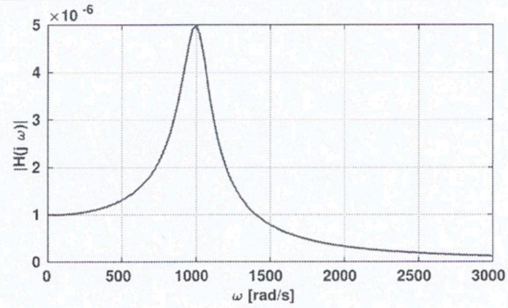
B

Příklad 6 Je zadána přenosová funkce systému se spojitým časem: $H(s) = \dfrac{s+1}{s^2 - 2s + 1}$.
Popište tento systém diferenciální rovnicí.

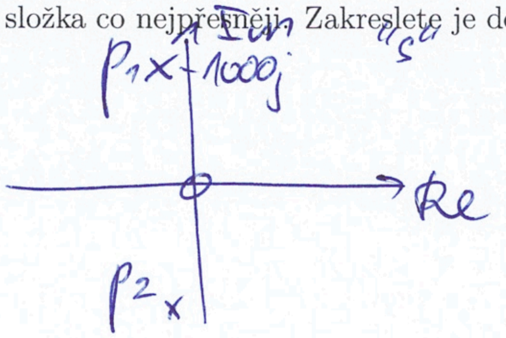
viz A

$$\frac{dy^2(t)}{dt^2} - 2\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + x(t)$$

Příklad 7 Na obrázku je průběh modulu frekvenční charakteristiky $H(j\omega)$ systému se spojitým časem. Víte, že systém má jeden nulový bod $n_1 = 0$ a dva komplexně sdružené póly $p_{1,2}$. Napište tyto póly ve složkovém tvaru, jejich reálná složka může být přibližně, imaginární složka co nejpřesněji. Zakreslete je do komplexní roviny "s".



viz A



$p_1 =$ −mm + 1000j $p_2 =$ −mm − 1000j

Příklad 8 Systém se spojitým časem je filtr typu dolní propust, modul jeho přenosové funkce je dán:
$|H(j\omega)| = \begin{cases} 100 & \text{pro} \quad -16000\pi < \omega < 16000\pi \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$ a argument: $\arg H(j\omega) = -\frac{\omega}{10000}$.
Na vstupu je komplexní exponenciála $x(t) = 15e^{j7000\pi t}$. Napište výraz pro výstupní signál.

projde

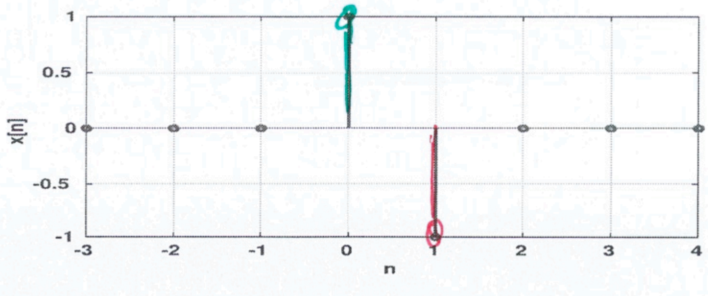
viz A

$y(t) =$ $1500 e^{-j0{,}7\pi} e^{j7000\pi t}$ nebo $1500 e^{j(7000\pi t - 0{,}7\pi)}$

Příklad 9 Jaká bude mezní frekvence f_{max} (cut-off frequency) dolní propusti, která má fungovat jako anti-aliasingový filtr pro vzorkování na vzorkovací frekvenci $F_s = 44100$ Hz ? Frekvenci napište v Hertzích.

$f_{max} =$ 22050 Hz

Příklad 10 Diskrétní signál $x[n]$ vzorkovaný na $F_s = 8000$ Hz má pouze dva nenulové vzorky - viz obrázek. Napište výraz pro signál se spojitým časem $x_r(t)$, který vznikne ideální rekonstrukcí $x[n]$.



viz A

$x_r(t) =$ $\text{sinc}(8000\pi t) - \text{sinc}\left(8000\pi\left(t - \frac{1}{8000}\right)\right)$

B

Příklad 11 V tabulce jsou dány dva diskrétní signály o délce $N = 4$. Vypočtěte a zapište jejich lineární konvoluci $y[n] = x_1[n] \star x_2[n]$.

n	0	1	2	3	4	5	6
$x_1[n]$	1	-3	2	5			
$x_2[n]$	2	1	1	-1			
$y[n]$	2	-5	2	8	10	3	-5

Příklad 12 Pro signály $x_1[n]$ a $x_2[n]$ z předcházejícího příkladu vypočtěte a zapište jejich kruhovou konvoluci $y[n] = x_1[n] ⓝ x_2[n]$.

$y[n] =$ 12 -2 -3 8

Příklad 13 Diskrétní signál $x[n]$ je reálný, hodnotu jeho Fourierovy transformace s diskrétním časem (DTFT) známe pouze na normované kruhové frekvenci $\omega_1 = \frac{\pi}{8}$ rad: $\tilde{X}(e^{j\omega_1}) = 4 + 3j$. Určete hodnotu DTFT na normované kruhové frekvenci $\omega_2 = \frac{5\pi}{8}$ rad. Pokud to nejde, jasně to napište.

viz A

$\tilde{X}(e^{j\omega_2}) =$ nejde

Příklad 14 Je dán signál s diskrétním časem o délce $N = 8$, vzorky $x[0] \dots x[7]$ jsou 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1.
Vypočtěte druhý koeficient jeho Diskrétní Fourierovy transformace (DFT).

viz A

$x[n]$	0	1	0	1	0	1	0	1
$e^{-jn\pi/2}$	1	j	-1	j	1	j	-1	j

$X[2] =$ 0

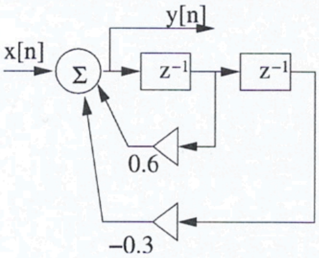
Příklad 15 DFT diskrétního signálu $x[n]$ o délce $N = 8$ se vzorky $x[0] \dots x[7]$: 1, 0, 5, 0, -1, 0, 1, 0 je $X[k]$. DFT diskrétního signálu $y[n]$, o stejné délce je dána: $Y[k] = X[k]e^{-j\frac{2\pi}{8}k3}$. Napište signál $y[n]$.

viz A, kruh. zpoždění o 3 vzorky

$y[n] =$ 0 1 0 1 0 5 0 -1

B

Příklad 16 Podle schématu číslicového filtru napište jeho přenosovou funkci.

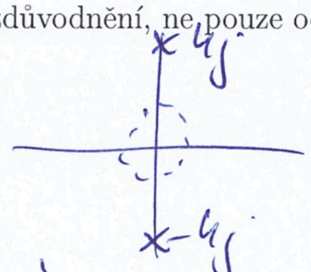


viz A

$H(z) = \dfrac{1}{1 - 0{,}6z^{-1} + 0{,}3z^{-2}}$

Příklad 17 Číslicový filtr IIR má přenosovou funkci $H(z) = \dfrac{1}{1 + 16z^{-2}}$.
Určete, zda je tento filtr stabilní, je nutné krátké zdůvodnění, ne pouze odpověď ano/ne.

viz A $p_{1/2} = \pm 4j$



póly mimo jednotk. kružnici ⇒ nestabilní

Příklad 18 Číslicový filtr typu pásmová zádrž má 4 nulové body: $n_1 = e^{j0.5\pi}$, $n_2 = e^{-j0.5\pi}$, $n_3 = n_4 = 0$, a 4 póly: $p_1 = 0.7e^{j0.25\pi}$, $p_2 = 0.7e^{j0.75\pi}$, $p_3 = p_1^\star$, $p_4 = p_2^\star$ (hvězdička značí komplexní sdružení). Určete, na jaké normované kruhové frekvenci ω_{min} bude ležet minimum modulu jeho frekvenční charakteristiky a jaká zde bude její hodnota.

viz A

$\omega_{min} = \pi/2$ rad, $H(e^{j\omega_{min}}) = 0$

Příklad 19 Funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti stacionárního náhodného signálu má tvar "kočičích uší":

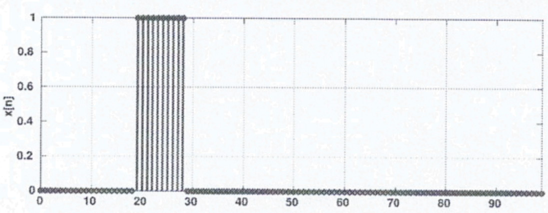
$$p(x) = \begin{cases} -x & \text{pro } -1 < x \leq 0 \\ x & \text{pro } 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

Určete rozptyl (varianci) tohoto signálu.

viz A

$D = 1/2$

Příklad 20 Na obrázku je průběh náhodného signálu $x[n]$ o délce $N = 100$ vzorků (nenulových vzorků je 10). Nakreslete vychýlený odhad jeho autokorelačních koeficientů $R[k]$ pro k od -50 do +50.



viz A

Semestrální zkouška ISS/VSG, 1. opravný termín, 26.1.2022, skupina C

Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: ....
(čitelně!)

Příklad 1 Periodický signál se spojitým časem má periodu $T_1 = 1$ ms. Jedna jeho perioda je dána jako:

$$x(t) = \begin{cases} 15 & \text{pro} \quad -\frac{T_1}{4} < t \le \frac{T_1}{4} \\ 0 & \text{pro} \quad -\frac{T_1}{2} < t \le -\frac{T_1}{4} \quad \text{a pro} \quad \frac{T_1}{4} < t \le \frac{T_1}{2} \end{cases}$$

viz A

Určete koeficienty jeho Fourierovy řady (FŘ) od c_{-2} do c_2. Pomůcka: $\text{sinc}(\frac{\pi}{2}) = 0.64$.

$c_k = 7,5 \, \text{sinc}\left(k\frac{\pi}{2}\right)$

$c_{-2} =$ 0 $\quad c_{-1} =$ 4,8 $\quad c_0 =$ 7,5 $\quad c_1 =$ 4,8 $\quad c_2 =$ 0

Příklad 2 Argumenty koeficientů FŘ pro periodický signál se spojitým časem $x(t)$ se základní kruhovou frekvencí $\omega_1 = 0.1\pi$ rad/s jsou pro $k = 0, 1, 2, 3$ tyto: $\arg c_{x0} = 0$, $\arg c_{x1} = 0$, $\arg c_{x2} = 0$, $\arg c_{x3} = \pi$. Signál byl v čase posunut: $y(t) = x(t+2)$. Napište hodnoty argumentů koeficientů FŘ posunutého signálu. Ve výsledcích můžete ponechat π.

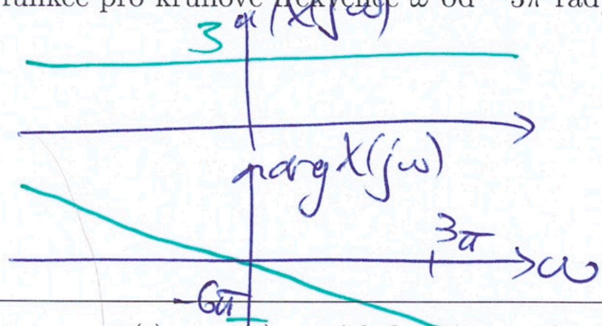
$\arg c_{y,k} = \arg c_{xk} + k\omega_1\tau = \arg c_{xk} + k \, 2 \cdot 0{,}1\pi =$
$= \arg c_{xk} + k \cdot 0{,}2\pi$

$\arg c_{y0} =$ 0 $\quad \arg c_{y1} =$ $0{,}2\pi$ $\quad \arg c_{y2} =$ $0{,}4\pi$ $\quad \arg c_{y3} =$ $\pi + 0{,}6\pi = 1{,}6\pi$

Příklad 3 Signál se spojitým časem je dán: $x(t) = 3\delta(t-2)$, kde $\delta(t)$ je Diracův impuls. Nakreslete průběh modulu a argumentu jeho spektrální funkce pro kruhové frekvence ω od -3π rad/s do 3π rad/s.

viz A

$X(j\omega) = 3e^{-j2\omega}$



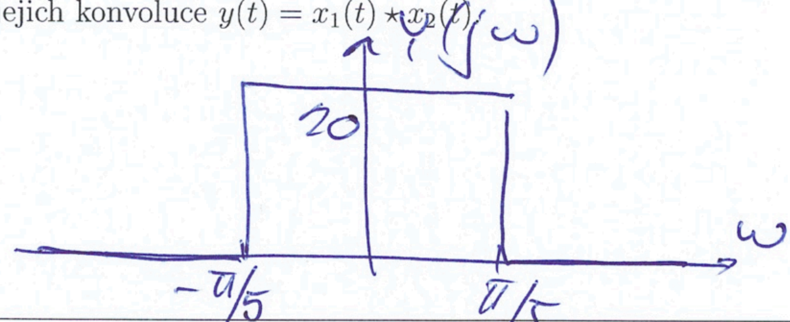
Příklad 4 Jsou dány signály se spojitým časem $x_1(t)$ a $x_2(t)$ s následujícími spektrálními funkcemi:

$$X_1(j\omega) = \begin{cases} 5 & \text{pro} \quad -\frac{\pi}{4} < \omega < \frac{\pi}{4} \\ 0 & \text{jinde} \end{cases} \qquad X_2(j\omega) = \begin{cases} 4 & \text{pro} \quad -\frac{\pi}{5} < \omega < \frac{\pi}{5} \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

Určete a nakreslete spektrální funkci $Y(j\omega)$ jejich konvoluce $y(t) = x_1(t) \star x_2(t)$.

viz A

$\frac{\pi}{5} < \frac{\pi}{4}$

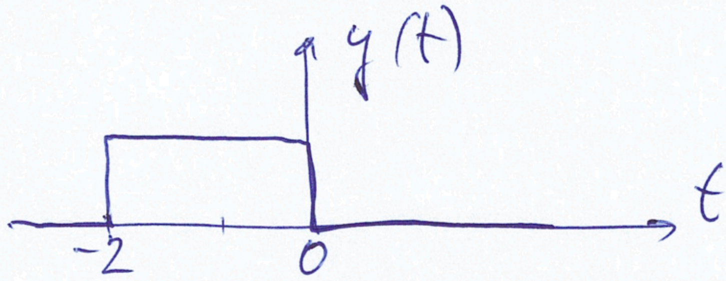


Příklad 5 Jsou dány dva signály se spojitým časem, obdélník a posunutý Diracův impuls:

$$x_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad -1 < t < 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases} \qquad x_2(t) = \delta(t+1).$$

Nakreslete jejich konvoluci $y(t) = x_1(t) \star x_2(t)$.

viz A



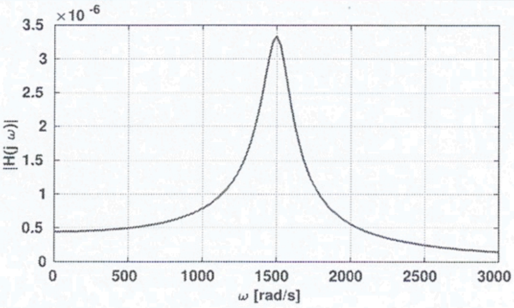
C

Příklad 6 Je zadána přenosová funkce systému se spojitým časem: $H(s) = \dfrac{s-1}{s^2+2s+1}$.
Popište tento systém diferenciální rovnicí.

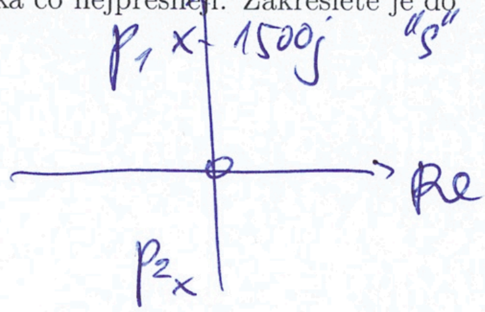
viz A

$$\frac{dy^2(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \frac{dx(t)}{dt} - x(t)$$

Příklad 7 Na obrázku je průběh modulu frekvenční charakteristiky $H(j\omega)$ systému se spojitým časem. Víte, že systém má jeden nulový bod $n_1 = 0$ a dva komplexně sdružené póly $p_{1,2}$. Napište tyto póly ve složkovém tvaru, jejich reálná složka může být přibližně, imaginární složka co nejpřesněji. Zakreslete je do komplexní roviny "s".



viz A



$p_1 =$ −㎛ + 1500j $p_2 =$ −㎛ − 1500j

Příklad 8 Systém se spojitým časem je filtr typu dolní propust, modul jeho přenosové funkce je dán:
$|H(j\omega)| = \begin{cases} 100 & \text{pro} \quad -16000\pi < \omega < \underline{16000\pi} \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$ a argument: $\arg H(j\omega) = -\frac{\omega}{10000}$.
Na vstupu je komplexní exponenciála $x(t) = 16e^{j\underline{17000\pi t}}$ Napište výraz pro výstupní signál.

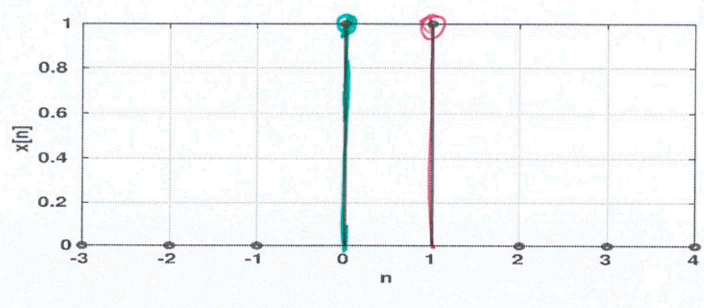
neprojde

$y(t) =$ 0

Příklad 9 Jaká bude mezní frekvence f_{max} (cut-off frequency) dolní propusti, která má fungovat jako anti-aliasingový filtr pro vzorkování na vzorkovací frekvenci $F_s = 16000$ Hz ? Frekvenci napište v Hertzích.

$f_{max} =$ 8000 Hz

Příklad 10 Diskrétní signál $x[n]$ vzorkovaný na $F_s = 8000$ Hz má pouze dva nenulové vzorky - viz obrázek. Napište výraz pro signál se spojitým časem $x_r(t)$, který vznikne ideální rekonstrukcí $x[n]$.



viz A

$x_r(t) =$

C

Příklad 11 V tabulce jsou dány dva diskrétní signály o délce $N = 4$. Vypočtěte a zapište jejich lineární konvoluci $y[n] = x_1[n] \star x_2[n]$.

n	0	1	2	3	4	5	6
$x_1[n]$	1	-3	2	5			
$x_2[n]$	2	-1	1	-1			
$y[n]$	2	-7	8	4	0	3	-5

Příklad 12 Pro signály $x_1[n]$ a $x_2[n]$ z předcházejícího příkladu vypočtěte a zapište jejich kruhovou konvoluci $y[n] = x_1[n] \circledN x_2[n]$.

$y[n] = 2 \quad -4 \quad 3 \quad 4$

Příklad 13 Diskrétní signál $x[n]$ je reálný, hodnotu jeho Fourierovy transformace s diskrétním časem (DTFT) známe pouze na normované kruhové frekvenci $\omega_1 = \frac{\pi}{8}$ rad: $\tilde{X}(e^{j\omega_1}) = 5 - 2j$. Určete hodnotu DTFT na normované kruhové frekvenci $\omega_2 = \frac{5\pi}{8}$ rad. Pokud to nejde, jasně to napište.

viz A

$\tilde{X}(e^{j\omega_2}) =$ nejde

Příklad 14 Je dán signál s diskrétním časem o délce $N = 8$, vzorky $x[0] \dots x[7]$ jsou -1, 0, 1, 0, -1, 0, 1, 0. Vypočtěte druhý koeficient jeho Diskrétní Fourierovy transformace (DFT).

viz A

$x[n]$	-1	0	1	0	-1	0	1	0
$e^{-j n \pi/2}$	1	$-j$	-1	j	1	$-j$	-1	j

$X[2] = -4$

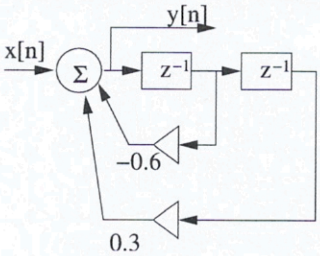
Příklad 15 DFT diskrétního signálu $x[n]$ o délce $N = 8$ se vzorky $x[0] \dots x[7]$: 1, 0, 5, 0, -1, 0, 1, 0 je $X[k]$. DFT diskrétního signálu $y[n]$ o stejné délce je dána: $Y[k] = X[k]e^{+j\frac{2\pi}{8}k2}$. Napište signál $y[n]$.

viz A, kruh. předběhnutí o 2 vzorky

$y[n] = 5 \quad 0 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0$

C

Příklad 16 Podle schématu číslicového filtru napište jeho přenosovou funkci.



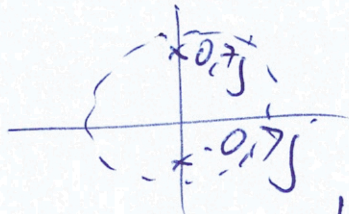
viz A

$H(z) = \dfrac{1}{1 + 0{,}6z^{-1} - 0{,}3z^{-2}}$

Příklad 17 Číslicový filtr IIR má přenosovou funkci $H(z) = \dfrac{1}{1 + 0.49z^{-2}}$.
Určete, zda je tento filtr stabilní, je nutné krátké zdůvodnění, ne pouze odpověď ano/ne.

viz A

$p_{1/2} = \pm j\,0{,}7$



póly uvnitř jednotk. kružnice ⇒ stabilní

Příklad 18 Číslicový filtr typu pásmová zádrž má 4 nulové body: $n_1 = e^{j0.5\pi}$, $n_2 = e^{-j0.5\pi}$, $n_3 = n_4 = 0$, a 4 póly: $p_1 = 0.7e^{j0.25\pi}$, $p_2 = 0.7e^{j0.75\pi}$, $p_3 = p_1^\star$, $p_4 = p_2^\star$ (hvězdička značí komplexní sdružení). Určete, na jaké normované kruhové frekvenci ω_{min} bude ležet minimum modulu jeho frekvenční charakteristiky a jaká zde bude její hodnota.

viz A

$\omega_{min} = \pi/2$ rad, $H(e^{j\omega_{min}}) = 0$

Příklad 19 Funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti stacionárního náhodného signálu má tvar "kočičích uší":

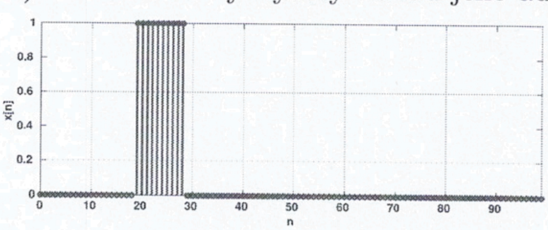
$$p(x) = \begin{cases} -x & \text{pro } \; -1 < x \leq 0 \\ x & \text{pro } \; 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

Určete rozptyl (varianci) tohoto signálu.

viz A

$D = 1/2$

Příklad 20 Na obrázku je průběh náhodného signálu $x[n]$ o délce $N = 100$ vzorků (nenulových vzorků je 10). Nakreslete vychýlený odhad jeho autokorelačních koeficientů $R[k]$ pro k od -50 do +50.



viz A

Semestrální zkouška ISS/VSG, 1. opravný termín, 26.1.2022, skupina D

Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: ....
(čitelně!)

Příklad 1 Periodický signál se spojitým časem má periodu $T_1 = 1$ ms. Jedna jeho perioda je dána jako:
$x(t) = \begin{cases} 50 & \text{pro} \quad -\frac{T_1}{4} < t \leq \frac{T_1}{4} \\ 0 & \text{pro} \quad -\frac{T_1}{2} < t \leq -\frac{T_1}{4} \quad \text{a pro} \quad \frac{T_1}{4} < t \leq \frac{T_1}{2} \end{cases}$ viz A

Určete koeficienty jeho Fourierovy řady (FŘ) od c_{-2} do c_2. Pomůcka: $\text{sinc}(\frac{\pi}{2}) = 0.64$.

$c_k = 25 \, \text{sinc}(k\frac{\pi}{2})$

$c_{-2} =$ 0 $\quad c_{-1} =$ 16 $\quad c_0 =$ 25 $\quad c_1 =$ 16 $\quad c_2 =$ 0

Příklad 2 Argumenty koeficientů FŘ pro periodický signál se spojitým časem $x(t)$ se základní kruhovou frekvencí $\omega_1 = 0.1\pi$ rad/s jsou pro $k = 0, 1, 2, 3$ tyto: $\arg c_{x0} = 0$, $\arg c_{x1} = 0$, $\arg c_{x2} = 0$, $\arg c_{x3} = \pi$. Signál byl v čase posunut: $y(t) = x(t+2)$. Napište hodnoty argumentů koeficientů FŘ posunutého signálu. Ve výsledcích můžete ponechat π.

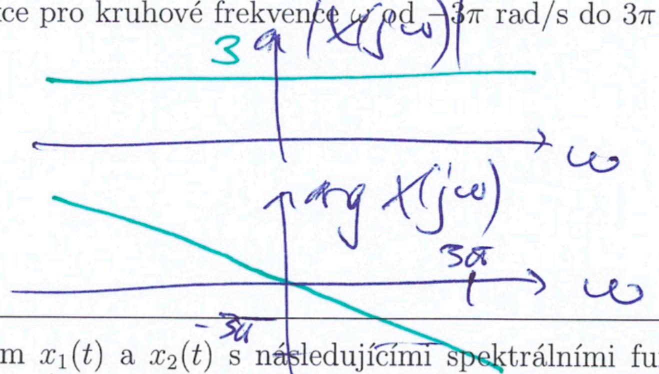
viz C

$\arg c_{y0} =$ $\quad \arg c_{y1} =$ $\quad \arg c_{y2} =$ $\quad \arg c_{y3} =$

Příklad 3 Signál se spojitým časem je dán: $x(t) = 3\delta(t-1)$, kde $\delta(t)$ je Diracův impuls. Nakreslete průběh modulu a argumentu jeho spektrální funkce pro kruhové frekvence ω od -3π rad/s do 3π rad/s.

viz A

$X(j\omega) = 3e^{-j\omega}$

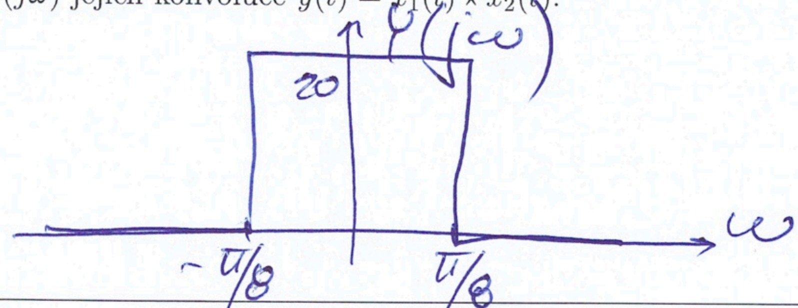


Příklad 4 Jsou dány signály se spojitým časem $x_1(t)$ a $x_2(t)$ s následujícími spektrálními funkcemi:
$X_1(j\omega) = \begin{cases} 5 & \text{pro} \quad -\frac{\pi}{4} < \omega < \frac{\pi}{4} \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$ $\qquad X_2(j\omega) = \begin{cases} 4 & \text{pro} \quad -\frac{\pi}{8} < \omega < \frac{\pi}{8} \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

Určete a nakreslete spektrální funkci $Y(j\omega)$ jejich konvoluce $y(t) = x_1(t) \star x_2(t)$.

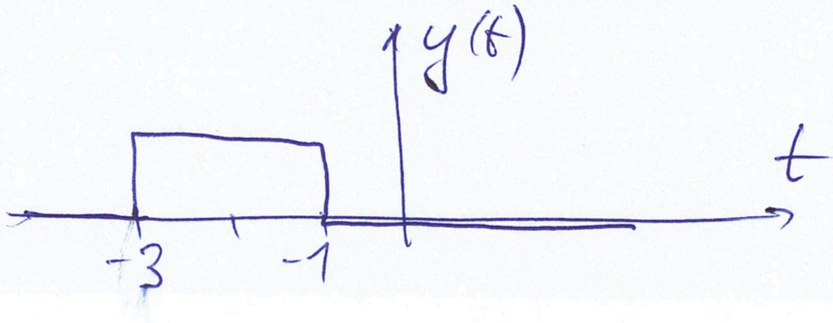
viz A

$\frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{4}$



Příklad 5 Jsou dány dva signály se spojitým časem, obdélník a posunutý Diracův impuls:
$x_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro} \quad -1 < t < 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$ $\qquad x_2(t) = \delta(t+2)$. Nakreslete jejich konvoluci $y(t) = x_1(t) \star x_2(t)$.

viz A



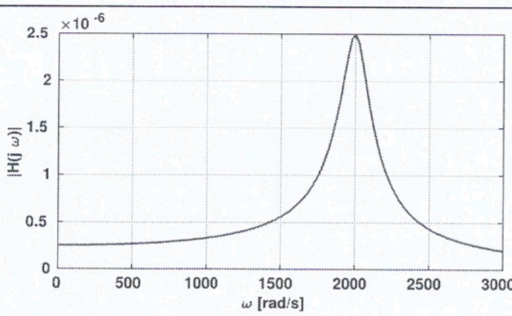
D

Příklad 6 Je zadána přenosová funkce systému se spojitým časem: $H(s) = \dfrac{s+1}{s^2+2s+1}$. Popište tento systém diferenciální rovnicí.

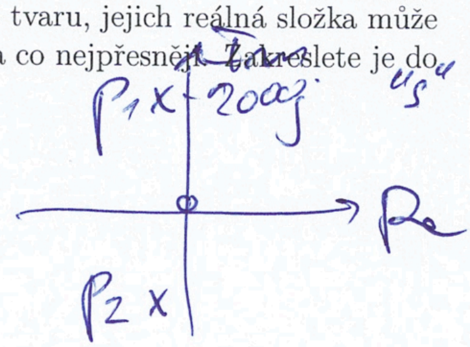
viz A

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \frac{dx(t)}{dt} + x(t)$$

Příklad 7 Na obrázku je průběh modulu frekvenční charakteristiky $H(j\omega)$ systému se spojitým časem. Víte, že systém má jeden nulový bod $n_1 = 0$ a dva komplexně sdružené póly $p_{1,2}$. Napište tyto póly ve složkovém tvaru, jejich reálná složka může být přibližně, imaginární složka co nejpřesněji. Zakreslete je do komplexní roviny "s".



viz A



$p_1 =$ -nim + 2000j $p_2 =$ -nim - 2000j

Příklad 8 Systém se spojitým časem je filtr typu dolní propusť, modul jeho přenosové funkce je dán: $|H(j\omega)| = \begin{cases} 100 & \text{pro} \quad -16000\pi < \omega < 16000\pi \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$ a argument: $\arg H(j\omega) = -\frac{\omega}{10000}$.
Na vstupu je komplexní exponenciála $x(t) = 17e^{j20000\pi t}$. Napište výraz pro výstupní signál.

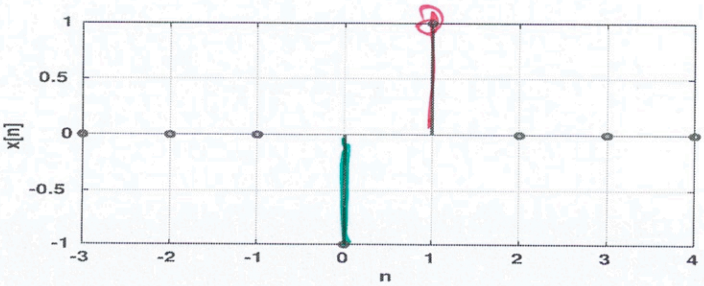
neprojde

$y(t) =$ 0

Příklad 9 Jaká bude mezní frekvence f_{max} (cut-off frequency) dolní propusti, která má fungovat jako anti-aliasingový filtr pro vzorkování na vzorkovací frekvenci $F_s = 8000$ Hz ? Frekvenci napište v Hertzích.

$f_{max} =$ 4000 Hz

Příklad 10 Diskrétní signál $x[n]$ vzorkovaný na $F_s = 8000$ Hz má pouze dva nenulové vzorky - viz obrázek. Napište výraz pro signál se spojitým časem $x_r(t)$, který vznikne ideální rekonstrukcí $x[n]$.



$x_r(t) = -\mathrm{sinc}(8000\pi t) + \mathrm{sinc}\left(8000\pi\left(t - \frac{1}{8000}\right)\right)$

Příklad 11 V tabulce jsou dány dva diskrétní signály o délce $N = 4$. Vypočtěte a zapište jejich lineární konvoluci $y[n] = x_1[n] \star x_2[n]$.

n	0	1	2	3			
$x_1[n]$	1	-3	2	5			
$x_2[n]$	2	0	1	-1			
$y[n]$	2	-6	5	6	5	3	-5

Příklad 12 Pro signály $x_1[n]$ a $x_2[n]$ z předcházejícího příkladu vypočtěte a zapište jejich kruhovou konvoluci $y[n] = x_1[n] \circledN x_2[n]$.

$y[n] = 7 \quad -3 \quad 0 \quad 6$

Příklad 13 Diskrétní signál $x[n]$ je reálný, hodnotu jeho Fourierovy transformace s diskrétním časem (DTFT) známe pouze na normované kruhové frekvenci $\omega_1 = \frac{\pi}{8}$ rad: $\tilde{X}(e^{j\omega_1}) = 4 + 4j$. Určete hodnotu DTFT na normované kruhové frekvenci $\omega_2 = \frac{5\pi}{8}$ rad. Pokud to nejde, jasně to napište.

viz A

$\tilde{X}(e^{j\omega_2}) =$ nejde

Příklad 14 Je dán signál s diskrétním časem o délce $N = 8$, vzorky $x[0] \dots x[7]$ jsou
1, 0, 1, 0, 1, 0, 1, 0.
Vypočtěte druhý koeficient jeho Diskrétní Fourierovy transformace (DFT).

viz A

$x[n]$	1	0	1	0	1	0	1	0
$e^{-jn\pi/2}$	1	$-j$	-1	j	1	$-j$	-1	j

$X[2] = 0$

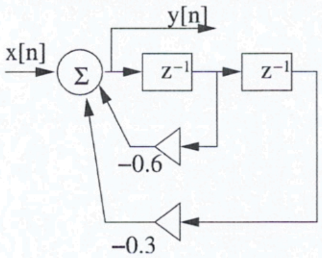
Příklad 15 DFT diskrétního signálu $x[n]$ o délce $N = 8$ se vzorky $x[0] \dots x[7]$: 1, 0, 5, 0, -1, 0, 1, 0 je $X[k]$. DFT diskrétního signálu $y[n]$ o stejné délce je dána: $Y[k] = X[k]e^{+j\frac{2\pi}{8}k3}$. Napište signál $y[n]$.

viz A, kruhové předběhnutí o 3 vzorky

$y[n] = 0 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 5$

D

Příklad 16 Podle schématu číslicového filtru napište jeho přenosovou funkci.

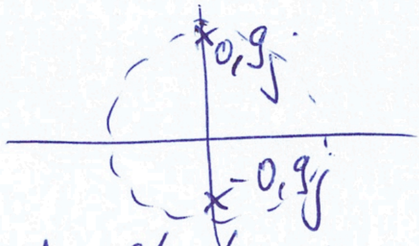


viz A

$H(z) = \dfrac{1}{1+0{,}6z^{-1}+0{,}3z^{-2}}$

Příklad 17 Číslicový filtr IIR má přenosovou funkci $H(z) = \dfrac{1}{1+0.81z^{-2}}$.
Určete, zda je tento filtr stabilní, je nutné krátké zdůvodnění, ne pouze odpověď ano/ne.

viz A



$p_{1/2} = \pm 0{,}9j$

póly uvnitř jednotk. kružnice ⇒ stabilní

Příklad 18 Číslicový filtr typu pásmová zádrž má 4 nulové body: $n_1 = e^{j0.5\pi}$, $n_2 = e^{-j0.5\pi}$, $n_3 = n_4 = 0$, a 4 póly: $p_1 = 0.7e^{j0.25\pi}$, $p_2 = 0.7e^{j0.75\pi}$, $p_3 = p_1^\star$, $p_4 = p_2^\star$ (hvězdička značí komplexní sdružení). Určete, na jaké normované kruhové frekvenci ω_{min} bude ležet minimum modulu jeho frekvenční charakteristiky a jaká zde bude její hodnota.

viz A

$\omega_{min} = \pi/2$ rad, $H(e^{j\omega_{min}}) = 0$

Příklad 19 Funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti stacionárního náhodného signálu má tvar "kočičích uší":

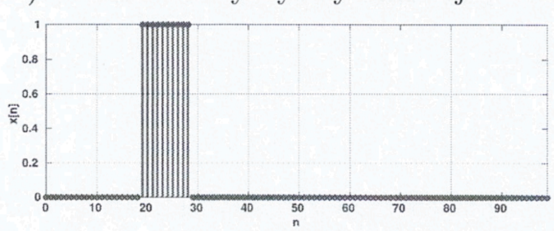
$$p(x) = \begin{cases} -x & \text{pro } -1 < x \le 0 \\ x & \text{pro } 0 < x \le 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

Určete rozptyl (varianci) tohoto signálu.

viz A

$D = 1/2$

Příklad 20 Na obrázku je průběh náhodného signálu $x[n]$ o délce $N = 100$ vzorků (nenulových vzorků je 10). Nakreslete vychýlený odhad jeho autokorelačních koeficientů $R[k]$ pro k od -50 do +50.



viz A