Semestrální zkouška ISS/VSG, řádný termín, 17.1.2022, skupina C

Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: ....
(čitelně!)

Příklad 1 Periodický signál se spojitým časem je dán: $x(t) = 1 + 2\cos(1000\pi t + \frac{\pi}{4})$.
Napište indexy a hodnoty všech nenulových koeficientů jeho Fourierovy řady (FŘ). Pomůcka: nenulové koeficienty FŘ jsou tři.

Příklad 2 Periodický signál se spojitým časem má základní kruhovou frekvenci $\omega_1 = 16000\pi$ rad/s a jediný nenulový koeficient FŘ: $c_1 = 2 - 2j$. Napište výraz pro odpovídající signál. Dobře zvažte, zda bude reálný nebo komplexní.

$x(t) =$

Příklad 3 Signál se spojitým časem je dán jako součet dvou Diracových impulsů:
$x(t) = 2\delta(t) + 2\delta(t + 1)$. Napište výraz pro jeho spektrální funkci.

$X(j\omega) =$

Příklad 4 Spektrální funkce signálu se spojitým časem $x(t)$ má na kruhové frekvenci $\omega_1 = 8000\pi$ rad/s hodnotu $X(j\omega_1) = 2e^{-j\frac{\pi}{4}}$. Signál $y(t)$ je zpožděná verze $x(t)$: $y(t) = x(t - \frac{1}{16000})$. Napište hodnotu spektrální funkce signálu $y(t)$ na stejné kruhové frekvenci.

$Y(j\omega_1) =$

Příklad 5 Spektrální funkce signálu se spojitým časem má tvar obdélníka:

$$X(j\omega) = \begin{cases} 5 & \text{pro} \quad -20000\pi \text{ rad/s} \le \omega \le +20000\pi \text{ rad/s} \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}.$$

Pomocí inverzní Fourierovy transformace spočítejte odpovídající signál $x(t)$: zapište jej výrazem a **nakreslete**, na osách označte důležité hodnoty.

$x(t) =$

Příklad 6 Nakreslete výsledek konvoluce dvou signálů se spojitým časem: $y(t) = x_1(t) \star x_2(t)$.

$x_1(t) = \begin{cases} 2 & \text{pro } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$ a $x_2(t) = \begin{cases} 0.5 & \text{pro } 0 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

Příklad 7 Systém se spojitým časem je zadán diferenciální rovnicí:
$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + 0.5\frac{dx(t)}{dt} + 0.4x(t) = \frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\frac{dy(t)}{dt} + 1y(t)$. Určete přenosovou funkci systému.

$H(s) =$

Příklad 8 Systém se spojitým časem omezuje ("klipuje") vstupní signál:

$y(t) = \begin{cases} x(t) & \text{pro } -1 \leq x(t) \leq 1 \\ -1 & \text{pro } x(t) < -1 \\ 1 & \text{pro } x(t) > 1 \end{cases}$ Určete, zda je systém lineární. Vaše tvrzení zdůvodněte.

Příklad 9 Máte písničku nahranou se vzorkovací frekvencí $F_s = 48$ kHz. Senior se starým mobilem ji chce jako vyzvánění, mobil ale podporuje jen $F_s = 8$ kHz. Blokovým schématem nebo slovně uveďte, jak budete postupovat. Očekávám seriózní odpověď, ne "použiju Audacity…".

Příklad 10 Spektrální funkce signálu se spojitým časem $x(t)$ má na kruhové frekvenci $\omega_1 = 8000\pi$ rad/s hodnotu $X(j\omega_1) = \frac{1}{32000}e^{j\frac{3\pi}{4}}$ Signál je vzorkován na $F_s = 32$ kHz. Nedošlo k aliasingu. Uveďte, zda je možné určit spektrální funkci navzorkovaného signálu $X_s(j\omega)$ na kruhové frekvenci $\omega_1 = 72000\pi$ rad/s. Pokud ano, napište její hodnotu.

$X_s(j72000\pi) =$

Příklad 11 Diskrétní signál $x[n]$ má délku $N = 8$ vzorků, jeho hodnoty jsou v tabulce. Napište hodnoty signálu získaného pomocí $y[n] = R_8[n]\, x[\mathrm{mod}_8(n-2)]$, kde $R_8[n]$ je okénková funkce a mod_8 je funkce modulo. **Pojmenujte** operaci, kterou jste provedli.

n	0	1	2	3	4	5	6	7
$x[n]$	1	-3	2	5	9	-5	-7	1
$y[n]$								

Příklad 12 Napište, jaké je rozlišení Fourierovy transformace s diskrétním časem DTFT (teoretické, ne při numercikém výpočtu) na ose normovaných kruhových frekvencí. Pomůcka: Neptám se na DFT.

Příklad 13 Diskrétní signál $x[n]$ je reálný a má na normované kruhové frekvenci $\omega_1 = \frac{\pi}{8}$ rad hodnotu DTFT $\tilde{X}(e^{j\omega_1}) = 4 + 3j$. Určete hodnotu DTFT na normované kruhové frekvenci $\omega_2 = \frac{15\pi}{8}$ rad. Pokud to nejde, jasně to napište.

$\tilde{X}(e^{j\frac{15\pi}{8}}) =$

Příklad 14 Je dán signál s diskrétním časem o délce $N = 8$, vzorky $x[0] \ldots x[7]$ jsou
0, 1, 0, 1, 0, 1, 0, 1. Vypočtěte první koeficient jeho Diskrétní Fourierovy transformace (DFT).

$X[1] =$

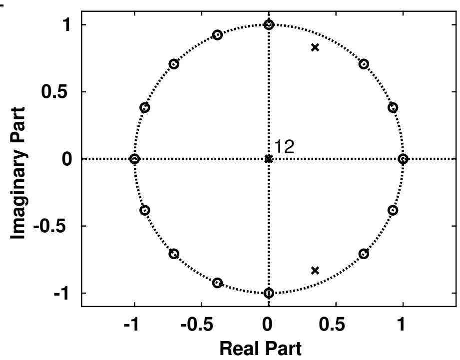
Příklad 15 DFT diskrétního signálu $x[n]$ o délce $N = 128$ vzorků je $X[k]$. DFT diskrétního signálu $y[n]$ o stejné délce je dána: $Y[k] = X[k]e^{-j\frac{2\pi}{128}k\,13}$ Popište matematicky nebo slovně, jaký je vztah mezi signály $x[n]$ a $y[n]$. Pomůcka: u DFT se **vše** děje v bufferu $0 \ldots N-1$, nikde jinde.

Příklad 16 Číslicový filtr je dán diferenční rovnicí
$y[n] = x[n] + 0.2x[n-1] + 0.2x[n-2] + 0.1y[n-1] + 0.1y[n-2]$. Napište jeho přenosovou funkci.

$H(z) =$

Příklad 17 Číslicový filtr IIR druhého řádu má přenosovou funkci $H(z) = \frac{1}{1+0.49z^{-2}}$. Určete jeho nulové body a póly, zapište je a nakreslete do komplexní roviny "z". Pomůcka$_1$: řešení kvadratické rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ jsou $x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Pomůcka$_2$: tento filtr **má** nulové body.

Příklad 18 Na obrázku jsou nulové body a póly číslicového filtru (v počátku je 12 pólů). Nakreslete přibližně modul jeho frekvenční charakteristiky $H(e^{j\omega})$ pro interval normovaných kruhových frekvencí ω od 0 do π rad.



Příklad 19 Na $\Omega = 4000$ realizacích náhodného procesu byla naměřena tabulka (sdružený histogram) hodnot mezi vzorky n_1 a n_2. Převeďte je na odhad sdružené funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti $p(x_1, x_2, n_1, n_2)$.

intervaly x_1	intervaly x_2 [-20, -10]	[-10, 0]	[0, 10]	[10, 20]
[10, 20]	0	0	0	0
[0, 10]	0	1000	1000	0
[-10, 0]	0	1000	1000	0
[-20, -10]	0	0	0	0

Příklad 20 Korelační koeficienty stacionárního náhodného signálu jsou
$R[0] = 11,\ \ R[1] = 5,\ \ R[-1] = 5$. Ostatní jsou nulové. Určete, zda je tento signál **bílý šum**, své tvrzení zdůvodněte.