Semestrální zkouška ISS/ISSk, řádný termín, 9.1.2023, skupina A

Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: .... REF

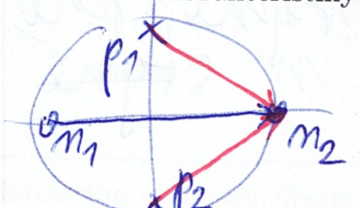
(prosím čitelně!)

Příklad 1 Signál je reálný a má délku $N = 64$ vzorků. Známe koeficient jeho Diskrétní Fourierovy transformace (DFT): $X[3] = 1 + j$. Napište, jaký/é další koeficient/y DFT tím pádem známe a jaká/é je/jsou jeho/jejich hodnota/y.

$X[N-k] = X^*[k]$ známe tedy

$\underline{X[61] = 1 - j}$

Příklad 2 Číslicový filtr má dva nulové body: $n_1 = -0.98$ a $n_2 = 1$ a dva póly: $p_1 = 0.98j$ a $p_2 = -0.98j$. Určete modul jeho frekvenční charakteristiky na normované kruhové frekvenci $\omega_1 = 0$ rad.



$|H(e^{j\omega_1})| = \dfrac{\text{součin délek modrých}}{\text{součin délek červených}} = \dfrac{2 \cdot 0}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = 0$

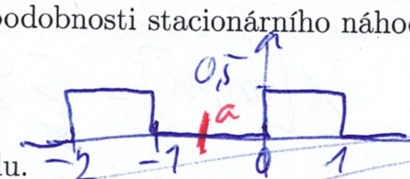
Příklad 3 Jsou dány dva FIR filtry s impulsními odezvami $h_1 = [1\ \ 1\ \ 1]$ a $h_2 = [1\ \ -1\ \ 1]$. Tyto filtry jsou spojeny sériově (za sebou). Určete impulsní odezvu výsledného filtru.

$h[n] = h_1[n] * h_2[n] = [1\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 1]$

Příklad 4 Funkce hustoty pravděpodobnosti stacionárního náhodného signálu je dána:

$$p(x) = \begin{cases} 0.5 & \text{pro } -2 \le x \le -1 \\ 0.5 & \text{pro } 0 \le x \le 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}.$$

Určete střední hodnotu tohoto signálu.



primitivní funkce k x

$a = \int x p(x) dx = 0{,}5 \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{-1} + 0{,}5 \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{1} = 0{,}5 \left[\frac{1}{2} - 2 + \frac{1}{2} - 0\right] = \underline{-0{,}5}$

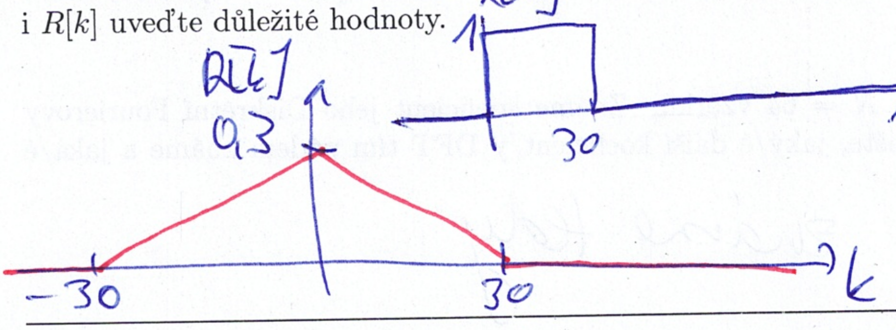
Příklad 5 Napište, zda pro stacionární náhodný signál se střední hodnotou $a = 0$ existuje vztah mezi jeho rozptylem D a výkonem P. Pokud ano, krátce dokažte nebo zdůvodněte.

ano, jsou rovné: $P = D$

odhad: $P = \dfrac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^2[n]$ $\qquad D = \dfrac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (x[n] - \overset{a=0}{a})^2 = \dfrac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x^2[n]$

to samé

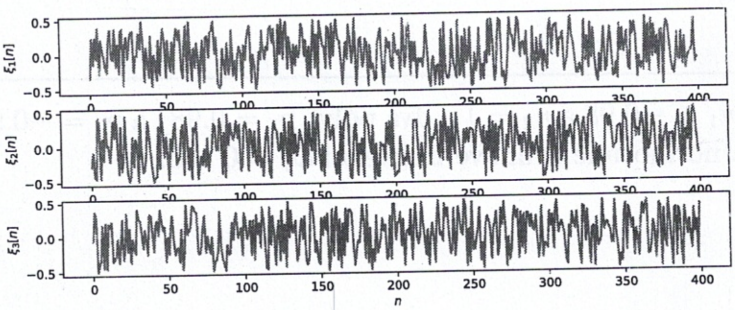
Příklad 6 Diskrétní signál o délce $N = 100$ je dán: $x[n] = \begin{cases} 1 & \text{pro } 0 \le n < 30 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$. Nakreslete graf všech jeho nenulových autokorelačních koeficientů. Použijte vychýlený odhad. Na osách k i $R[k]$ uveďte důležité hodnoty.



$R[0] = \frac{1}{100} \cdot 30 \cdot 1 = 0{,}3$

poslední nenulový $R[29]$ a $R[-29]$

Příklad 7 Na obrázku jsou 3 realizace náhodného signálu. Určete, zda je tento signál stacionární a krátce zdůvodněte.



stacionární

$a[n]$ a $D[n]$ zřejmě pro všechna n stejné

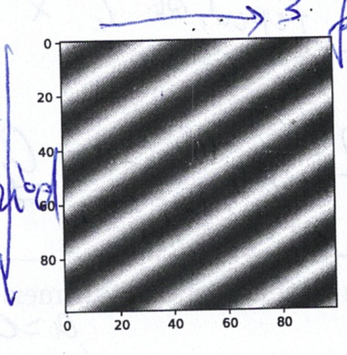
Příklad 8 Obrázek o rozměrech $K = 100$ krát $L = 100$ pixelů obsahuje uprostřed jeden světlý pixel: $x[50, 50] = 1$, ostatní jsou nulové. Napište nebo nakreslete, jak bude vypadat obrázek po filtrování 2D-filtrem (maskou, konvolučním jádrem) o rozměrech 5×5, jehož všechny prvky mají hodnotu $\frac{1}{25}$.

uprostřed obrázku bude čtverec 5×5, s hodnotami $\frac{1}{25}$ konvoluce s posunutým jednotkovým impulsem funguje jako „kopírka s posunem" (i ve 2D).

Příklad 9 Obrázek o rozměrech $K = 100$ krát $L = 100$ pixelů má hodnoty 0 (černá) až 1 (bílá). Určete, které koeficienty $X[m, n]$ jeho 2D-DFT budou nenulové a krátce zdůvodněte. Uvažujte hodnoty m a n pouze do 50ti. Pomůcka: všechny pixely obrázku jsou nezáporné, takže pečlivě zvažte, zda mezi nenulové koeficienty patří i $X[0, 0]$.

→ 3 periody

5 period



$X[m,n] = \sum_k \sum_l x[k,l] \, e^{-j2\pi\left(\frac{mk}{M} + \frac{nl}{N}\right)}$

- pro $m=0, n=0$ je ← vždy 1 => suma pixelů
- pro $m=5$ $n=3$ jsou frekvence kompl. exponenciál shodné s obrázkem

$X[0,0]$ a $X[5,3]$

Příklad 10 Jsou dány dva signály se spojitým časem: $x_1(t) = 3\cos(14\pi t)$, $x_2(t) = \delta(t)$ (Diracův impuls). Vypočtěte

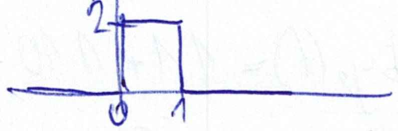
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t) x_2(t) dt = \int 3\cos(14\pi t)\,\delta(t)\,dt = 3\cos(0) = \underline{\underline{3}}$$

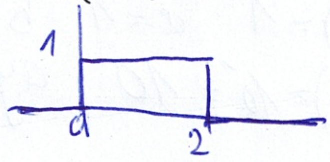
samplyje pro $t=0$ ...

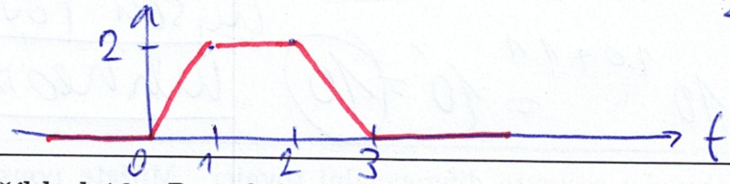
A

Příklad 11 Nakreslete výsledek konvoluce dvou signálů se spojitým časem: $y(t) = x_1(t) \star x_2(t)$.

$$x_1(t) = \begin{cases} 2 & \text{pro } 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases} \quad \text{a} \quad x_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } 0 \le t \le 2 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$







Příklad 12 Periodický signál se spojitým časem je dán: $x(t) = 14e^{0.7j}e^{j1000\pi t}$. Napište indexy a hodnoty všech nenulových koeficientů jeho Fourierovy řady (FŘ). Pomůcka: zvažte dobře, zda pro tento signál platí $c_k = c^\star_{-k}$.

$x(t) = \sum_k c_k e^{jk\omega_1 t}$ → pouze jeden koeficient

$C_1 = 14\, e^{0{,}7j}$

Příklad 13 Signál se spojitým časem je obdélník

$$x(t) = \begin{cases} 50000 & \text{pro} \quad -10\ \mu s \le t \le +10\ \mu s \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$

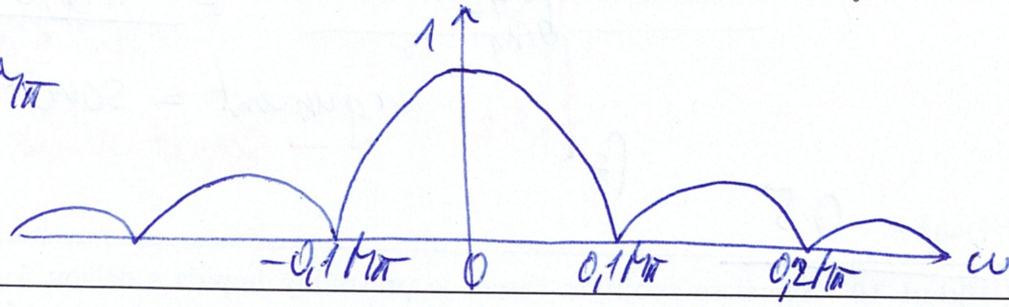
$X(j\omega) = D\tau \operatorname{sinc}\left(\frac{\tau}{2}\omega\right)$

dotek s osou ω: $\frac{\tau}{2}\omega = \pi$ $\omega = \frac{2\pi}{\tau}$

Nakreslete průběh modulu jeho spektrální funkce $|X(j\omega)|$. Na osách uveďte důležité hodnoty.

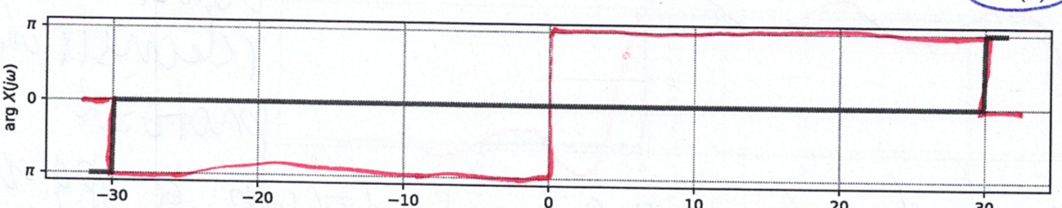
$D\tau = 50000 \cdot 20 \cdot 10^{-6} = 1$

$\omega_1 = \frac{2\pi}{20\cdot 10^{-6}} = \pi \cdot 10^5 = 0{,}1\,M\pi$



Příklad 14 Na obrázku je průběh argumentu spektrální funkce $\arg X(j\omega)$ signálu $x(t)$. Do téhož obrázku nakrelete průběh argumentu spektrální funkce signálu s opačným znaménkem: $-x(t)$.

$X(j\omega) \rightarrow -X(j\omega)$



argument 0 → π nebo −π /

argument ±π → 0 / konst

Příklad 15 Odvoďte Parsevalův teorém, určující výkon signálu z jeho spektra, pro Fourierovu řadu. Pomůcka: určete a sečtěte výkony jednotlivých komplexních exponenciál v "syntezačním" vzorečku FŘ.

$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_1 t}$ $P = \frac{1}{T_1}\int |x^2(t)|\, dt = \sum \frac{1}{T_1}\int |c_k e^{jk\omega_1 t}|^2 dt =$

$= \sum \frac{1}{T_1} |c_k|^2 \underbrace{\int_{T_1} |e^{jk\omega_1 t}|^2 dt}_{1} = \sum \frac{1}{\cancel{T_1}} |c_k|^2 \cdot \cancel{T_1} = \sum |c_k|^2$

Příklad 16 Chování systému se spojitým časem je dáno: $y(t) = 10^{x(t)}$. Dokažte, že tento systém není lineární tak, že najdete signály $x_1(t)$ a $x_2(t)$, pro které neplatí definice linearity $ax_1(t) + bx_2(t) \rightarrow ay_1(t) + by_2(t)$. Pomůcka: nejlépe se Vám bude pracovat s konstantními signály.

Např. $x_1(t) = 0$ $\quad x_2(t) = 1$ $\quad a = 1$ $\quad b = 1$

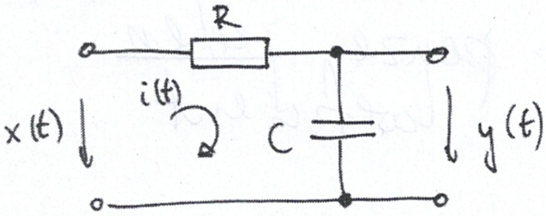
$y_1(t) = 10^0 = 1$ $\quad y_2(t) = 10^1 = 10$ $\quad ay_1(t) + by_2(t) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 10 = 11$

výstup pro mix

$y(t) = 10^{ax_1(t) + bx_2(t)} = 10^{1 \cdot 0 + 1 \cdot 1} = 10^1 = 10$

nejsou rovné, nelineární

Příklad 17 Pro systém se spojitým časem na obrázku sestavte diferenciální rovnici. Můžete použít konstantu $\tau = RC$.

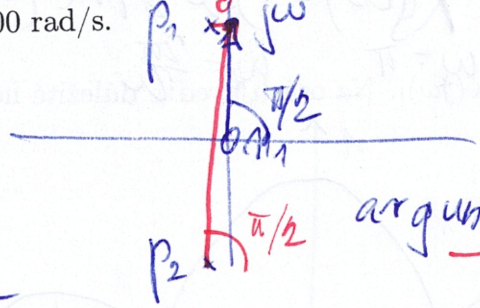


$i(t) = \frac{x(t) - y(t)}{R}$ $\quad i(t) = C\frac{dy(t)}{dt}$

$x(t) - y(t) = RC\frac{dy(t)}{dt}$

$x(t) = y(t) + \tau\frac{dy(t)}{dt}$

Příklad 18 Přenosová funkce $H(s)$ systému se spojitým časem má jeden nulový bod: $n_1 = 0$ a dva póly: $p_1 = -1 + 1000j$, $p_2 = -1 - 1000j$. Určete hodnotu frekvenční charakteristiky tohoto systému na kruhové frekvenci $\omega_1 = 1000$ rad/s.

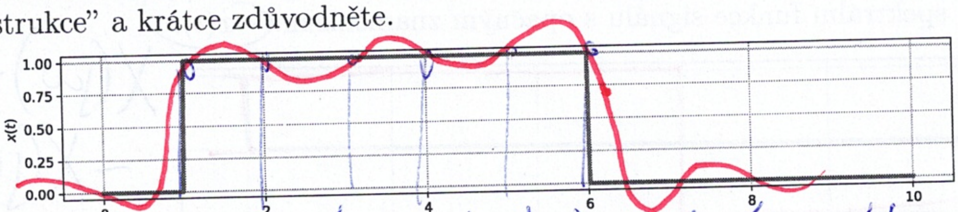


modul = $\frac{\text{součin délek nulových}}{\text{součin délek pólových}} = \frac{1000}{1 \cdot 2000} = 0{,}5$

argument = součet úhlů nulových − součet úhlů $= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - 0 = 0$

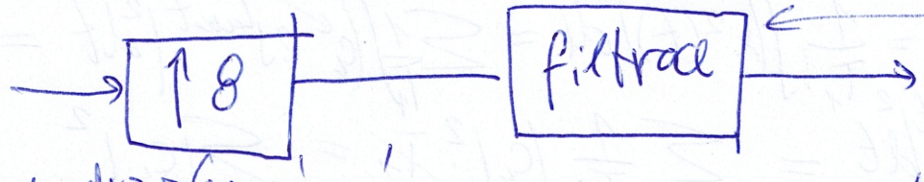
$H(j\omega_1) =$ 0,5

Příklad 19 Signál se spojitým časem je pravoúhlý impuls s délkou 5 μs. Tento signál je vzorkován na vzorkovací frekvenci $F_s = 5$ MHz. Nakreslete do stejného obrázku výsledek sekvence "vzorkování → rekonstrukce" a krátce zdůvodněte.



není ideální rekonstrukce, protože obdélník má nekonečně široké spektrum a porušuje vzorkovací teorém.

Příklad 20 Diskrétní signál na vzorkovací frekvenci $F_{s1} = 8$ kHz je potřeba převést na vzorkovací frekvenci $F_{s2} = 64$ kHz. Napište nebo nakreslete schéma, jaký je korektní postup. Pokud použijete nějaký filtr, uveďte, na které vzorkovací frekvenci pracuje, a jaká je jeho frekvenční charakteristika.



filtr pracuje na $F_{s2} = 64$ kHz

dolní propust, s mezní frekvencí 4 kHz

nadvzorkování

doplnění 7mi nulových vzorků po každém původním (v čas. oblasti kardinální sinus procházející nulou 1x za 8 vzorků)

Semestrální zkouška ISS/ISSk, řádný termín, 9.1.2023, skupina B

Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: REF
(prosím čitelně!)

Příklad 1 Signál je reálný a má délku $N = 128$ vzorků. Známe koeficient jeho Diskrétní Fourierovy transformace (DFT): $X[3] = 1 + j$. Napište, jaký/é další koeficient/y DFT tím pádem známe a jaká/é je/jsou jeho/jejich hodnota/y.

viz A

$X[125] = 1 - j$

Příklad 2 Číslicový filtr má dva nulové body: $n_1 = -0.98$ a $n_2 = 1$ a dva póly: $p_1 = 0.98j$ a $p_2 = -0.98j$. Určete modul jeho frekvenční charakteristiky na normované kruhové frekvenci $\omega_1 = 0$ rad.

viz A

$|H(e^{j\omega_1})| = 0$

Příklad 3 Jsou dány dva FIR filtry s impulsními odezvami $h_1 = [1\ \ 1\ \ 1]$ a $h_2 = [1\ \ -1\ \ 1]$. Tyto filtry jsou spojeny sériově (za sebou). Určete impulsní odezvu výsledného filtru.

viz A

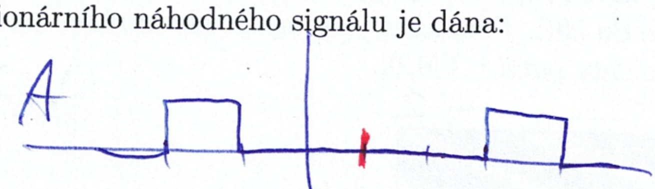
$h[n] = [1\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 1]$

Příklad 4 Funkce hustoty pravděpodobnosti stacionárního náhodného signálu je dána:

$$p(x) = \begin{cases} 0.5 & \text{pro } -2 \leq x \leq -1 \\ 0.5 & \text{pro } 3 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}.$$

Určete střední hodnotu tohoto signálu.

viz A



$a = 0{,}5\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{-1} + 0{,}5\left[\frac{x^2}{2}\right]_{3}^{4} = 0{,}5\left[\frac{1}{2} - 2 + 8 - 4{,}5\right] = 0{,}5 \cdot 2 = \underline{1}$

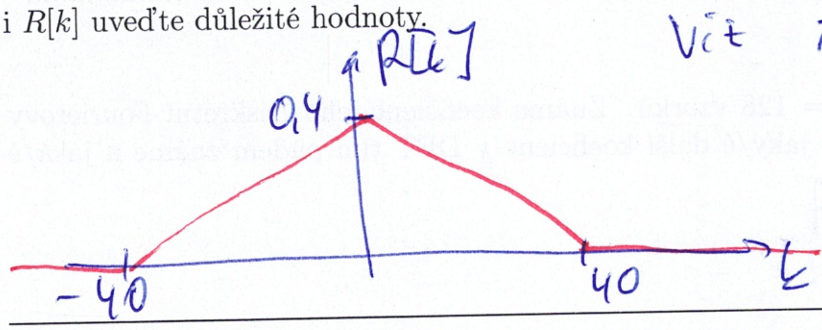
Příklad 5 Napište, zda pro stacionární náhodný signál se střední hodnotou $a = 0$ existuje vztah mezi jeho rozptylem D a výkonem P. Pokud ano, krátce dokažte nebo zdůvodněte.

viz A

Příklad 6 Diskrétní signál o délce $N = 100$ je dán: $x[n] = \begin{cases} 1 & \text{pro } 0 \le n < 40 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$.

Nakreslete graf všech jeho nenulových autokorelačních koeficientů. Použijte vychýlený odhad. Na osách k i $R[k]$ uveďte důležité hodnoty.

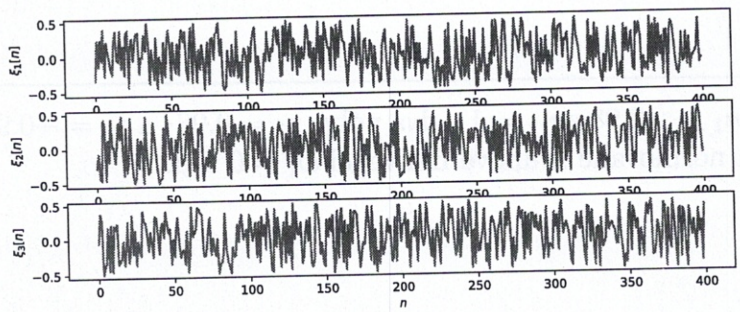
viz A



Příklad 7 Na obrázku jsou 3 realizace náhodného signálu. Určete, zda je tento signál stacionární a krátce zdůvodněte.

stacionární

viz A

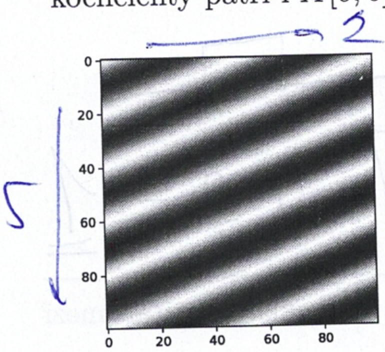


Příklad 8 Obrázek o rozměrech $K = 100$ krát $L = 100$ pixelů obsahuje uprostřed jeden světlý pixel: $x[50, 50] = 1$, ostatní jsou nulové. Napište nebo nakreslete, jak bude vypadat obrázek po filtrování 2D-filtrem (maskou, konvolučním jádrem) o rozměrech 5×5, jehož všechny prvky mají hodnotu $\frac{1}{25}$.

viz A

Příklad 9 Obrázek o rozměrech $K = 100$ krát $L = 100$ pixelů má hodnoty 0 (černá) až 1 (bílá). Určete, které koeficienty $X[m, n]$ jeho 2D-DFT budou nenulové a krátce zdůvodněte. Uvažujte hodnoty m a n pouze do 50ti. Pomůcka: všechny pixely obrázku jsou nezáporné, takže pečlivě zvažte, zda mezi nenulové koeficienty patří i $X[0, 0]$.

viz A



$X[0,0]$ a $X[5,2]$

Příklad 10 Jsou dány dva signály se spojitým časem: $x_1(t) = 6\cos(10\pi t)$, $x_2(t) = \delta(t)$ (Diracův impuls). Vypočtěte

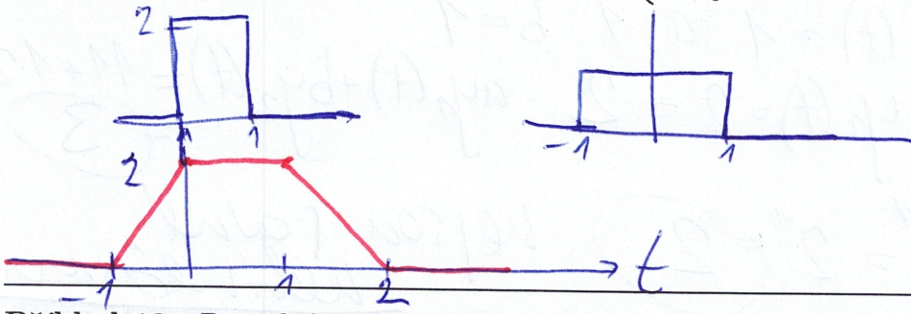
$\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)x_2(t)dt =$ 6

viz A

B

Příklad 11 Nakreslete výsledek konvoluce dvou signálů se spojitým časem: $y(t) = x_1(t) \star x_2(t)$.

$$x_1(t) = \begin{cases} 2 & \text{pro } 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases} \quad \text{a} \quad x_2(t) = \begin{cases} 1 & \text{pro } -1 \le t \le 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$



Příklad 12 Periodický signál se spojitým časem je dán: $x(t) = 7e^{0.5j}e^{j1000\pi t}$. Napište indexy a hodnoty všech nenulových koeficientů jeho Fourierovy řady (FŘ). Pomůcka: zvažte dobře, zda pro tento signál platí $c_k = c^\star_{-k}$.

viz A

$$c_1 = 7e^{j0,5}$$

Příklad 13 Signál se spojitým časem je obdélník

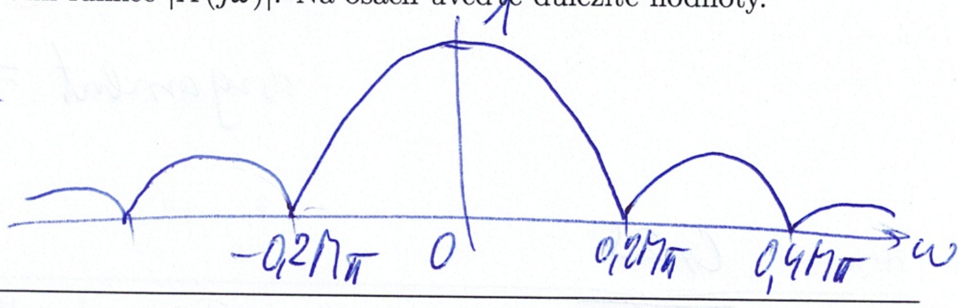
$$x(t) = \begin{cases} 100000 & \text{pro } -5\ \mu s \le t \le +5\ \mu s \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}.$$

viz A

Nakreslete průběh modulu jeho spektrální funkce $|X(j\omega)|$. Na osách uveďte důležité hodnoty.

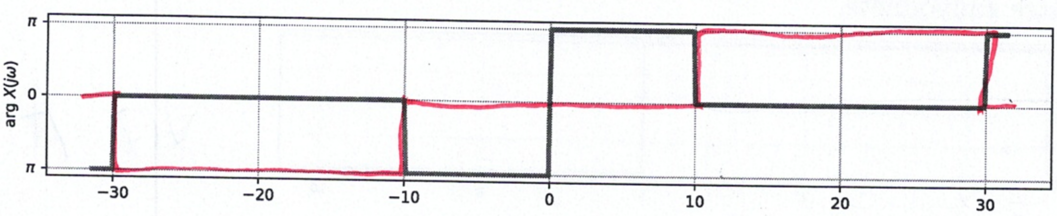
$D\ell = 100000 \cdot 10^{-6} = 1$

$\omega_x = \frac{2\pi}{10 \cdot 10^{6}} = 2\pi \cdot 10^5 = 0{,}2M\pi$



Příklad 14 Na obrázku je průběh argumentu spektrální funkce $\arg X(j\omega)$ signálu $x(t)$. Do téhož obrázku nakrelete průběh argumentu spektrální funkce signálu s opačným znaménkem: $-x(t)$.

viz A



Příklad 15 Odvoďte Parsevalův teorém, určující výkon signálu z jeho spektra, pro Fourierovu řadu. Pomůcka: určete a sečtěte výkony jednotlivých komplexních exponenciál v "syntezačním" vzorečku FŘ.

viz A

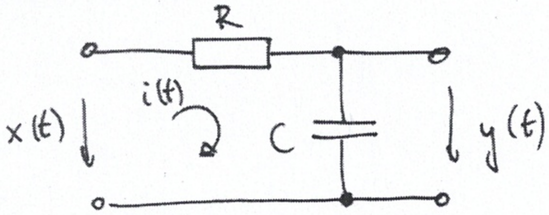
Příklad 16 Chování systému se spojitým časem je dáno: $y(t) = 2^{x(t)}$. Dokažte, že tento systém není lineární tak, že najdete signály $x_1(t)$ a $x_2(t)$, pro které neplatí definice linearity $ax_1(t) + bx_2(t) \rightarrow ay_1(t) + by_2(t)$. Pomůcka: nejlépe se Vám bude pracovat s konstantními signály.

např: $x_1(t) = 0 \quad x_2(t) = 1 \quad a = 1 \quad b = 1$

$y_1(t) = 2^0 = 1 \quad y_2(t) = 2^1 = 2 \quad ay_1(t) + by_2(t) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 3$

výstup pro mix $y(t) = 2^{1 \cdot 0 + 1 \cdot 1} = 2^1 = 2$ nejsou rovné nelineární

Příklad 17 Pro systém se spojitým časem na obrázku sestavte diferenciální rovnici. Můžete použít konstantu $\tau = RC$.



viz A

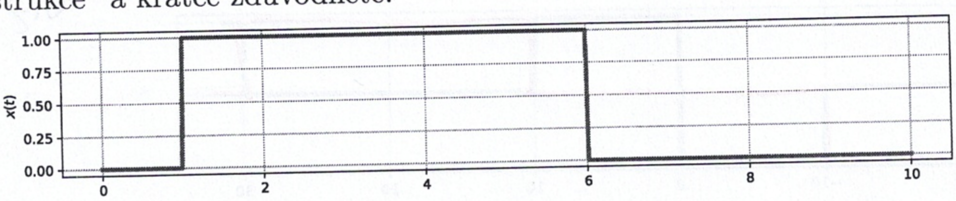
Příklad 18 Přenosová funkce $H(s)$ systému se spojitým časem má jeden nulový bod: $n_1 = 0$ a dva póly: $p_1 = -2+1000j$, $p_2 = -2-1000j$. Určete hodnotu frekvenční charakteristiky tohoto systému na kruhové frekvenci $\omega_1 = 1000$ rad/s.

viz A modul $= \dfrac{1000}{2 \cdot 2000} = \dfrac{1}{4}$

argument = viz A

$H(j\omega_1) =$ 0,25

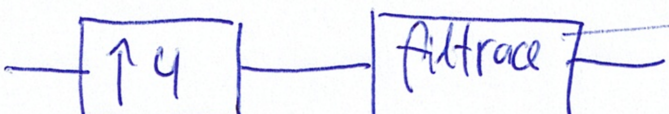
Příklad 19 Signál se spojitým časem je pravoúhlý impuls s délkou 5 μs. Tento signál je vzorkován na vzorkovací frekvenci $F_s = 5$ MHz. Nakreslete do stejného obrázku výsledek sekvence "vzorkování → rekonstrukce" a krátce zdůvodněte.



viz A

viz A

Příklad 20 Diskrétní signál na vzorkovací frekvenci $F_{s1} = 8$ kHz je potřeba převést na vzorkovací frekvenci $F_{s2} = 32$ kHz. Napište nebo nakreslete schéma, jaký je korektní postup. Pokud použijete nějaký filtr, uveďte, na které vzorkovací frekvenci pracuje, a jaká je jeho frekvenční charakteristika.



3 nulové vzorky po ∀ původním

na $F_s = 32$ kHz
DP do 4 kHz
čas oblast: sinc procházející nulou 1x za 4 vzorky

Semestrální zkouška ISS/ISSk, řádný termín, 9.1.2023, skupina C

Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: .... REF

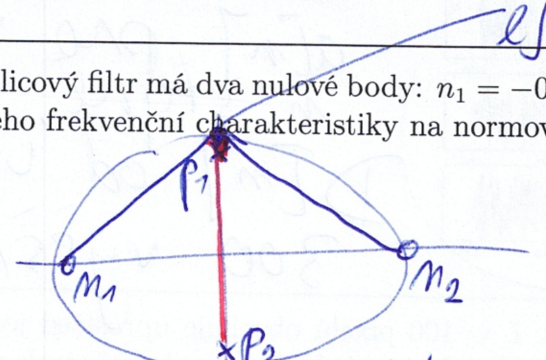
(prosím čitelně!)

Příklad 1 Signál je reálný a má délku $N = 256$ vzorků. Známe koeficient jeho Diskrétní Fourierovy transformace (DFT): $X[3] = 1 + j$. Napište, jaký/é další koeficient/y DFT tím pádem známe a jaká/é je/jsou jeho/jejich hodnota/y.

viz A

$X[253] = 1 - j$

Příklad 2 Číslicový filtr má dva nulové body: $n_1 = -0.98$ a $n_2 = 1$ a dva póly: $p_1 = 0.98j$ a $p_2 = -0.98j$. Určete modul jeho frekvenční charakteristiky na normované kruhové frekvenci $\omega_1 = \frac{\pi}{2}$ rad.



$|H(e^{j\omega_1})| = \frac{\text{součin délek modrých}}{\text{součin délek červených}} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{2\cdot 0{,}02} = \frac{1}{0{,}02} = \underline{\underline{50}}$

Příklad 3 Jsou dány dva FIR filtry s impulsními odezvami $h_1 = [1\ \ 1\ \ 1]$ a $h_2 = [1\ \ -1\ \ 1]$. Tyto filtry jsou spojeny paralelně (vedle sebe). Určete impulsní odezvu výsledného filtru.

$h[n] = h_1[n] + h_2[n] = [2\ \ 0\ \ 2]$

Příklad 4 Funkce hustoty pravděpodobnosti stacionárního náhodného signálu je dána:

$$p(x) = \begin{cases} 0.5 & \text{pro } -2 \le x \le -1 \\ 0.5 & \text{pro } 4 \le x \le 5 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}.$$

viz A

Určete střední hodnotu tohoto signálu.

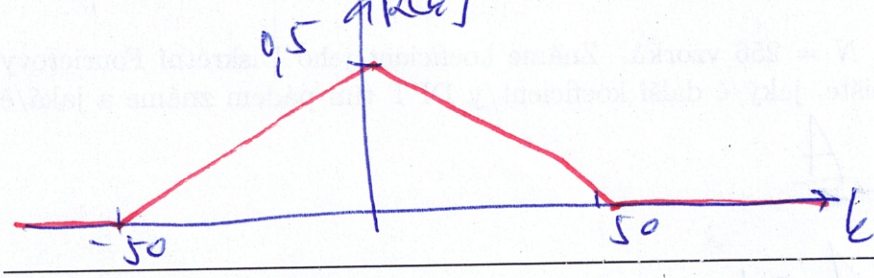
$a = 0{,}5\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{-1} + 0{,}5\left[\frac{x^2}{2}\right]_{4}^{5} = 0{,}5\left[\frac{1}{2} - 2 + 12{,}5 - 8\right] = 0{,}5 \cdot 3 = \underline{\underline{1{,}5}}$

Příklad 5 Napište, zda pro stacionární náhodný signál se střední hodnotou $a = 0$ existuje vztah mezi jeho rozptylem D a výkonem P. Pokud ano, krátce dokažte nebo zdůvodněte.

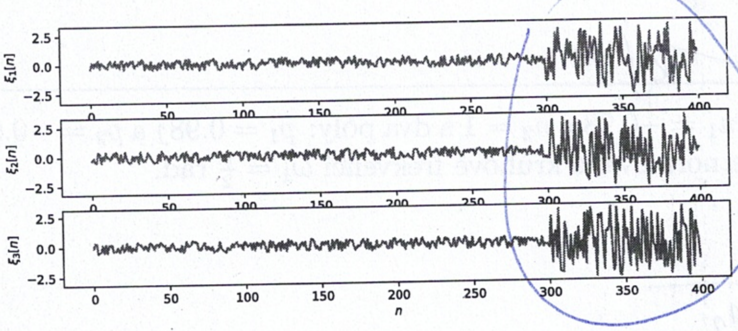
viz A

Příklad 6 Diskrétní signál o délce $N = 100$ je dán: $x[n] = \begin{cases} 1 & \text{pro } 0 \leq n < 50 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$.
Nakreslete graf všech jeho nenulových autokorelačních koeficientů. Použijte vychýlený odhad. Na osách k i $R[k]$ uveďte důležité hodnoty.

viz A



Příklad 7 Na obrázku jsou 3 realizace náhodného signálu. Určete, zda je tento signál stacionární a krátce zdůvodněte.



nestacionární

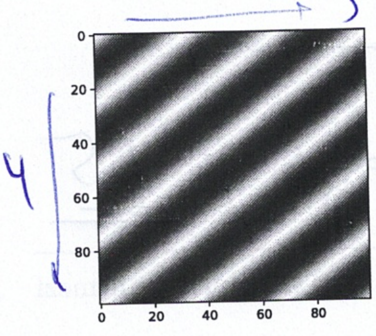
a[n] pro všechna n stejné ale D[n] od vzorku 300 vyšší!

Příklad 8 Obrázek o rozměrech $K = 100$ krát $L = 100$ pixelů obsahuje uprostřed jeden světlý pixel: $x[50, 50] = 1$, ostatní jsou nulové. Napište nebo nakreslete, jak bude vypadat obrázek po filtrování 2D-filtrem (maskou, konvolučním jádrem) o rozměrech 5×5, jehož všechny prvky mají hodnotu $\frac{1}{25}$.

viz A

Příklad 9 Obrázek o rozměrech $K = 100$ krát $L = 100$ pixelů má hodnoty 0 (černá) až 1 (bílá). Určete, které koeficienty $X[m, n]$ jeho 2D-DFT budou nenulové a krátce zdůvodněte. Uvažujte hodnoty m a n pouze do 50ti. Pomůcka: všechny pixely obrázku jsou nezáporné, takže pečlivě zvažte, zda mezi nenulové koeficienty patří i $X[0, 0]$.

viz A



X[0,0] a X[4,3]

Příklad 10 Jsou dány dva signály se spojitým časem: $x_1(t) = 1.5\cos(8\pi t)$, $x_2(t) = \delta(t)$ (Diracův impuls). Vypočtěte

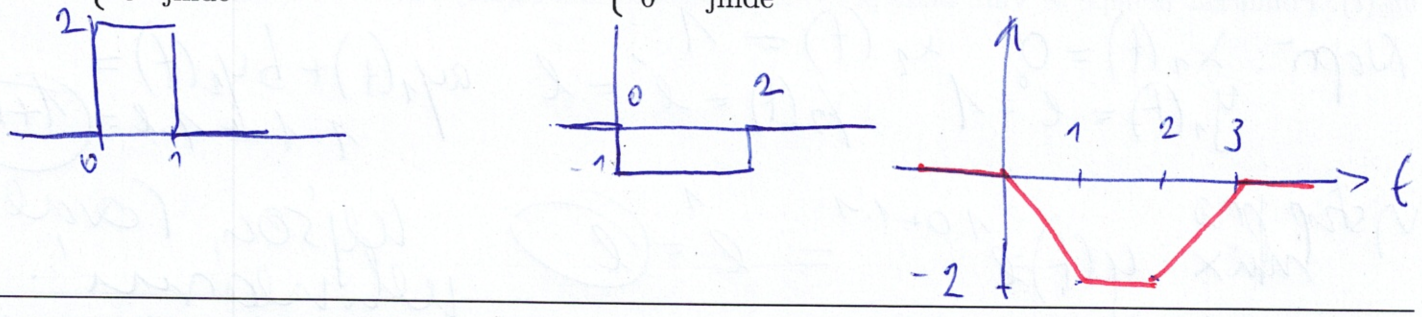
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)x_2(t)dt = 1,5$$

viz A

C

Příklad 11 Nakreslete výsledek konvoluce dvou signálů se spojitým časem: $y(t) = x_1(t) \star x_2(t)$.

$$x_1(t) = \begin{cases} 2 & \text{pro } 0 \le t \le 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases} \quad \text{a} \quad x_2(t) = \begin{cases} -1 & \text{pro } 0 \le t \le 2 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$



Příklad 12 Periodický signál se spojitým časem je dán: $x(t) = 3e^{-0.7j}e^{j1000\pi t}$. Napište indexy a hodnoty všech nenulových koeficientů jeho Fourierovy řady (FŘ). Pomůcka: zvažte dobře, zda pro tento signál platí $c_k = c^\star_{-k}$.

viz A

$\underline{c_1 = 3e^{-j0,7}}$

Příklad 13 Signál se spojitým časem je obdélník

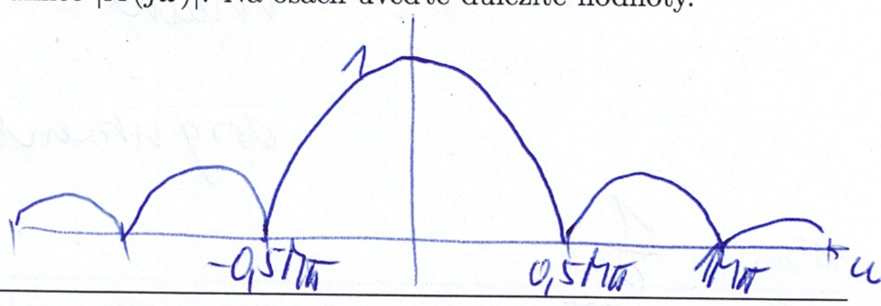
$$x(t) = \begin{cases} 250000 & \text{pro } -2\ \mu s \le t \le +2\ \mu s \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}.$$

viz A

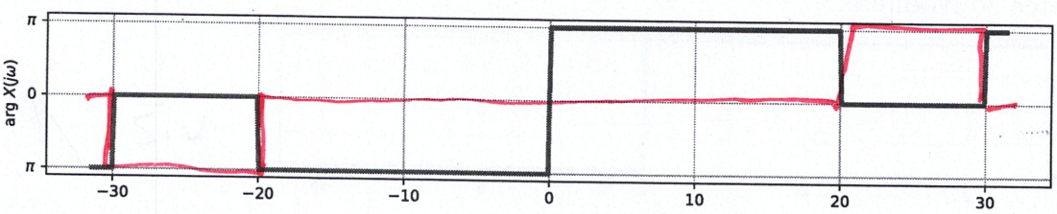
Nakreslete průběh modulu jeho spektrální funkce $|X(j\omega)|$. Na osách uveďte důležité hodnoty.

$DV = 250\,000 \cdot 4 \cdot 10^{-6} = 1$

$\omega_1 = \frac{2\pi}{4 \cdot 10^{-6}} = 0{,}5 \cdot 10^{6} = 0{,}5M\pi$



Příklad 14 Na obrázku je průběh argumentu spektrální funkce $\arg X(j\omega)$ signálu $x(t)$. Do téhož obrázku nakrelete průběh argumentu spektrální funkce signálu s opačným znaménkem: $-x(t)$.



viz A

Příklad 15 Odvoďte Parsevalův teorém, určující výkon signálu z jeho spektra, pro Fourierovu řadu. Pomůcka: určete a sečtěte výkony jednotlivých komplexních exponenciál v "syntezačním" vzorečku FŘ.

viz A

Příklad 16 Chování systému se spojitým časem je dáno: $y(t) = e^{x(t)}$. Dokažte, že tento systém není lineární tak, že najdete signály $x_1(t)$ a $x_2(t)$, pro které neplatí definice linearity $ax_1(t) + bx_2(t) \to ay_1(t) + by_2(t)$. Pomůcka: nejlépe se Vám bude pracovat s konstantními signály. $a = 1$ $b = 1$

Např: $x_1(t) = 0$ $x_2(t) = 1$

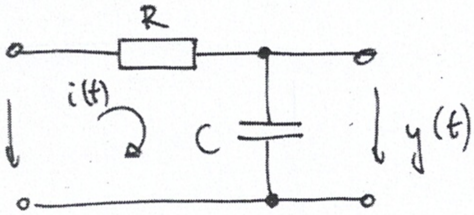
$y_1(t) = e^0 = 1$ $y_2(t) = e^1 = e$

$ay_1(t) + by_2(t) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot e = 1+e$

výstup pro mix: $y(t) = e^{1\cdot 0 + 1 \cdot 1} = e^1 = e$

nejsou rovné, nelineární.

Příklad 17 Pro systém se spojitým časem na obrázku sestavte diferenciální rovnici. Můžete použít konstantu $\tau = RC$.



Viz A

Příklad 18 Přenosová funkce $H(s)$ systému se spojitým časem má jeden nulový bod: $n_1 = 0$ a dva póly: $p_1 = -3+1000j$, $p_2 = -3-1000j$. Určete hodnotu frekvenční charakteristiky tohoto systému na kruhové frekvenci $\omega_1 = 1000$ rad/s.

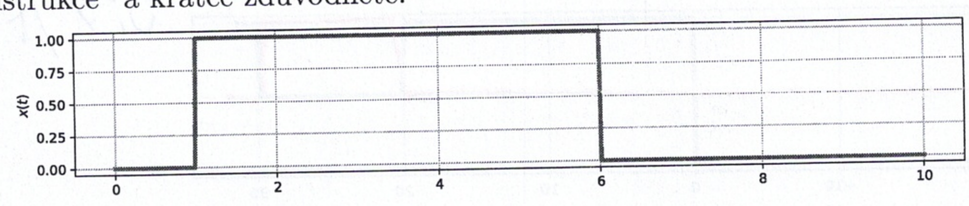
viz A

modul $= \dfrac{1000}{3 \cdot 2000} = \dfrac{1}{6}$

argument = viz A

$H(j\omega_1) = \dfrac{1}{6}$

Příklad 19 Signál se spojitým časem je pravoúhlý impuls s délkou 5 μs. Tento signál je vzorkován na vzorkovací frekvenci $F_s = 5$ MHz. Nakreslete do stejného obrázku výsledek sekvence "vzorkování $\to$ rekonstrukce" a krátce zdůvodněte.

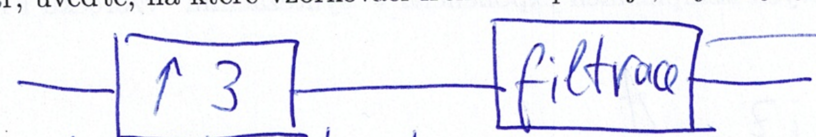


viz A

---

viz A

Příklad 20 Diskrétní signál na vzorkovací frekvenci $F_{s1} = 8$ kHz je potřeba převést na vzorkovací frekvenci $F_{s2} = 24$ kHz. Napište nebo nakreslete schéma, jaký je korektní postup. Pokud použijete nějaký filtr, uveďte, na které vzorkovací frekvenci pracuje, a jaká je jeho frekvenční charakteristika.



na $F_{s2} = 24$ kHz

DP do 4 kHz

čas oblast: sinc procházející nulou 1x za 3 vzorky

nadvzorkování, 2 nulové vzorky po [illegible] původním

Semestrální zkouška ISS/ISSk, řádný termín, 9.1.2023, skupina D

Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: .... REF

(prosím čitelně!)

Příklad 1 Signál je reálný a má délku $N = 512$ vzorků. Známe koeficient jeho Diskrétní Fourierovy transformace (DFT): $X[3] = 1 + j$. Napište, jaký/é další koeficient/y DFT tím pádem známe a jaká/é je/jsou jeho/jejich hodnota/y.

viz A

$X[509] = 1 - j$

Příklad 2 Číslicový filtr má dva nulové body: $n_1 = -0.98$ a $n_2 = 1$ a dva póly: $p_1 = 0.98j$ a $p_2 = -0.98j$. Určete modul jeho frekvenční charakteristiky na normované kruhové frekvenci $\omega_1 = \frac{\pi}{2}$ rad.

viz C

$|H(e^{j\omega_1})| =$ 50

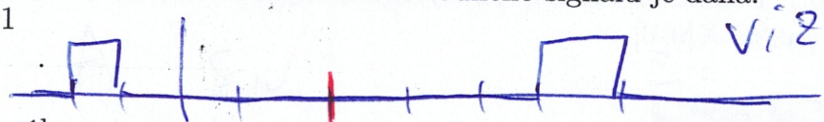
Příklad 3 Jsou dány dva FIR filtry s impulsními odezvami $h_1 = [1 \;\; 1 \;\; 1]$ a $h_2 = [1 \;\; -1 \;\; 1]$. Tyto filtry jsou spojeny paralelně (vedle sebe). Určete impulsní odezvu výsledného filtru.

viz C

$h[n] = [2 \;\; 0 \;\; 2]$

Příklad 4 Funkce hustoty pravděpodobnosti stacionárního náhodného signálu je dána:

$$p(x) = \begin{cases} 0.5 & \text{pro } -2 \le x \le -1 \\ 0.5 & \text{pro } 5 \le x \le 6 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$



viz A

Určete střední hodnotu tohoto signálu.

$a = 0{,}5\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{-1} + 0{,}5\left[\frac{x^2}{2}\right]_{5}^{6} = 0{,}5\left[\frac{1}{2} - 2 + 18 - 12{,}5\right] = 0{,}5 \cdot 4 = \underline{\underline{2}}$

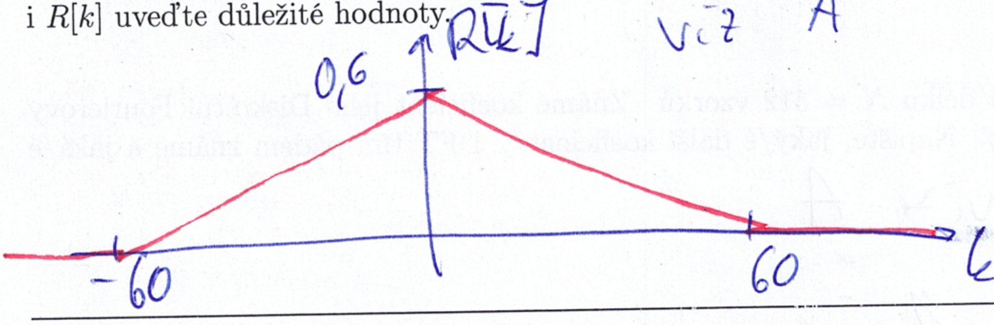
Příklad 5 Napište, zda pro stacionární náhodný signál se střední hodnotou $a = 0$ existuje vztah mezi jeho rozptylem D a výkonem P. Pokud ano, krátce dokažte nebo zdůvodněte.

viz A

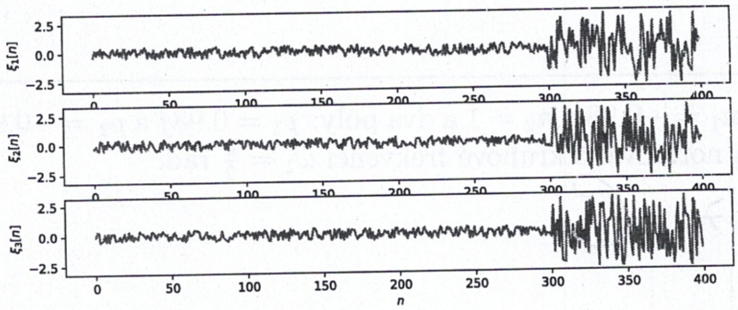
Příklad 6 Diskrétní signál o délce $N = 100$ je dán: $x[n] = \begin{cases} 1 & \text{pro } 0 \leq n < 60 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$.

Nakreslete graf všech jeho nenulových autokorelačních koeficientů. Použijte vychýlený odhad. Na osách k i $R[k]$ uveďte důležité hodnoty.

viz A



Příklad 7 Na obrázku jsou 3 realizace náhodného signálu. Určete, zda je tento signál stacionární a krátce zdůvodněte.



nestacionární

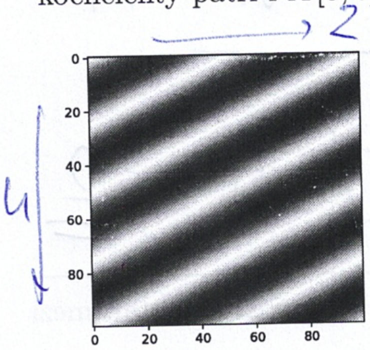
viz C

Příklad 8 Obrázek o rozměrech $K = 100$ krát $L = 100$ pixelů obsahuje uprostřed jeden světlý pixel: $x[50, 50] = 1$, ostatní jsou nulové. Napište nebo nakreslete, jak bude vypadat obrázek po filtrování 2D-filtrem (maskou, konvolučním jádrem) o rozměrech 5×5, jehož všechny prvky mají hodnotu $\frac{1}{25}$.

viz A

Příklad 9 Obrázek o rozměrech $K = 100$ krát $L = 100$ pixelů má hodnoty 0 (černá) až 1 (bílá). Určete, které koeficienty $X[m, n]$ jeho 2D-DFT budou nenulové a krátce zdůvodněte. Uvažujte hodnoty m a n pouze do 50ti. Pomůcka: všechny pixely obrázku jsou nezáporné, takže pečlivě zvažte, zda mezi nenulové koeficienty patří i $X[0, 0]$.

viz A



$X[0,0]$ a $X[4,2]$

Příklad 10 Jsou dány dva signály se spojitým časem: $x_1(t) = 0.7\cos(6\pi t)$, $x_2(t) = \delta(t)$ (Diracův impuls). Vypočtěte

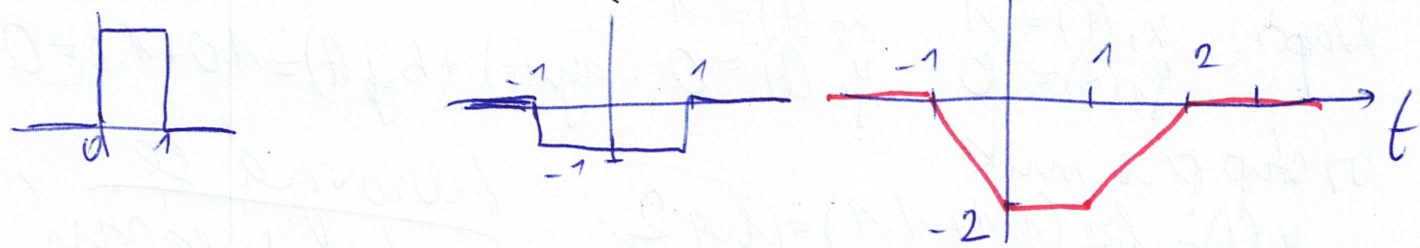
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t)x_2(t)dt = 0{,}7$$

viz A

D

Příklad 11 Nakreslete výsledek konvoluce dvou signálů se spojitým časem: $y(t) = x_1(t) \star x_2(t)$.

$$x_1(t) = \begin{cases} 2 & \text{pro } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases} \quad \text{a} \quad x_2(t) = \begin{cases} -1 & \text{pro } -1 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$$



Příklad 12 Periodický signál se spojitým časem je dán: $x(t) = 2e^{-0.5j}e^{j1000\pi t}$. Napište indexy a hodnoty všech nenulových koeficientů jeho Fourierovy řady (FŘ). Pomůcka: zvažte dobře, zda pro tento signál platí $c_k = c^\star_{-k}$.

viz A

$c_1 = 2e^{j0,5}$

Příklad 13 Signál se spojitým časem je obdélník

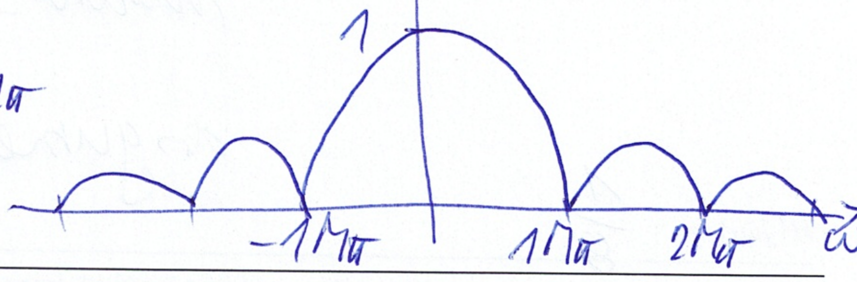
viz A

$$x(t) = \begin{cases} 500000 & \text{pro } -1\ \mu s \leq t \leq +1\ \mu s \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}.$$

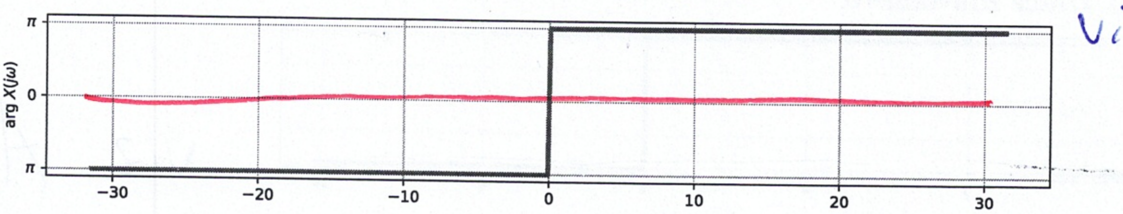
Nakreslete průběh modulu jeho spektrální funkce $|X(j\omega)|$. Na osách uveďte důležité hodnoty.

Dne $= 500\,000 \cdot 2 \cdot 10^{-6} = 1$

$\omega_x = \dfrac{2\pi}{2 \cdot 10^{-6}} = \pi \cdot 10^6 = 1M\pi$



Příklad 14 Na obrázku je průběh argumentu spektrální funkce $\arg X(j\omega)$ signálu $x(t)$. Do téhož obrázku nakrelete průběh argumentu spektrální funkce signálu s opačným znaménkem: $-x(t)$.



viz A

Příklad 15 Odvoďte Parsevalův teorém, určující výkon signálu z jeho spektra, pro Fourierovu řadu. Pomůcka: určete a sečtěte výkony jednotlivých komplexních exponenciál v "syntezačním" vzorečku FŘ.

viz A

Příklad 16 Chování systému se spojitým časem je dáno: $y(t) = \log x(t)$. Dokažte, že tento systém není lineární tak, že najdete signály $x_1(t)$ a $x_2(t)$, pro které neplatí definice linearity $ax_1(t) + bx_2(t) \rightarrow ay_1(t) + by_2(t)$. Pomůcka: nejlépe se Vám bude pracovat s konstantními signály.

$a = 1 \quad b = 1$

Např: $x_1(t) = 1 \quad x_2(t) = 1$

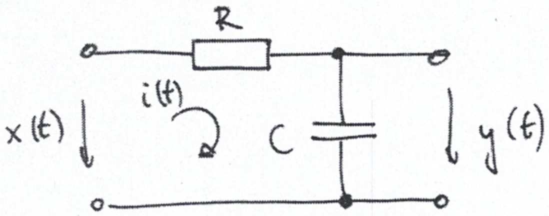
$y_1(t) = 0 \quad y_2(t) = 0 \quad ay_1(t) + by_2(t) = 1.0 + 1.0 = 0$

výstup pro mix:

$y(t) = \log(1.1 + 1.1) = \log 2$

nerovná se, nelineární

Příklad 17 Pro systém se spojitým časem na obrázku sestavte diferenciální rovnici. Můžete použít konstantu $\tau = RC$.



viz A

Příklad 18 Přenosová funkce $H(s)$ systému se spojitým časem má jeden nulový bod: $n_1 = 0$ a dva póly: $p_1 = -4 + 1000j$, $p_2 = -4 - 1000j$. Určete hodnotu frekvenční charakteristiky tohoto systému na kruhové frekvenci $\omega_1 = 1000$ rad/s.

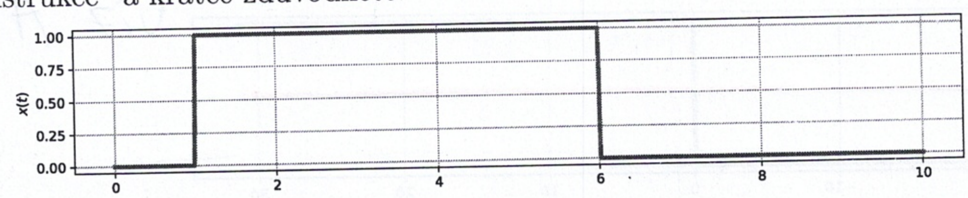
viz A

modul $= \dfrac{1000}{4 \cdot 2000} = \dfrac{1}{8}$

argument viz A

$H(j\omega_1) = \dfrac{1}{8}$

Příklad 19 Signál se spojitým časem je pravoúhlý impuls s délkou 5 μs. Tento signál je vzorkován na vzorkovací frekvenci $F_s = 5$ MHz. Nakreslete do stejného obrázku výsledek sekvence "vzorkování → rekonstrukce" a krátce zdůvodněte.



viz A

Příklad 20 Diskrétní signál na vzorkovací frekvenci $F_{s1} = 8$ kHz je potřeba převést na vzorkovací frekvenci $F_{s2} = 16$ kHz. Napište nebo nakreslete schéma, jaký je korektní postup. Pokud použijete nějaký filtr, uveďte, na které vzorkovací frekvenci pracuje, a jaká je jeho frekvenční charakteristika.

→ [↑2] → [filtrace] →

na $F_{s2} = 16$ kHz

DP do 4 kHz

čas oblast: sinc procházející nulou 1x za 2 vzorky

1 nulový vzorek po + původním