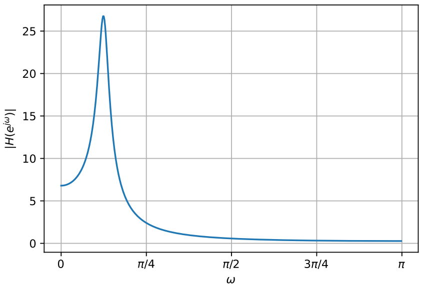
Semestrální zkouška ISS/ISSk, 2. opravný termín, 31.1.2024, skupina B

Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: ....
(prosím čitelně!)

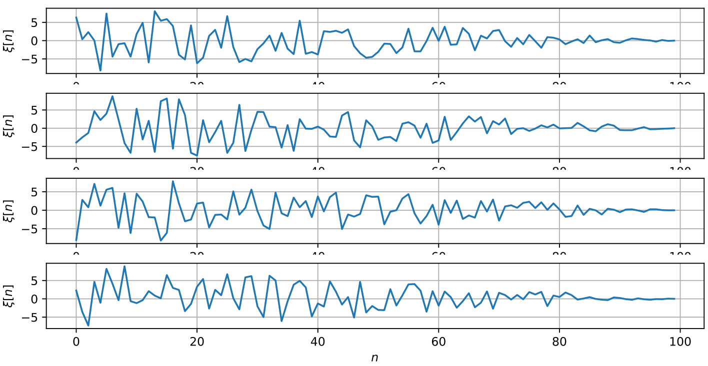
Příklad 1 Dokažte, že jsou báze diskrétní Fourierovy transformace (DFT) pro $k_1 = 2$ a $k_2 = 4$ ortogonální. Můžete pracovat pro obecný nebo jakýkoliv zvolený počet vzorků N.

Příklad 2 Napište kód v jazyce C (ne v Pythonu, ne pseudokód) pro implementaci IIR filtru 2. řádu s přenosovou funkcí $H(z) = \frac{b_0+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}$. Filtr musí být implementován jako funkce, jejímž vstupem je jeden vstupní vzorek $x[n]$ a výstupem jeden výstupní vzorek $y[n]$. Koeficienty jsou již v proměnných `b0, b1, b2, a1, a2`.

Příklad 3 Na obrázku je modul frekvenční charakteristiky IIR filtru 2. řádu s přenosovou funkcí $H(z) = \frac{1+b_1z^{-1}+b_2z^{-2}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}$. Víte, že oba dva nulové body tohoto filtru jsou nula: $n_{1,2} = 0$. Odhadněte hodnoty pólů $p_{1,2}$ a zakreslete je do komplexní roviny z. Filtr je stabilní.



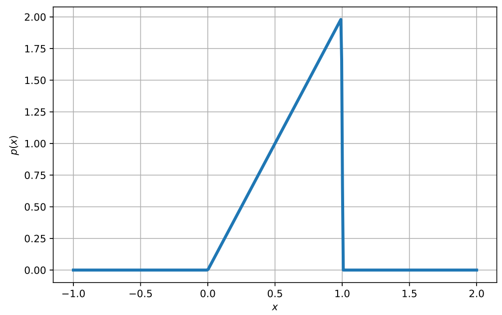
Příklad 4 Na obrázcích jsou čtyři realizace náhodného signálu. Určete, zda je signál stacionární a krátce zdůvodněte.



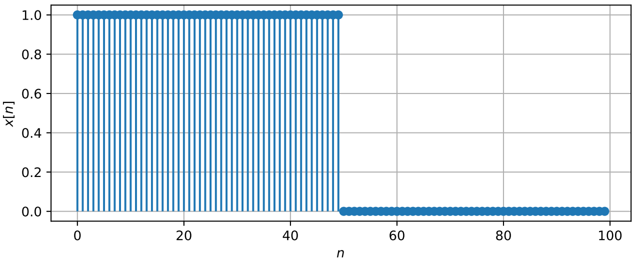
Příklad 5 Stacionární náhodný signál má pět diskrétní obor hodnot: $X_1 = -5$, $X_2 = -4, X_3 = -3, X_4 = -2, X_1 = -1$ s s pravděpodobnostmi $p(X_1) = 0.1$, $p(X_2) = 0.1$, $p(X_3) = 0.1$, $p(X_4) = 0.1$, $p(X_5) = 0.6$. Určete jeho střední hodnotu.

Příklad 6 Na obrázku je funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti stacionárního náhodného signálu. Určete následující pravděpodobnost:

$P(\xi[n] > 0.5) = \ldots\ldots\ldots$



Příklad 7 Na obrázku je průběh náhodného signálu $x[n]$ o délce $N = 100$ vzorků (nenulových vzorků je 50). Nakreslete vychýlený odhad jeho autokorelačních koeficientů $R[k]$ pro k od -60 do +60.



Příklad 8 Ve vektoru `x` o délce `N = 200` jsou vzorky ergodického náhodného signálu. Napište kód v C, Python/Numpy nebo pseudokód pro odhad spektrální hustoty výkonu $G_x(e^{j\omega})$ přímo ze signálu pomocí DFT. Výsledek generujte pro normované kruhové frekvence ω od 0 rad do π rad.

Příklad 9 Na $\Omega = 4000$ realizacích náhodného procesu byla naměřena tabulka (sdružený histogram) hodnot mezi vzorky n_1 a n_2. Převeďte ji na sdruženou funkci hustoty rozdělení pravděpodobnosti $p(x_1, x_2, n_1, n_2)$. Hodnoty můžete psát do stejné tabulky.

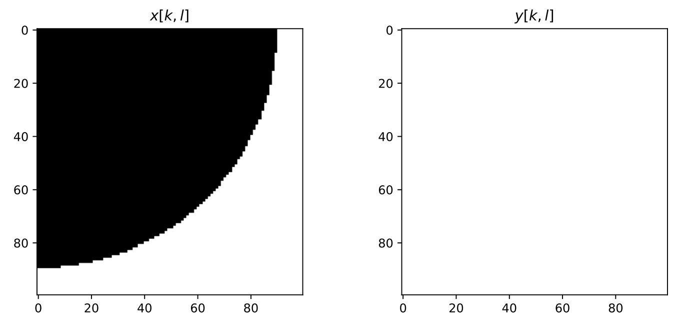
intervaly x_1 v n_1	intervaly x_2 v n_2: [-20, -10]	[-10, 0]	[0, 10]	[10, 20]
[10, 20]	0	0	0	1000
[0, 10]	0	1000	0	0
[-10, 0]	0	1000	1000	0
[-20, -10]	0	0	0	0

Příklad 10 $x[n]$ o délce N vzorků je ergodický náhodný signál. Napište jakoukoliv formou (matematicky, pseudokód), jak ověříte, že se jedná o bílý šum.

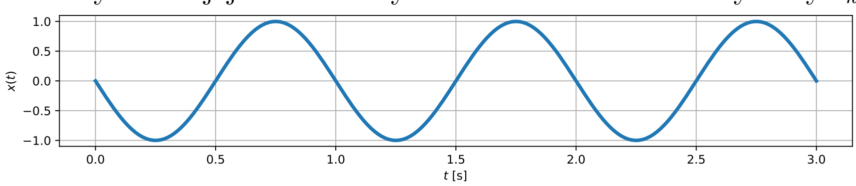
Příklad 11 Periodický signál s diskrétním časem s periodou $N_1 = 20$ vzorků má vždy 10 vzorků s hodnotou +1, pak 10 vzorků s hodnotou -1. K tomuto signálu je přimíchán šum se středním výkonem $P_e = 10$. Určet poměr signálu k šumu (SNR) v dB.

Příklad 12 Obrázek $x[k,l]$ má 2D-DFT $X[m,n]$. Napište, jak se změní hodnoty 2D-DFT, pokud v obrázku zvětšíme kontrast: $y[k,l] = c\,x[k,l]$, kde $c > 1$. Předpokládejte, že žádná z hodnot $y[k,l]$ nebude "klipována" na maximální úroveň.

Příklad 13 Je dán 2D filtr (maska, konvoluční jádro): $h[k,l] = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 & 0 & +1 \\ -1 & 0 & +1 \\ -1 & 0 & +1 \end{bmatrix}$. Pro obrázek $x[k,l]$ nakreslete výsledek operace $y = |x[k,l] \star h[k,l]|$ (tedy 2D konvoluce a absolutní hodnota). Pixely s hodnotou 0 jsou zde bílé a s hodnotou 1 černé.



Příklad 14 Na obrázku je cosinusovka se spojitým časem $x(t)$ s periodou $T_1 = 1$. Napište indexy a hodnoty všech jejích nenulových koeficientů Fourierovy řady c_k.



Příklad 15 Periodický signál se spojitým časem má pět nenulových koeficientů Fourierovy řady: $c_0 = 5,\quad c_1 = 4e^{-\frac{1}{3}j},\quad c_2 = 2e^{-\frac{1}{2}j},\quad c_{-1} = c_1^\star,\quad c_{-2} = c_2^\star$. Určete střední výkon tohoto signálu.

$P_s =$ ....

Příklad 16 Signál se spojitým časem je posunutý Diracův impuls $x(t) = 7\delta(t-10)$. Nakreslete spektrální funkci tohoto signálu — modulovou i arguemntovou část, pečlivě vyznačte hodnoty na všech osách.

Příklad 17 Chování systému se spojitým časem je popsáno rovnicí: $y(t) = x(t-3)$.
Napište, zda se jedná o kauzální nebo nekauzální systém a krátce zdůvodněte.

Příklad 18 Přenosová funkce systému se spojitým časem je $H(s) = \frac{s-1}{0.5s+1}$.
Napište diferenciální rovnici popisující tento systém.

Příklad 19 Systém se spojitým časem má dva nulové body: $n_1 = 0$ a $n_2 = 0$ a dva póly: $p_1 = -1-1000j$ a $p_2 = -1+1000j$. Určete modul jeho frekvenční charakteristiky na kruhové frekvenci $\omega_1 = 1000$ rad/s.

$|H(j\omega_1)| =$ ....

Příklad 20 Signál se spojitým časem se bude vzorkovat na vzorkovací frekvenci $F_s = 16$ kHz, ale nevíme, zda je jeho spektrum frekvenčně omezené, bude tedy potřeba použít anti-aliasingový filtr. Nakreslete frekvenční charakteristiku tohoto filtru – na frekvenční ose můžete použít buď kruhové frekvence v rad/s nebo běžné frekvence v Hz.