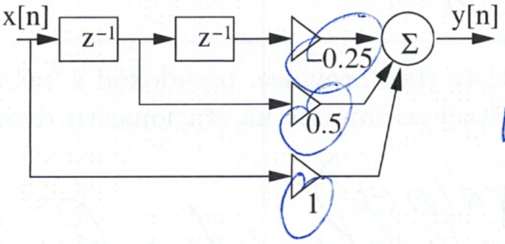
Semestrální zkouška ISS, 2. opravný termín, 4.2.2025, skupina A

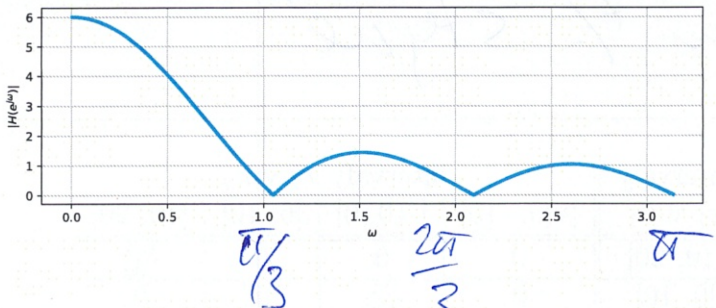
Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: ....
(prosím čitelně!)

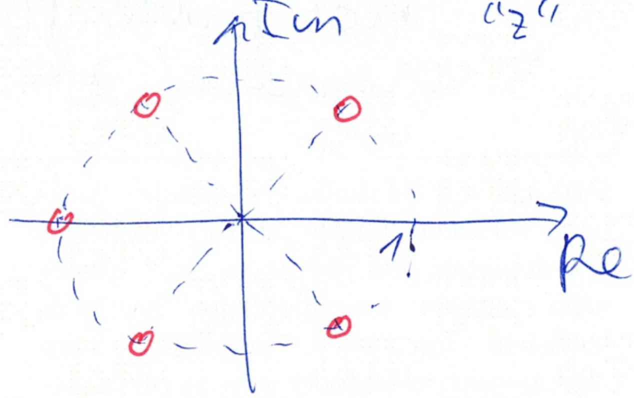
Příklad 1 Číslicový filtr je zadán schématem. Napište nebo nakreslete jeho impulsní odezvu $h[n]$.



$h[n] = [1 \quad 0.5 \quad -0.25]$
pro $n = 0, 1, 2$; 0 jinde

Příklad 2 Na obrázku je modulová frekvenční charakteristika číslicového filtru $|H(e^{j\omega})|$. Nakreslete rovinu z a do ní všechny nulové body tohoto filtru.





Příklad 3 Číslicový filtr je zadán kódem v jazyce C. Určete a krátce zdůvodněte, zda je tento filtr stabilní

```
float filter(float xn) {
  static float yn1 = 0.0, yn2 = 0.0;
  yn = xn - 0.81 * yn2;
  yn2 = yn1; yn1 = yn;
  return yn;
}
```

$y[n] = x[n] - 0{,}81\, y[n-2]$, falče

$$H(z) = \frac{1}{1 + 0{,}81 z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2 + 0{,}81} = \frac{z^2}{(z - 0{,}9j)(z + 0{,}9j)}$$

$|0{,}9j| < 1$
$|-0{,}9j| < 1$ $\Rightarrow$ Stabilní

Příklad 4 Diferenční rovnice číslicového filtru je:
$y[n] = x[n] + 0.5\, x[n-1] + 0.25\, x[n-2] - 0.16\, y[n-1] + 0.24\, y[n-2]$. Napište jeho přenosovou funkci.

$$H(z) = \frac{1 + 0{,}5 z^{-1} + 0{,}25 z^{-2}}{1 + 0{,}16 z^{-1} - 0{,}24 z^{-2}}$$

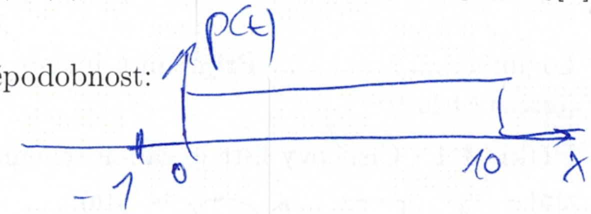
Příklad 5 V tabulce jsou dány dva diskrétní signály o délce $N = 3$. Vypočtěte a zapište všechny nenulové vzorky jejich lineární konvoluce $y[n] = x_1[n] \star x_2[n]$. Pozor, tabulku budete možná muset rozšířit.

n	0	1	2	3	4
$x_1[n]$	1	2	3		
$x_2[n]$	2	0	-1		
$y[n]$	2	4	5	-2	-3

Příklad 6 Funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti (PDF) $p(x)$ stacionárního náhodného signálu $\xi[n]$ je dána

$$p(x) = \begin{cases} 0.1 & \text{pro } 0 \leq x < 10 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases} .$$

Určete následující pravděpodobnost:



$\mathcal{P}(\xi[n] < -1) = \int p(x)\,dx = \emptyset$

Příklad 7 Vektor `x` o `N` vzorcích obsahuje náhodný signál. Vysvětlete (text, rovnice, pseudokód a/nebo schéma), jak ověříte, že se jedná o **stacionární** náhodný signál. Stačí se zaměřit na stacionaritu dvou skalárních nebo funkčních popisů náhodného signálu.

1. rozdělení na segmenty (rámce)
2. v každém segmentu odhad číselných nebo funkčních charakteristik (stř. hodnota, rozptyl, distr. funkce, PDF, ...)
3. srovnání, zda jsou +/- stejné

Příklad 8 Tabulka obsahuje hodnoty sdružené funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti $p(x_1, x_2, n_1, n_2)$ náhodného signálu. Spočítejte korelační koeficient $R[n_1, n_2]$. Pomůcka: Jako reprezentativní hodnoty x_1 a x_2 při numerickém výpočtu použijte středy intervalů v tabulce.

intervaly x_1 v n_1	intervaly x_2 v n_2: [-20, -10]	[-10, 0]	[0, 10]	[10, 20]
[10, 20]	0	0	0	$\frac{0.5}{100}$
[0, 10]	0	$\frac{0.2}{100}$	0	0
[-10, 0]	0	0	$\frac{0.2}{100}$	0
[-20, -10]	$\frac{0.1}{100}$	0	0	0

$R[n_1, n_2] = \iint_{x_1 x_2} x_1 x_2 \, p(x_1, x_2, n_1, n_2)\, dx_1 dx_2 =$ "součet objemů sloupečků" $= \cancel{10 \cdot 10} \dfrac{(-15)(-15) \cdot 0{,}1 + 5(-5) \cdot 0{,}2 + (-5) \cdot 5 \cdot 0{,}2 + 15 \cdot 15 \cdot 0{,}5}{\cancel{100}} =$

$= 22{,}5 - 5 - 5 + 112{,}5 = \underline{125}$

Příklad 9 Máte k dispozici hodnoty autokorelačních koeficientů $R[k]$ náhodného singálu. Jak dostanete jeho spektrální hustotu výkonu (PSD) ? Můžete vysvětlit textem, rovnicí nebo kódem.

pomocí DTFT: $G(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R[k] e^{-jk\omega}$, kterou spočítám pomocí FFT.

Příklad 10 Vektor `x` o `N` vzorcích obsahuje jednu realizaci ergodického náhodného signálu. Napište kód v C, Python/Numpy nebo pseudokód pro výpočet vychýlených (biased) autokorelačních koeficientů $R[0] \ldots R[10]$.

```
for k in range(11):
    R[k] = np.sum(x[0:N-k] * x[k:N]) / N
```

okraje neřeším...

A

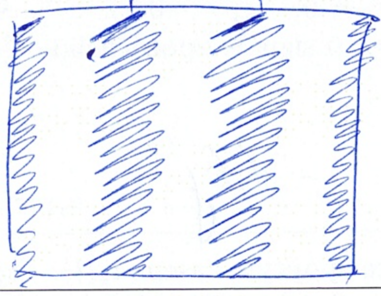
Příklad 11 Napište kód v C pro 2D konvoluci. Předpokládejte, že je obrázek v poli x o rozměrech K × L a konvoluční jádro (maska) v poli h o rozměrech I × I, kde I je liché. Výsledek nechť je v poli y o rozměrech K × L, které už je alokováno. Okraje obrázku řešte nejjednodušším možným způsobem nebo je neřešte vůbec.

```
for (k = I/2; k < K - I/2; k++)
  for (l = I/2; l < L - I/2; l++) {
    sum = 0.0;
    for (i = 0; i < I; i++)
      for (j = 0; j < I; j++)
        sum += h[i,j] * x[k-i+I/2, l-j+I/2];
    y[k,l] = sum;
  }
```

Příklad 12 Obrázek $x[k,l]$ o rozměrech 100 × 100 má pro $m,n \le 50$ pouze dva nenulové koeficienty 2D-DFT $|X[m,n]|$: $X[0,0]$ a $X[0,3]$.
Nakreslete, jak bude takový obrázek přibližně vypadat. Argumenty (fáze) neřešte.

střední hodnota

3 "vlny" vodorovně



Příklad 13 Napište konvoluční jádro (masku) o rozměrech 5 × 5 pro vyhlazení obrázku.

$\frac{1}{25} \cdot \left[\text{všude jedničky} \right]$

1/25 * np.ones(5,5)

Příklad 14 Popište (schéma, rovnice a/nebo text), jak lze realizovat 2D filtraci ve spektrální oblasti, tedy bez konvoluce. Vstupní obrázek nechť je $x[k,l]$, koeficienty filtru $h[k,l]$ a výstupní obrázek $y[k,l]$.

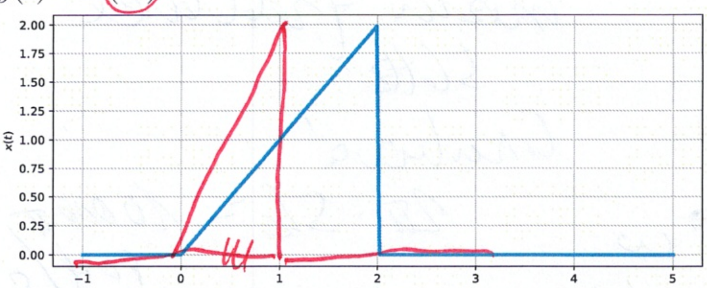
$x[k,l]$ — $\boxed{\text{2D-DFT}}$ — $X[m,n]$

násobení — $\boxed{\text{2D-IDFT}}$ → $y[k,l]$

$h[k,l]$ — $\boxed{\text{2D-DFT}}$ — $H[m,n]$

stačí udělat jen 1x.

Příklad 15 Na obrázku je signál se spojitým časem $x(t)$. Nakreslete do téhož obrázku signál $y(t) = x(2t)$.



zrychlený

Příklad 16 Je dána komplexní exponenciála se spojitým časem $x_1(t) = e^{j1000\pi t}$ a posunutý Diracův impuls $x_2(t) = \delta(t - 0.001)$. Napište vztah pro signál vzniklý jejich konvolucí $y(t) = x_1(t) \star x_2(t)$ a maximálně jej zjednodušte.

konvolce s Diracem je "kopírka s posunutím"

$x(t) * \delta(t-\tau) = x(t-\tau)$

$y(t) = e^{j1000\pi(t-0,001)} = e^{j1000\pi t}\, e^{j} = \underline{-1 \cdot e^{j1000\pi t}}$

neboli tatáž komplex. exponenciála zpožděná, resp. předběhnutá o $\frac{1}{2}$ periody.

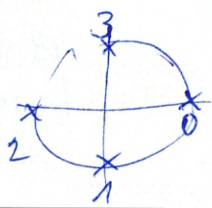
Příklad 17 Periodický sled obdélníkových impulsů: $x(t) = \begin{cases} 5 & \text{pro} \quad -0.5\ \mu s \le t \le +0.5\ \mu s \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

se základní periodou $T_1 = 2\ \mu s$ má následující koeficienty Fourierovy řady:

$c_0 = 2.5, \quad c_1 = 1.6, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = -0.53.$

Určete hodnoty koeficientů signálu zpožděného o $\frac{1}{4}$ periody: $y = x(t - 0.5\ \mu s)$.

$c_{yk} = c_{xk} \cdot e^{-jk\omega_1\tau} = c_{xk} \cdot e^{-jk\frac{2\pi}{2\cdot 10^{-6}} 0,5\cdot 10^{-6}} = c_{xk} \cdot e^{-jk\frac{\pi}{2}}$

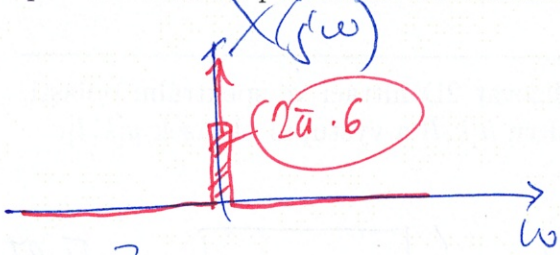


$c_{y0} =$ 2,5, $c_{y1} =$ $-1,6j$, $c_{y2} =$ 0, $c_{y3} =$ $-0,53j$

Příklad 18 Signály se spojitým časem $x_1(t)$, $x_2(t)$ mají spektrální funkce $X_1(j\omega)$, $X_2(j\omega)$. Napište, co bude platit pro spektrální funkci jejich konvoluce $y(t) = x_1(t) \star x_2(t)$.

$Y(j\omega) =$ $X_1(j\omega) * X_2(j\omega)$ ← konvoluce.

Příklad 19 Napište a nakreslete spektrální funkci $X(j\omega)$ stejnosměrného signálu $x(t) = 6$. Doporučuji provést kontrolu pomocí inverzní Fourierovy transformace.



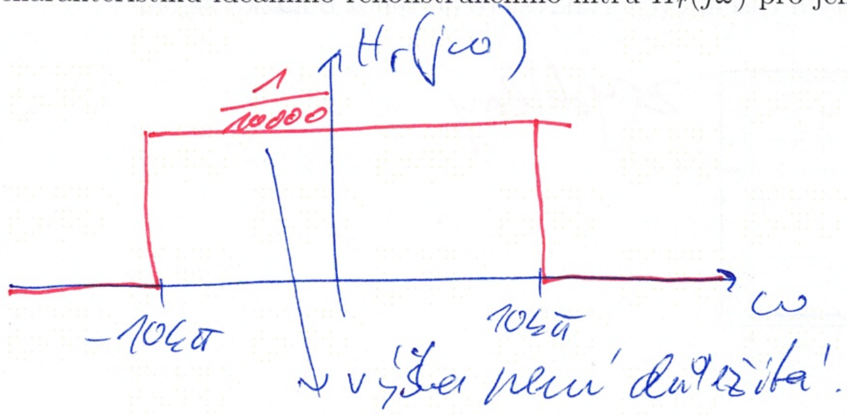
Diracův impuls s mocností 12π

$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega =$

$= \frac{1}{2\pi} \int \delta(\omega) \cdot 2\pi \cdot 6 \cdot e^{j0} d\omega =$

$= \frac{1}{2\pi} 2\pi \cdot 6 = 6$

Příklad 20 Diskrétní signál má vzorkovací frekvenci $F_{s1} = 10$ kHz. Napište a/nebo nakreslete frekvenční charakteristiku ideálního rekonstrukčního filtru $H_r(j\omega)$ pro jeho převod na signál se spojitým časem.



mezní frekvence 5kHz

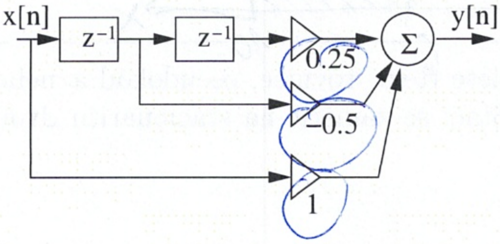
kruhová

$2\pi \cdot 5k = 10\,000\pi$ rad/s

Semestrální zkouška ISS, 2. opravný termín, 4.2.2025, skupina B

Login: .... Příjmení a jméno: .... Podpis: ....
(prosím čitelně!)

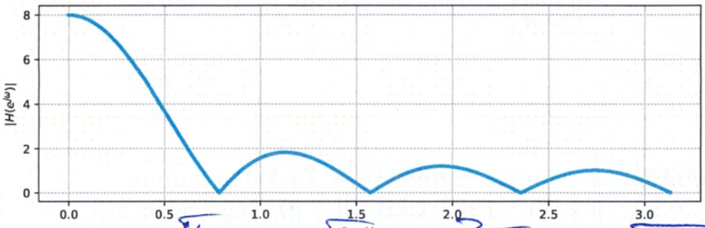
Příklad 1 Číslicový filtr je zadán schématem. Napište nebo nakreslete jeho impulsní odezvu $h[n]$.



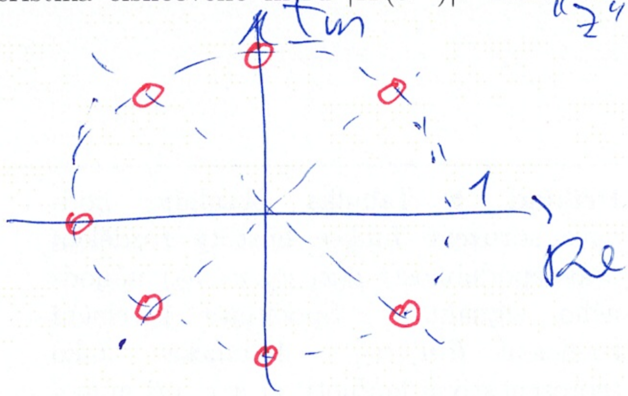
$h[n] = [1 \;\; -0{,}5 \;\; 0{,}25]$

pro $n = 0, 1, 2$; 0 jinde

Příklad 2 Na obrázku je modulová frekvenční charakteristika číslicového filtru $|H(e^{j\omega})|$. Nakreslete rovinu z a do ní všechny nulové body tohoto filtru.



$\frac{\pi}{4}$ $\frac{\pi}{2}$ $\frac{3\pi}{4}$ π



Příklad 3 Číslicový filtr je zadán kódem v jazyce C. Určete a krátce zdůvodněte, zda je tento filtr stabilní

```
float filter(float xn) {
  static float yn1 = 0.0, yn2 = 0.0;
  yn = xn - 4 * yn2;
  yn2 = yn1; yn1 = yn;
  return yn;
}
```

$y[n] = x[n] - 4\,y[n-2]$

$$H(z) = \frac{1}{1+4z^{-2}} = \frac{z^2}{z^2+4} = \frac{z^2}{(z-2j)(z+2j)}$$

$|2j| > 1$

$|-2j| > 1$

$\Rightarrow$ nestabilní

Příklad 4 Diferenční rovnice číslicového filtru je:
$y[n] = x[n] + 0.5\,x[n-1] + 0.25\,x[n-2] - 0.16\,y[n-1] + 0.24\,y[n-2]$. Napište jeho přenosovou funkci.

$$H(z) = \frac{1+0{,}5z^{-1}+0{,}25z^{-2}}{1+0{,}16z^{-1}-0{,}24z^{-2}}$$

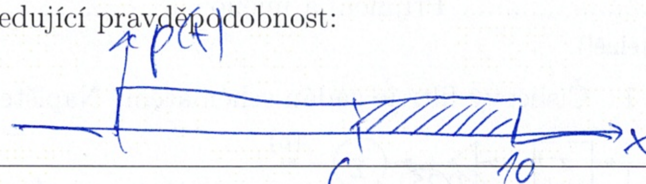
Příklad 5 V tabulce jsou dány dva diskrétní signály o délce $N = 3$. Vypočtěte a zapište všechny nenulové vzorky jejich lineární konvoluce $y[n] = x_1[n] \star x_2[n]$. Pozor, tabulku budete možná muset rozšířit.

n	0	1	2	3	4
$x_1[n]$	1	2	3		
$x_2[n]$	2	0	-2		
$y[n]$	2	4	4	-4	-6

Příklad 6 Funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti (PDF) $p(x)$ stacionárního náhodného signálu $\xi[n]$ je dána

$$p(x) = \begin{cases} 0.1 & \text{pro } 0 \le x < 10 \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}.$$

Určete následující pravděpodobnost:



$\mathcal{P}(\xi[n] > 6) = \int_6 p(t)\,dt = 0{,}4$

Příklad 7 Vektor `x` o `N` vzorcích obsahuje náhodný signál. Vysvětlete (text, rovnice, pseudokód a/nebo schéma), jak ověříte, že se jedná o **stacionární** náhodný signál. Stačí se zaměřit na stacionaritu dvou skalárních nebo funkčních popisů náhodného signálu.

viz A

Příklad 8 Tabulka obsahuje hodnoty sdružené funkce hustoty rozdělení pravděpodobnosti $p(x_1, x_2, n_1, n_2)$ náhodného signálu. Spočítejte korelační koeficient $R[n_1, n_2]$. Pomůcka: Jako reprezentativní hodnoty x_1 a x_2 při numerickém výpočtu použijte středy intervalů v tabulce.

intervaly	intervaly x_2 v n_2			
x_1 v n_1	[-20, -10]	[-10, 0]	[0, 10]	[10, 20]
[10, 20]	0	0	0	$\frac{0.5}{100}$
[0, 10]	0	$\frac{0.2}{100}$	0	0
[-10, 0]	0	0	$\frac{0.2}{100}$	0
[-20, -10]	$\frac{0.1}{100}$	0	0	0

viz A

Příklad 9 Máte k disposici hodnoty autokorelačních koeficientů $R[k]$ náhodného singálu. Jak dostanete jeho spektrální hustotu výkonu (PSD) ? Můžete vysvětlit textem, rovnicí nebo kódem.

viz A

Příklad 10 Vektor `x` o `N` vzorcích obsahuje jednu realizaci ergodického náhodného signálu. Napište kód v C, Python/Numpy nebo pseudokód pro výpočet vychýlených (biased) autokorelačních koeficientů $R[0] \ldots R[10]$.

viz A

B

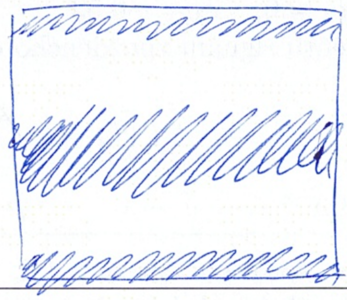
Příklad 11 Napište kód v C pro 2D konvoluci. Předpokládejte, že je obrázek v poli `x` o rozměrech `K` $\times$ `L` a konvoluční jádro (maska) v poli `h` o rozměrech `I` $\times$ `I`, kde `I` je liché. Výsledek nechť je v poli `y` o rozměrech `K` $\times$ `L`, které už je alokováno. Okraje obrázku řešte nejjednodušším možným způsobem nebo je neřešte vůbec.

viz A

Příklad 12 Obrázek $x[k,l]$ o rozměrech 100×100 má pro $m, n \leq 50$ pouze dva nenulové koeficienty 2D-DFT $|X[m,n]|$: $X[0,0]$ a $X[2,0]$.
Nakreslete, jak bude takový obrázek přibližně vypadat. Argumenty (fáze) neřešte.

střední hodnota

2 "vlny" svisle



Příklad 13 Napište konvoluční jádro (masku) o rozměrech 5×5 pro vyhlazení obrázku.

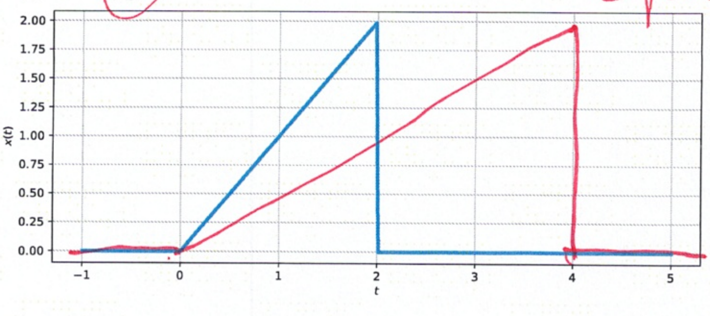
viz A

Příklad 14 Popište (schéma, rovnice a/nebo text), jak lze realizovat 2D filtraci ve spektrální oblasti, tedy bez konvoluce. Vstupní obrázek nechť je $x[k,l]$, koeficienty filtru $h[k,l]$ a výstupní obrázek $y[k,l]$.

viz A

Příklad 15 Na obrázku je signál se spojitým časem $x(t)$. Nakreslete do téhož obrázku signál $y(t) = x(\frac{t}{2})$.

zpomalený



Příklad 16 Je dána komplexní exponenciála se spojitým časem $x_1(t) = e^{j1000\pi t}$ a posunutý Diracův impuls $x_2(t) = \delta(t - 0.001)$. Napište vztah pro signál vzniklý jejich konvolucí $y(t) = x_1(t) \star x_2(t)$ a maximálně jej zjednodušte.

viz A

Příklad 17 Periodický sled obdélníkových impulsů: $x(t) = \begin{cases} 5 & \text{pro} \quad -0.5\ \mu\text{s} \le t \le +0.5\ \mu\text{s} \\ 0 & \text{jinde} \end{cases}$

se základní periodou $T_1 = 2\ \mu$s má následující koeficienty Fourierovy řady:

$c_0 = 2.5, \quad c_1 = 1.6, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = -0.53.$

Určete hodnoty koeficientů signálu zpožděného o $\frac{1}{4}$ periody: $y = x(t - 0.5\ \mu\text{s})$.

viz A

$c_{y0} =$ ...., $c_{y1} =$ ...., $c_{y2} =$ ...., $c_{y3} =$ ....

Příklad 18 Signály se spojitým časem $x_1(t)$, $x_2(t)$ mají spektrální funkce $X_1(j\omega)$, $X_2(j\omega)$. Napište, co bude platit pro spektrální funkci jejich součinu $y(t) = x_1(t) \cdot x_2(t)$.

viz A

$Y(j\omega) =$ ....

Příklad 19 Napište a nakreslete spektrální funkci $X(j\omega)$ stejnosměrného signálu $x(t) = 6$. Doporučuji provést kontrolu pomocí inverzní Fourierovy transformace.

viz A

Příklad 20 Diskrétní signál má vzorkovací frekvenci $F_{s1} = 10$ kHz. Napište a/nebo nakreslete frekvenční charakteristiku ideálního rekonstrukčního filtru $H_r(j\omega)$ pro jeho převod na signál se spojitým časem.

viz A