TIN – cv. 1 – RJ (P.L., M.N. věta)

1. Dokažte, že $L_1 = \{a^n b^m a^n \mid m,n \geq 1\} \notin \mathcal{L}_3$, a to pomocí P.L.

Důkaz sporem:

- předp., že $L_1 \in \mathcal{L}_3$.
- Pak dle P.L.: $\exists k > 0 : \forall w \in L_1 : |w| \geq k \Rightarrow$
  $\exists x,y,z \in \{a,b\}^* : w = xyz \wedge y \neq \varepsilon \wedge |xy| \leq k \wedge \forall i \geq 0 : xy^iz \in L_1$
- Uvažujme libovolné $k > 0$ a zvolme $w = a^k b a^k \in L_1$,
  $|w| = 2k+1 \geq k \ (k>0)$
- Uvažme libovolné rozdělení x,y,z takové, že
  $w = a^k b a^k = xyz \wedge y \neq \varepsilon \wedge |xy| \leq k \wedge \forall i \geq 0 : xy^iz \in L_1$.
  Takové určitě existuje
- Zřejmě platí, že $x = a^{l_1}$, $y = a^{l_2}$, kde
  $0 \leq l_1 < k$, $1 \leq l_2 \leq k$, $1 \leq l_1 + l_2 \leq k$
- Zvolme $i = 0$: $xy^0z = a^{k-l_2} b a^k \in L_1$,
  tedy $k - l_2 = k$, což je spor, protože
  $l_2 \geq 1$ a tedy $k - l_2 < k$.

$\square$

$\underbrace{a^{l_1}}_{x}\underbrace{\cancel{a^{l_2}}}_{y}\underbrace{a^{k-l_1-l_2} b a^k}_{z}$

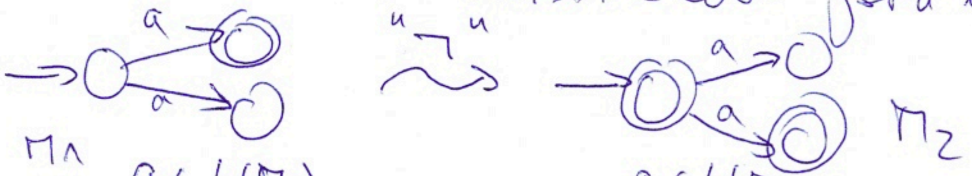
$i=0$

2. Uveďte základní kroky důkazu, že
$L_2 = \{ w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) \neq \#_b(w) \} \notin \mathcal{L}_3$ s využitím P.L.

Poznámka: Přímé použití P.L. je náročné — intuitivně: "nerovnost" se pumpováním poruší hůře, není tak "křehká" jako $=$.

- Důkaz sporem s využitím uz. vl. $\mathcal{L}_3$:
  - Předp., že $L_2 \in \mathcal{L}_3$.
  - Pak $\overline{L_2} \in \mathcal{L}_3$ (protože $\forall L \in \mathcal{L}_3 : \overline{L} \in \mathcal{L}_3$)
  - $\overline{L_2} = \{ w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w) \} \in \mathcal{L}_3$
  - Snadno se dospěje ke sporu s P.L. pro $w = a^k b^k$ (doma).

doplněk: Jak se ukáže uzavřenost $\mathcal{L}_3$ vůči $\neg$?
- každý r.j. lze reprezentovat úplným DKA a ten komplementovat záměnou konc. a nekonc. stavů.
- úplnost a determinističnost jsou klíčové — viz nepr.



$a \in L(M_1)$, $aa \notin L(M_1)$ $\quad$ $a \in L(M_2)$, $aa \notin L(M_2)$

3. Dokažte, že $L_3 = L_{3,1} \cup L_{3,2} \notin \mathcal{L}_3$, kde

$L_{3,1} = \{ c^i u \mid i \geq 2,\ u \in \{a,b\}^*,\ \#_a(u) = \#_b(u) \}$

$L_{3,2} = \{$ ——— " ——— $\#_a(u) = \#_b(u) + 2 \}$

| např.
cc aabb ∈ L_3
cc aaaabb ∈ L_3
⋮

Důkaz sporem (diskuse):

a) Stačí dokázat, že $L_{3,1} \notin \mathcal{L}_3 \wedge L_{3,2} \notin \mathcal{L}_3$?

NE: - Např. $L_1 = \{ w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w) \} \notin \mathcal{L}_3$,

$L_2 = \{$ —— " —— $\neq$ —— " —— $\} \notin \mathcal{L}_3$, ale

$L_1 \cup L_2 = \{a,b\}^* \in \mathcal{L}_3$.

- konečná uzavřenost vůči „$\cup$" říká, že

$\forall L_1, L_2 : L_1 \in \mathcal{L}_3 \wedge L_2 \in \mathcal{L}_3 \Rightarrow L_1 \cup L_2 \in \mathcal{L}_3$,

není zde „$\Leftrightarrow$".

Nepomůže ani kontrapozice:

$\forall L_1, L_2 : L_1 \cup L_2 \notin \mathcal{L}_3 \Rightarrow L_1 \notin \mathcal{L}_3 \vee L_2 \notin \mathcal{L}_3$.

což není

$\forall L_1, L_2 : L_1 \notin \mathcal{L}_3 \wedge L_2 \notin \mathcal{L}_3 \Rightarrow L_1 \cup L_2 \notin \mathcal{L}_3$.

b) Použijme tedy P.L. na L_3 jako celek.

i) Lze pak v rámci důkazu použít $w = c\,a^4b^4$?

NE: $w \notin L_3$.

ii) Lze zvolit $w = c^2a^2b^2$?

NE: sice $w \in L_3$, ale $|w| = 6$ a nelze říci, že $6 \geq k$!

iii) Lze zvolit $w = c^3a^4b^4$?

NE: sice $w \in L_3$, $|w| = 3+2k \geq k$, ale lze zvolit $x = cc$, $y = c$, $z = a^4b^4$ a pak pro $\forall i \geq 0$: $cc\,c^i\,a^4b^4 \in L_3$. Nenastane spor.

iv) - Zvolíme $w = c^2a^4b^4 \in L_3$, $|w| = 2+2k \geq k$.

- Víme, že $\exists\, x,y,z \in \{a,b,c\}^*$: $xyz = c^2a^4b^4 \wedge y \neq \varepsilon \wedge |xy| \leq k \wedge \forall i \geq 0: xy^iz \in L_3$.

- Uvažme libovolné $x,y,z \in \{a,b,c\}^*$ takové, že $xyz = c^2a^4b^4 \wedge y \neq \varepsilon \wedge |xy| \leq k$. Takové x,y,z určitě existují a mají jednu z následujících podob:

α) $y \in \{c, cc\}$: Pak pro $i = 0$ dojde k tomu, že xy^0z nebude obsahovat alespoň 2 „c" a tedy $xy^0z \notin L_3$.

lze sloučit

pro $i=0$ (i v β dleje pořád „c" pod 2).

β) $y \in \{c^{l_1} a^{l_2} \mid 1 \le l_1 \le 2,\ 1 \le l_2 \le k - l_1,\ l_1 + l_2 \le k\}$

Pak pro $i=2$ vznikne alternace znaků „c" a „a" takové, že poslední „c" není před prvním „a" a tedy $xy^2z \in L_3$.

γ) $y = a^l$, kde $1 \le l \le k-2$.

Pak ale pro $i=0$ bude $xy^0z = c^2 a^{k-l} b^k$.

Pak ale $xy^0z \notin L_3$, protože

$\#_a(xy^0z) \neq \#_b(xy^0z) \wedge \#_a(xy^0z) \neq \#_b(xy^0z)+2$,

neboť $\#_a(xy^0z) < \#_b(xy^0z)$, protože $l \ge 1$.

Tedy pro žádnou volbu x, y, z nelze splnit všechny 4 vnitřní podmínky P.L. SPOR.

DISKUSE: – Lze výše zvolit $i=2$?

NE: Lze zvolit $y = aa$. Pak $xy^2z = c^2 a^k aa b^k$, tedy $\#_a(xy^2z) = k+2 = \#_b(xy^2z)+2$

– Lze zvolit $i=3$?

NE: lze zvolit $y = a$ a pak opět $\#_a(xy^3z) = \#_b(xy^3z)+2$.

- Lze ale volit $i \geq 4$, protože y již nelze zkrátit.

M.-N. věta

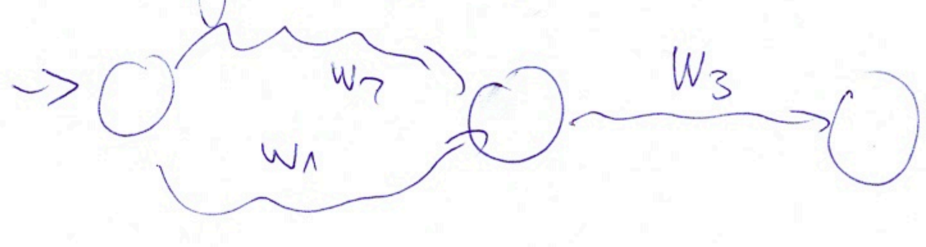
$\forall L \in \mathcal{L}_3$ jsou ekvivalentní následující tvrzení:

a) L lze reprezentovat DKA

b) - L je sjednocení některých ekv. tříd pravé kongruence $\sim \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$, která má kon. index.

- $\sim \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ je pr. kongruencí jestliže $\forall w_1, w_2 \in \Sigma^*: \quad w_1 \sim w_2 \Rightarrow \forall w_3 \in \Sigma^*: \quad w_1 w_3 \sim w_2 w_3$

⌈ Intuice: ekv. třídy $\sim$ reprezentují příslušná vnitřní stavy nějakého DKA



⌊

c) - Relace prefix. ekv. vůči L, značí se $\sim_L$, má konečný index.

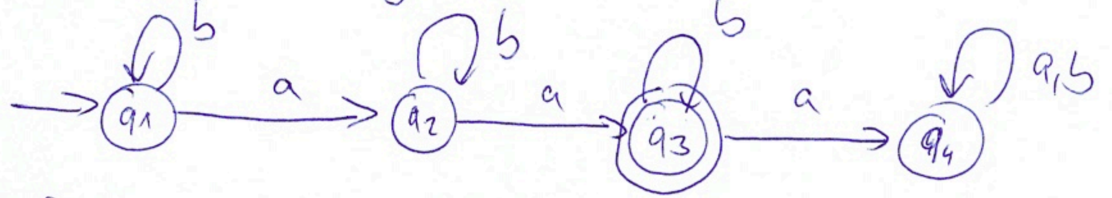
- $\sim_L \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$ je def. tak, že

$\forall w_1, w_2 \in \Sigma^*: \; w_1 \sim_L w_2 \iff \left(\forall w_3 \in \Sigma^*: (w_1 w_3 \in L \iff w_2 w_3 \in L) \right)$

⊤ Intuice – pokud dva řetězce mají stejnou budoucnost, musí se sejít. ⊥

4. Uvažme níže uvedený KA nad $\Sigma = \{a, b\}$.

A



a) Určete jazyk $L(A)$.

$L(A) = \{ w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) = 2 \}$.

b) Zapište ekv. třídy $\sim$ odpovídající A.

$L_1 = \{ w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) = 0 \}$ — přísl. k q_1

$L_2 = \{$ —"— $\mid \#_a(w) = 1 \}$

$L_3 = \{$ —"— $= 2 \}$

$L_4 = \{$ —"— $> 2 \}$

c) Zapište odpovídající pravou kongr. $\sim$:

$\forall u, v \in \{a,b\}^*: u \sim v \iff (u \in L_1 \wedge v \in L_1) \vee (u \in L_2 \wedge v \in L_2) \vee (u \in L_3 \wedge v \in L_3) \vee (u \in L_4 \wedge v \in L_4)$

$\iff (\#_a(u) = \#_a(v) = 0) \vee (\#_a(u) = \#_a(v) = 1) \vee$

$\vee (\#_a(u) = \#_a(v) = 2) \vee (\#_a(u) > 2 \wedge \#_a(v) > 2)$

$\iff (\#_a(u) = \#_a(v)) \vee (\#_a(u) > 2 \wedge \#_a(v) > 2)$

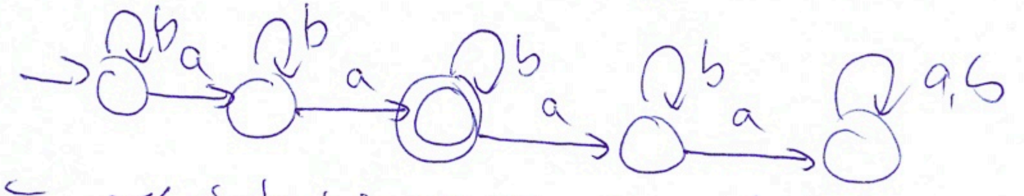
d) Je tato pr. kongruence současně pref. ekvivalencí?

ANO: A je úplný min. DKA.

e) Jak by mohla vypadat pr. kongr. $\sim'$, která by nebyla prefix. ekv.?

Např.:

$u \sim' v \iff (\#_a(u) = \#_a(v)) \vee (\#_a(u) > 3 \wedge \#_a(v) > 3)$



5. Dokažte, že $\nexists$ úplný DKA se 3 stavy pro jazyk $L = \{ w \in \{a,b,c\}^* \mid w \text{ obsahuje podřetězec "abc"} \}$ pomocí M-N. věty.

Důkaz: - Vezmeme slova ε, a, ab, abc a ukážeme následně, že žádná 2 z nich nejsou v relaci $\sim_L$.

Z toho pak plyne, že $|\Sigma^* \setminus \sim_L| \geq 4$, a tudíž úplný min. dka má alespoň 4 stavy.

- Nejprve mějme $w_1 \in \{\varepsilon, a, ab\}$ a $w_2 = abc$. Předp., že $w_1 \sim_L w_2$. Přitom $w_2 \in L$. Navíc $w_2 \cdot \varepsilon = w_2$ a tedy $w_2 \cdot \varepsilon \in L$. Pak ale $w_1 \cdot \varepsilon = w_1 \in L$. SPOR, protože $\{\varepsilon, a, ab\} \cap L = \emptyset$.
- Dále nechť $w_1 \in \{\varepsilon, a\}$, $w_2 = ab$. Předp., že $w_1 \sim_L w_2$. Víme, že $w_2 \cdot c \in L$. Pak taky $w_1 \cdot c \in L$. Ale $\varepsilon \cdot c \notin L$, $a \cdot c \notin L$. SPOR.
- Analogicky pro $w_1 = \varepsilon$, $w_2 = a$ a prodloužení o bc. $\square$

⑥ Platí následující tvrzení o uz. vlast.? Ukažte!

a) $L_1 \cap L_2 \in \mathcal{L}_3 \Rightarrow L_1 \in \mathcal{L}_3 \vee L_2 \in \mathcal{L}_3$

– NE! např. $L_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$, $L_2 = \{b^n a^n \mid n \geq 0\}$

$L_1 \cap L_2 = \emptyset \in \mathcal{L}_3$

b) $L \in \mathcal{L}_3 \Rightarrow \Diamond L \in \mathcal{L}_3$, kde $\Diamond L = \{w \in L \mid \#_a(w) = \#_b(w)\}$

– NE! např. $L = \{a,b\}^*$

$\Diamond L = \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w) = \#_b(w)\} \notin \mathcal{L}_3$

c) $\exists L \in \mathcal{L}_3 : \Diamond L \in \mathcal{L}_3$

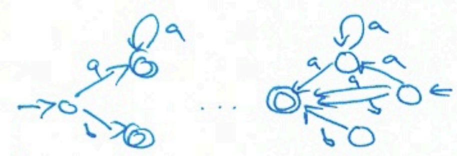
– ANO! např. $L = \emptyset = \Diamond L \in \mathcal{L}_3$

d) $L \in \mathcal{L}_3 \Rightarrow L^R \in \mathcal{L}_3$, kde $L^R = \{w^R \mid w \in L\}$

– ANO! konstrukce KA: vstup: KA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

výstup: KA $A_R = (Q_R, \Sigma, \delta_R, q_0^R, F_R)$

Metoda:



1. $Q_R = Q \cup \{q_0^R\}$, $q_0^R \notin Q$
2. $\delta_R : Q_R \times \Sigma \to 2^{Q_R}$ def. tak, že
   a) $\forall q_1 \in Q\ \forall q_2 \in Q \setminus F\ \forall a \in \Sigma : q_2 \in \delta(q_1, a) \Leftrightarrow q_1 \in \delta(q_2, a)$
   b) $\forall q_1 \in Q\ \forall q_2 \in F\ \forall a \in \Sigma : q_2 \in \delta(q_1, a) \Leftrightarrow (q_1 \in \delta(q_2, a) \wedge q_1 \in \delta(q_0^R, a))$
3. $F_R = \begin{cases} \{q_0\} & \text{pokud } \varepsilon \notin L(A), \\ \{q_0, q_0^R\} & \text{jinak} \end{cases}$