TIN – cv. 3 – 2023/24 – bezkontextové jazyky 2

1. Sestavte ZA pro jazyk $L = \{a^i b^j c^k \mid 0 \le i \le 2(j+k),\ 0 \le j, k\}$

[intuice: – na příkladech:

- $i = 0$: $\varepsilon, b, c, bb, cc, bc, \dots$
- $i = 1$: $2(j+k) \ge 1$

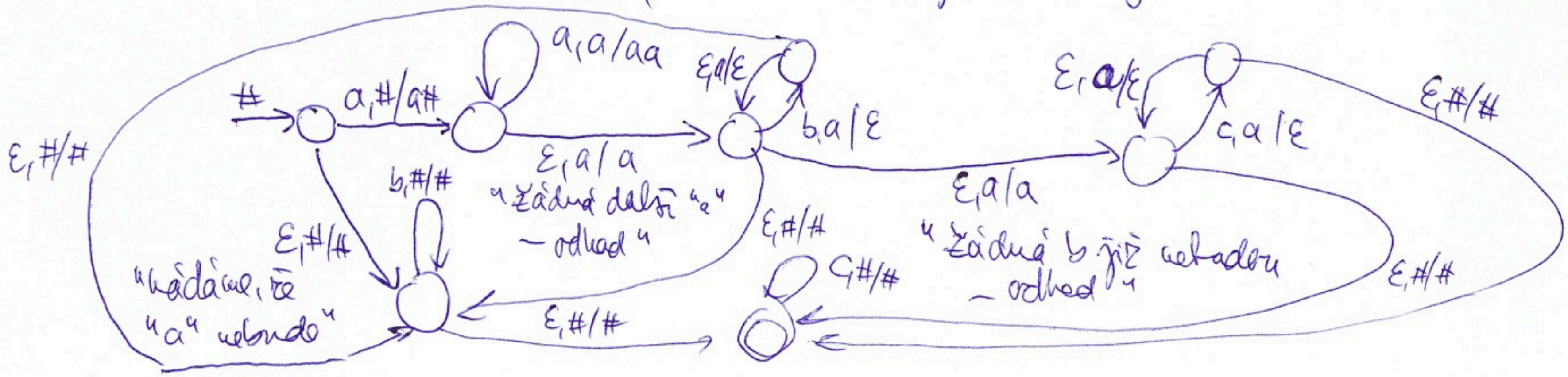
  $j+k \ge \lceil \frac{1}{2} \rceil = 1$

  $ab, ac, abb, acc, abc \dots$
- $i = 2$: $2(j+k) \ge 2$

  $j+k \ge 1$

  $aab, aac, aabb \dots$

– # („b" a „c") musí být $\ge \lceil 1/2\ \#a \rceil$]



2. O každé z následujících implikací rozhodněte, zda platí či ne a stručně zdůvodněte.

a) $\forall L_1, L_2 : L_1, L_2 \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow L_1 \cup L_2 \in \mathcal{L}_2$

Platí: – L_1 a L_2 lze reprezentovat BG $G_i = (N_i, \Sigma_i, P_i, S_i)$ pro $i = 1, 2$, kde $N_1 \cap N_2 = \emptyset$ a následně lze $L_1 \cup L_2$ přijmout BG

$G = (N_1 \cup N_2 \cup \{S\}, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1 | S_2\}, S)$

pro $S \notin N_1 \cup N_2 \cup \Sigma_1 \cup \Sigma_2$

b) $\forall L_1, L_2 : L_1 \in \mathcal{L}_2 \wedge L_1 \cap L_2 \notin \mathcal{L}_2 \Rightarrow L_2 \notin \mathcal{L}_2$

Neplatí: lze zvolit např.:

$L_1 = \{a^k b^k c^l \mid k, l \geq 0\} \in \mathcal{L}_2$

$L_2 = \{a^l b^k c^k \mid k, l \geq 0\} \in \mathcal{L}_2$

$L_1 \cap L_2 = \{a^k b^k c^k \mid k \geq 0\} \notin \mathcal{L}_2$

a tedy true $\wedge$ true $\Rightarrow$ false – neplatí!

c) $\forall L_1, L_2 : L_1 \in \mathcal{L}_3 \wedge L_2 \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow \overline{L_1 \cap L_2} \in \mathcal{L}_2$

Neplatí: - Zvolí-me-li za $L_1 = \Sigma^*$, redukuje se daná implikace na uzavřenost $\mathcal{L}_2$ vůči komplementu, jež neplatí.

- konečně lze zvolit

$$L_1 = \{a, b, c\}^*, \; L_2 = \overline{\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}}$$

d) $\forall L_1, L_2 : L_1 \in Fin \wedge L_2 \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow \overline{L_1 \cap L_2} \in \mathcal{L}_2.$

Platí: $L_1 \cap L_2 \in Fin \subset \mathcal{L}_3$

$\overline{L_1 \cap L_2} \in \mathcal{L}_3 \subset \mathcal{L}_2.$

P. l. pro $\mathcal{L}_2$

$\forall \Sigma$: kon. abeceda $\forall L \subseteq \Sigma^* : L \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow \exists k > 0 :$

$\forall z \in L : |z| \geq k \Rightarrow \exists u, v, w, x, y \in \Sigma^* : z = u\underline{vwx}y \wedge$

$vx \neq \varepsilon \wedge |vwx| \leq k \wedge \forall i \geq 0 : u v^i w x^i y \in L.$

3. Mějme jazyk $L = \{ a^n b^m a^n b^m \mid n, m \geq 0 \}$.
Diskutujte (ne)vhodnost následujících voleb řetězce z pro ukázání, že $L \notin \mathcal{L}_2$, pomocí P. l.

a) $z_1 = a^2 b^2 a^2 b^2$: Nelze, sice $z_1 \in L$, ale $|z_1| = 8$ a nelze tvrdit, že $8 \geq k$.

b) $z_2 = \underset{v}{a^k} \underset{w}{b} \underset{x}{a^k} b$: Nelze, sice $z_2 \in L$, $|z_2| = 2k+2 \geq k$, ale lze volit
$u = a^{k-1}$, $v = a$, $w = b$, $x = a$, $y = a^{k-1} b$
a pak $\forall i \geq 0 : u v^i w x^i y \in L$.
(~~přitom~~ $vx \neq \varepsilon$ a $|vwx| = 3 \leq k$ pro dostatečně velké k).

c) $z_3 = \underline{a^k b^k} \underline{a^k b^k}$: Lze užít, volby u, v, w, x, y splňující $z_3 = uvwxy$, $vx \neq \varepsilon$ a $|vwx| \leq k$ lze rozdělit do naší skupin:

i) pro volba vx z prefixu $a^k b^k$ dojde pro $i > 1$ k porušení shody počtu "a" a/nebo "b" v prefixu vůči sufixu.

ii) volba vx v sufixu $a^k b^k$ — analogicky.

POZNÁMKA:
Nelze volit
v z 1. a^k a
x z 2. a^k —
— pak je
$|vwx| \geq k+2$

(nelze).

iii) volba r^x ve středu $b^i a^i$ — pro $i > 1$ dojde k porušení středy počtu "a" a/nebo "b" v prefixu vůči sufixu.

Žádná další volba není — nelze splnit tvrzení P.L. — SPOR $\square$.

4. Sestavte alg. pro výpočet mn-y neterminálů dané BG, které mohou vygenerovat neprázdnou větu

Vstup: BG $G = (N, \Sigma, P, S)$

Výstup: $N_{tt} = \{ A \in N \mid A \overset{+}{\underset{G}{\Rightarrow}} w \in \Sigma^{+} \}$

Metoda:

1. Dle známého alg. zkonstruujeme $N_t = \{ A \in N \mid A \overset{+}{\underset{G}{\Rightarrow}} w \in \Sigma^* \}$.
2. $N_{tt}^0 = \emptyset$, $i := 0$
3. $N_{tt}^{i+1} = \{ A \in N \mid \exists (A \to \gamma) \in P: \gamma \in (N_t \cup \Sigma)^* (N_{tt}^i \cup \Sigma)(N_t \cup \Sigma)^* \}$ $[\cup N_{tt}^i]$

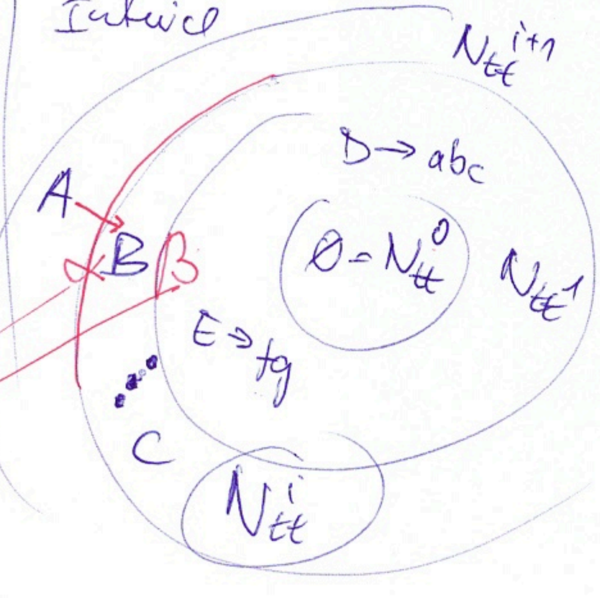
   nemusí nutně

   $(\Sigma \cup N_t)^*$
4. Jestliže $N_{tt}^{i+1} = N_{tt}^i$, pak $N_{tt} = N_{tt}^i$ jinak $i := i+1$ a jdeme na bod 3.

POZOR:

$N_t = \{ A \in N \mid A \overset{+}{\underset{G}{\Rightarrow}} w \in \Sigma^{*} \}$

Intuice



– Zkusit dema např. na gr. s pravidly

$A \to BC \mid \varepsilon$ $D \to ACaB$

$B \to ab \mid DEC$ $E \to GBD$

$C \to BBa$ $G \to aG$

$\left.\begin{matrix} D \to ACaB \\ E \to GBD \\ G \to aG \end{matrix}\right\}$ E, G jistě není v $\overline{N_{tt}}$

$\overline{N_{tt}^{0}} = \emptyset, \ N_{tt}^{1} = \{B\}, \ldots$

5. Sestavte alg., který otestuje, zda daná BG obsahuje <u>levou</u> ~~[illegible]~~ rekurzi.

Vstup: BG $G = (N, \Sigma, P, S)$

Výstup: ANO, pokud $\exists A \in N : A \overset{+}{\underset{G}{\Rightarrow}} A\alpha, \ \alpha \in (N \cup \Sigma)^*$;
NE, jinak.

Metoda: 1. spočteme mn-u $N_\varepsilon = \{A \in N \mid A \overset{+}{\underset{G}{\Rightarrow}} \varepsilon\}$ dle známého alg.

2. sestavíme relaci $\varrho \subseteq N \times N$ takovou, že $\forall A, B \in N$: $A \varrho B \iff \exists (A \to \alpha B \beta) \in P : \alpha \in (N_\varepsilon)^* \wedge \beta \in (N \cup \Sigma)^*$

3. Spočteme ϱ^+ Warsh. alg.

4. Odpovíme ANO, jestliže $\exists A \in N : A \varrho^+ A$, jinak odpovíme NE.

test na existenci „1" na diagonále v matici relace ϱ^+

Indukce

$A \Rightarrow \alpha B \beta \Rightarrow \alpha' C \beta' \Rightarrow \ldots \Rightarrow A\alpha$

$\alpha \Rightarrow \ldots \Rightarrow \varepsilon$, $\alpha' \Rightarrow \ldots \Rightarrow \varepsilon$

6. Sestavte alg., který má na vstupu ZA M s abecedou Σ a na výstupu ZA M' takový, že
$L(M') = \{ w \in \Sigma^* \mid \exists w' \in \Sigma^* : ww' \in L(M) \}$
— tedy: jazyk všech prefixů $L(M)$.

Např. pokud $L(M) = \{abcd\}$, pak $L(M') = \{\varepsilon, a, ab, abc, abcd\}$.

Vstup: ZA $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, z_0, F)$

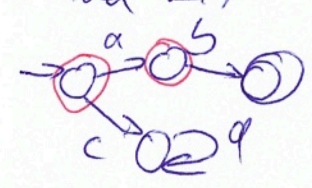
Výstup: ZA $M' = (Q', \Sigma', \Gamma', \delta', q_0', z_0', F')$ takový, že
$L(M') = \{ w \in \Sigma^* \mid \exists w' \in \Sigma^* : ww' \in L(M) \}$.

Metoda:

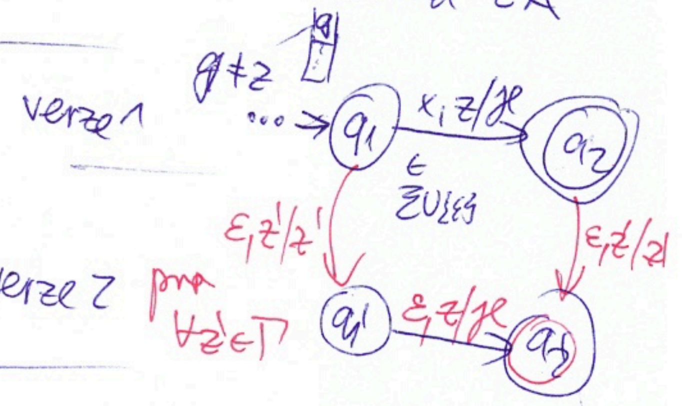
1. $Q' = Q \times \{1, 2\}$
2. $\Sigma' = \Sigma$
3. $\Gamma' = \Gamma$
4. $\delta' : Q' \times (\Sigma' \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma' \to 2^{Q' \times (\Gamma')^*}$ taková, že

$\forall q_1, q_2 \in Q \ \forall i, j \in \{1, 2\} \ \forall x \in \Sigma' \cup \{\varepsilon\} \ \forall z \in \Gamma' \ \forall \gamma \in (\Gamma')^*$:
$((q_2, j), \gamma) \in \delta'((q_1, i), x, z) \iff$

Intuice:
- na KA



- na ZA



$$\big((i = j = 1 \wedge (q_2, \gamma) \in \delta(q_1, x, z))$$
$$\vee\ (i = 1 \wedge j = 2 \wedge q_1 = q_2 \wedge x = \varepsilon \wedge z = \gamma)$$
$$\vee\ (i = j = 2 \wedge x = \varepsilon \wedge (\exists y \in \Sigma \cup \{\varepsilon\} : (q_2, \gamma) \in \delta(q_1, y, z)))\big)$$

5. $q_0' = (q_0, 1)$

6. $z_0' = z_0$

7. $F' = F \times \{1, 2\}$

pro případ, kdy dojde při přechodu do původního konc. stavu k vyprázdnění zásobníku.

7. Diskutujte vhodnost volby řetězce z při důkazu, že $L \notin \mathcal{L}_2$ pro $L = \{ w a^n w \mid w \in \{b,c\}^* \wedge n > 0 \}$.

a) $z_1 = b^k a b^k$ – ne: lze zvolit $v = b$, $w = a$, $x = b$.

b) $z_2 = b^k a^k b^k$ – ne: lze uvažovat $v = a$, $w = x = \varepsilon$ a pak pro $k > 1$ lze pumpovat i vyhazovat

c) $z_3 = b^k c^k \, a \, b^k c^k$ – lze : dají se uvažovat 4 typy
rozkladů u, v, w, x, y – viz
obrázek; pro každou ale
nejde buď pumpovat,
nebo vyrovnávat. – SPOR