TIN – cv 7 – složitost – 15/12/2023

1. **Ukažte**, že $L = \{ w \in \Sigma^* \mid w = w^R \} \in DTime[n]$.

Pozn.: Nelze řešit postupným porovnáváním i-tého a $(n-i+1)$-ho prvku – vede na složitost $O(n^2)$ – dva zanořené cykly.

<u>Idea řešení</u>:

– Zkonstruujme 2-pásk. DTS M, který přijímá L takto:

1. M přesune hlavu na 1. pásce za konec vstupu.
2. M přesouvá hlavu na 1. pásce zprava doleva a současně kopíruje zleva doprava na 2. pásku čtené symboly.
3. M přesune hlavu na 2. pásce zpět na levý okraj.
4. M prochází současně obě pásky zleva doprava. Pokud narazí na různé symboly, odmítne. Pokud dojde vstup do konce a nenarazí na rozdíl, přijme.

– složitost:

$$\underbrace{(n+1)}_{1.\ \text{krok}} + \underbrace{O(n)}_{\text{krok } 2} + \underbrace{(n+1)}_{\text{krok } 3} + \underbrace{O(n)}_{\text{krok } 4} = O(n)$$

($\approx 3n$ – posun doleva na 1. pásce, posun doprava na 2. pásce, přepis znaku)

2. Amortizovaná složitost na příkladu sekvence inkrementů čísla zapsaného jako vektor dekadických číslic.

– Mějme operaci:

```
inc ( <0..9> x[ ], int size) {   // x je pole indexované
                                 // od 0 po size-1
   int i = -1;
   do
      i++
      x[i] = x[i]+1          // předpokládejme, že 9++ == 0
   while (x[i]==0 ∧ i < size-1)
```

– Uvažujme sekvenci n volání této operace počínaje vektorem $x = [0, \ldots, 0]$

a) Jaká je složitost této sekvence při použití analýzy nejhoršího případu?

- cena 1 operace inc() v nejhorším případě: $O(size)$
- cena sekvence: $O(n \cdot size)$ — hrubá aproximace

b) Jaká je amortizovaná složitost? Určete metodou účtů.

- Uvážíme varianty operace inc() dle počtu iterací a ke každé stanovíme cenu a požadavek na kredit předchozích operací, aby se příslušná cena pokryla:

		CENA	požadavky na kredit
$i = 1$	(1 iterace)	1	každ. kredit 1
$i = 2$	(2 iterace)	2	+ dodatečný požadavek 1/10
$i = 3$	(3 iterace)	3	+ —— " —— 1/100
⋮		⋮	⋮

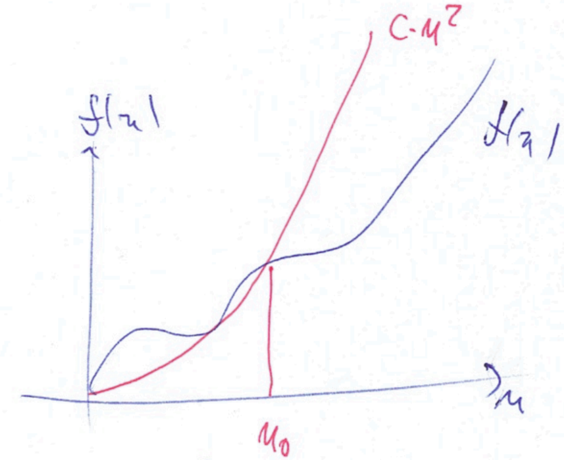
- Z uvedeného je zřejmé, že na pokrytí cen všech operací postačí kredit $1,\overline{1}$ (lze aprox. 1,2).

- cena n operací pak je $O(n)$ – vůbec nezávisí na size!

3. Ukažte, že $O(n^2) \subset O(2^n)$

a) Ukážeme, že $O(n^2) \subseteq O(2^n)$.

- Uvažme libovolné $f(n) \in O(n^2)$. Ukážeme, že $f(n) \in O(2^n)$.
- Z definice $O(n^2)$ plyne, že
  $\exists c \in \mathbb{R}^+ \ \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \forall n \geq n_0 :$
  $f(n) \leq c \cdot n^2$



- Intuitivně od určitého n_0 je $c \cdot n^2$ nad hodnotou $f(n)$, příp. rovno, a roste minimálně stejně rychle
- Ukážeme, že rozdíl 2^n a n^2 se neustále zvětšuje a tudíž také roste rozdíl mezi těmito hodnotami – 2^n tedy musí nutně n^2 v určitém okamžiku dohnat, předehnat a získat nad ní!

- zkoumejme $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{c \cdot n^2} = \left| \begin{array}{l} \text{čitatel i jmenovatel} \to \infty, \\ \text{uplatníme L'Hosp. pr.} \end{array} \right|$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{d2^n}{dn}}{\frac{d\, c \cdot n^2}{dn}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(\ln 2) \cdot 2^n}{2 \cdot c \cdot n} =$

$= \left| \begin{array}{c} \text{uplatníme} \\ \text{opět L'Hosp.} \\ \text{pr.} \end{array} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(\ln 2)^2 \cdot 2^n}{2 \cdot c} = \infty$

- tedy $\exists c' \in \mathbb{R}^+ \; \exists n_0' \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0'$:

$$c \cdot n^2 \leq c' \cdot 2^n$$

- Složením s předchozím tvrzením dostaneme:

$$\exists c' \in \mathbb{R}^+ \; \exists n_0' \in \mathbb{N} \; \forall n \geq n_0' : f(n) \leq c' \cdot 2^n$$

- Tedy $f(n) \in O(2^n)$.

b) ukážeme, že $2^n \notin O(n^2)$

- důkaz sporem:

- předp. $2^n \in O(n^2)$
- z def. $O(n^2)$: $\exists c \in \mathbb{R}^+ \, \exists n_0 \in \mathbb{N} \, \forall n \geq n_0 : 2^n \leq c \cdot n^2$
- z toho pro dostatečně velké n plyne, že

  $$\frac{2^n}{c \cdot n^2} \leq 1.$$

- Ovšem výše jsme ukázali, že $\lim_{n \to \infty} \frac{2^n}{c \cdot n^2} = \infty$.
- SPOR. $\square$

4. Problém obarvení grafu

- Máme graf $G = (V, E)$, kde $E \subseteq \{ \{a,b\} \mid a,b \in V \}$ a ptáme se, zda G je obarvitelný (resp. uzly jsou obarvitelné) c barvami tak, aby žádné 2 sousedící uzly neměly stejnou barvu
- Lze řešit hrubou silou s využitím operace inc() zavedené v předchozím textu:

predp., že
$V = \{0, \dots, |V|-1\}$

```
is-colorable (V, E, c) {
    <0..(c-1)> color[0...|V|-1] = [0,0,...,0];
    while (true) {
        res = true;
        forall {a,b} ∈ E
            if (color[a] == color[b]) {
                res = false;
                break;
            }
        if (res) then return YES.
        if (color == [(c-1),...,(c-1)])
            return NO
        else inc(color, |V|);
    }
}
```

- složitost:
  - vnitřní cyklus: $O(|E|)$, lze aprox. $O(|V|^2)$.
  - vnější cyklus – počet provedení: $c^{|V|}$.
  - celkem $O(c^{|V|} \cdot |V|^2) =$

$$= O\left(c^{|V|} \cdot c^{\log_c^2 |V|}\right) =$$

$$= O\left(c^{2 \cdot |V|}\right)$$

- konečně jedná se o NP-úplný problém.

5. <u>Uvažujme nyní 2-barvitelnost souvislých grafů</u>

Lze řešit takto:

```
is2colorable ( V, E ) {    // předp., že V = {0,...,|V|-1}
    <-1,0,1> color[] = [-1,...,-1] ;
neobarveno  černá  bílá
    color[0] = 0 ;
    stack <int> todo ;
    todo.push(0) ;
    while todo.nonempty() {
        x = todo.pop() ;
        foreach {a,b} ∈ E {
            if ( x ∉ {a,b}) continue ;
            y = (x==a) ? b : a ;
```

```
        if ( color[y] == -1 ) {
            color[y] = 1 - color[x] ;
            fronta.push(y) ;
        } else if ( color[x] == color[y] )
            return FALSE .
    } // FOREACH
} // WHILE
return TRUE ;
```

- složitost : - vnitřní cyklus : $O(|E|)$, lze aprox. $O(|V|^2)$
  - vnější cyklus - počet opakování $O(|V|)$
  - celkově $O(|V|^3)$.
- lze zlepšit na $O(|V|^2)$, pokud bude graf uložen tak, aby u uzlu byly dostupné přímo hrany, které s ním souvisí.

6. V grafu $G = (V, E)$ je $V' \subseteq V$ nezávislou množinou, jestliže žádné 2 uzly z V' netvoří hranu.
Problém nezávislé mn-y: Ptáme se, zda G obsahuje nezávislou mn-u velikosti alespoň m. Tento problém je NP úplný. Dokažte.

---

a) Členství v NP.

- Lze užít NTS M, který bude pracovat takto:
  1. M ověří platnost vstupu a případně odmítne.
  2. M zvolí náhodně m uzlů.
  3. M ověří, že žádné 2 zvolené uzly nejsou propojeny.
- M zřejmě pracuje v polynom. čase.

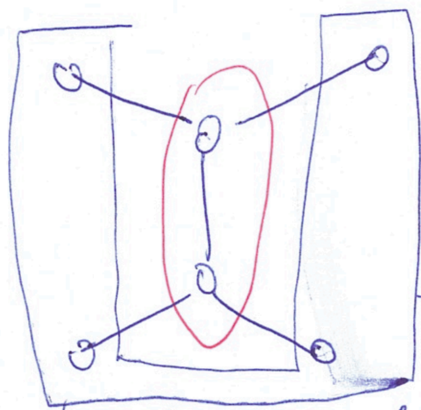
b) NP těžkost

- Pomocí polynomiální redukce z problému kliky velikosti k v grafu $G = (V, E)$.

- tento problém svedukujeme na existenci nezávislé množiny v grafu $G' = (V, \{\{v_1, v_2\} \in V^2 \mid \{v_1, v_2\} \notin E\})$.
- Tato redukce je snadno implementovatelná v polynom. čase a zachovává členství v jazyce.

7. Graf $G = (V, E)$ má uzlové pokrytí velikosti l, jestliže $\exists\, V' \subseteq V : |V'| = l \wedge \forall \{v_1, v_2\} \in E : \{v_1, v_2\} \cap V' \neq \emptyset$.

(Např. v grafu



je uzlové pokrytí velikosti 2: „O".)

nezávislá množina

Problém uzlového pokrytí se ptá, zda daný graf má uzlové pokrytí velikosti l či menší. Jak byste dokázali NP-těžkost?

Idea: - Lze řešit redukcí problému nezávislé množiny V velikosti alespoň m na problém uzlového pokrytí velikosti $|V| - m$ či menší.

- V důkazu by bylo vhodné dokázat pomocné tvrzení: V' je uzlové pokrytí $\iff$ $V \setminus V'$ je nezávislá množina.