TIN – demo – 2 – regulární jazyky   29. 9. 2023

1. zapište KA přijímající jazyk $L = \{ b^n a c^m \mid n \geq 2, \exists k \geq 0 : m = 3k \}$.

$m = 3k \equiv \mod_3 m = 0$

$$\Big\lceil \text{KA} \quad M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F) \Big\rceil$$

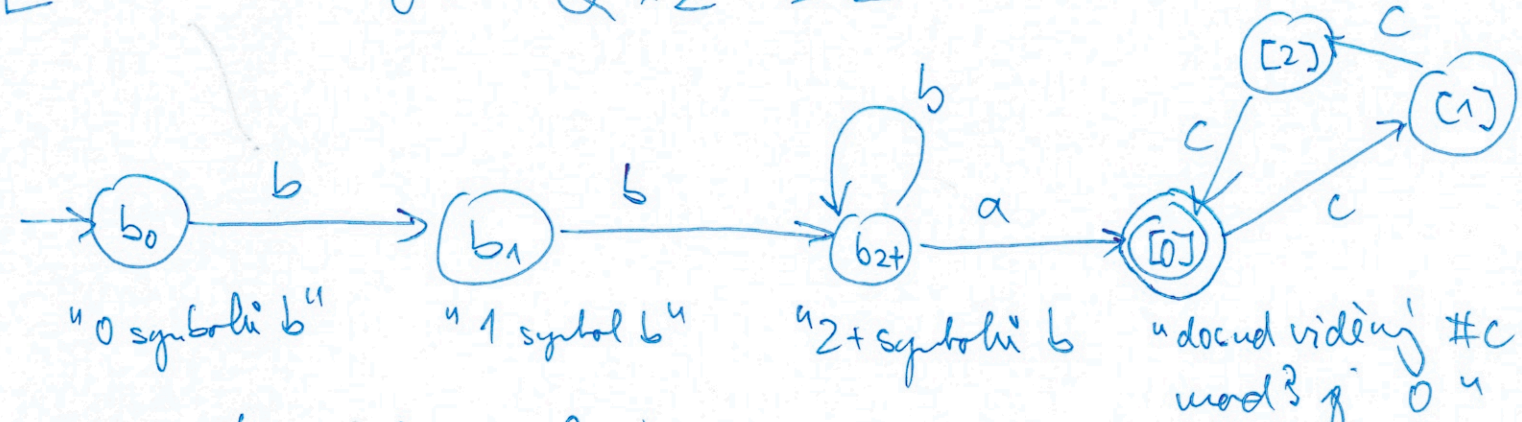
kon., nepr. abeceda (Σ)

kon., nepr. mn-a stavů (Q)

$q_0 \in Q$

$F \subseteq Q$

$$\Big\lfloor \quad \delta : Q \times \Sigma \to 2^Q \Big\rfloor$$



2. Navrhněte a formálně zapište algoritmus pro konstrukci KA, který přijímá konkatenaci jazyků dvou zadaných vstupních KA.

Vstup: KA $M_1 = (Q_1, \Sigma_1, \delta_1, q_0^1, F_1)$ a

$M_2 = (Q_2, \Sigma_2, \delta_2, q_0^2, F_2)$, bez újmy na obecnosti předp., že $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$

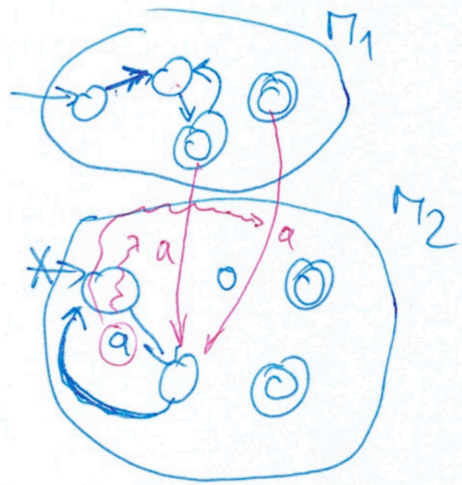
(vždy lze přejmenovat, formálně by šlo užít $Q = Q_1 \times \{1\} \cup Q_2 \times \{2\}$)

Výstup: KA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ takový, že $L(M) = L(M_1) \cdot L(M_2)$

Metoda:

1. $Q = Q_1 \cup Q_2$
2. $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$
3. $\delta : Q \times \Sigma \to 2^Q$ definovaná tak, že $\forall q_1, q_2 \in Q \ \forall a \in \Sigma$:
   $$q_2 \in \delta(q_1, a) \iff \big(q_2 \in \delta_1(q_1, a) \lor q_2 \in \delta_2(q_1, a) \lor (q_1 \in F_1 \land q_2 \in \delta_2(q_0^2, a)) \big)$$
4. $q_0 = q_0^1$
5. $$F = \begin{cases} F_2 & \varepsilon \notin L(M_2) \ [\equiv q_0^2 \notin F_2] \\ F_1 \cup F_2 & \varepsilon \in L(M_2) \end{cases}$$

Intuice:



Pumping lemma pro $\mathcal{L}_3$

$\forall \Sigma$: kon. abeceda ($|\Sigma| \in \mathbb{N}^+$) $\forall L \subseteq \Sigma^*$: $L \in \mathcal{L}_3 \Rightarrow \exists k > 0 \ \forall w \in L : |w| \geq k \Rightarrow$

$\exists x, y, z \in \Sigma^*$: $w = xyz \land y \neq \varepsilon \land |xy| \leq k \land \forall i \geq 0 : xy^iz \in L$.

3. Dokažte, že $L=\{w\in\{a,b\}^* \mid |w|=\ell^2,\ \ell\geq 0\}\notin\mathcal{L}_3$, a to pomocí P.L.

Důkaz – idea:

DKAM $|Q|=k$, uvažujme řetězec w takový, že $|w|=k$.

$w=w_1\cdot w_2\cdot w_3$

w přijímáno ($w\in L(M)$), přes $k+1$ stavů
$\rightarrow$ aspoň 1 stav je navštíven $2\times$

Důkaz sporem:

- Předpokládejme, že $L\in\mathcal{L}_3$.
- Pak dle P.L. platí, že
  $\exists k>0\ \forall w\in L: |w|\geq k \Rightarrow$
  $\exists x,y,z\in\{a,b\}^*: w=xyz \wedge y\neq\varepsilon \wedge |xy|\leq k \wedge \forall i\geq 0: xy^iz\in L.$
- Uvažujme libovolné $k>0$, pro které platí P.L. – takové existuje.
- Zvolme $w=a^{k^2}\in L$, $|w|=k^2\geq k$.
- Tedy dle P.L. máme, že $\exists x,y,z\in\{a,b\}^*$:
  $$a^{k^2}=xyz \wedge y\neq\varepsilon \wedge |xy|\leq k \wedge \forall i\geq 0: xy^iz\in L.$$
- Uvažme libovolné x,y,z, které splňují výše uvedené – takové musí existovat.
- Zvolme $i=2$.
- Dle P.L.: $xy^2z\in L$ a tedy $|xy^2z|=\ell^2,\ \ell\geq 0$
- Zkoumejme $|xy^2z| = \underset{=k^2}{|\overbrace{xyz}^{w}|} + |y| = k^2+|y|$

- Dále víme, že $y \neq \varepsilon$, tedy $|xy^2z| > k^2$.
- Rovněž víme, že $|xy| \leq k$ a tedy

$$|xy^2z| \leq k^2+k < (k+1)^2 = k^2+2k+1 \text{ a}$$

přitom $k > 0$.

- tedy $|xy^2z| = \ell^2$ pro $\ell > 0$ a

současně $k^2 < |xy^2z| < (k+1)^2$,

což je spor, protože dostáváme, že $k < \ell < k+1$ pro $k, \ell \in \mathbb{N}$. Mezi dvěma přirozenými čísly jdoucími za sebou — k a $k+1$ — ovšem není žádné ℓ. <u>SPOR</u>

$\square$

<u>Operace „shuffle" („promísení") jazyků</u>

- $\| : \Sigma^* \times \Sigma^* \to 2^{\Sigma^*}$ je def. tak, že:
  - $\forall w \in \Sigma^* : \varepsilon \| w = w \| \varepsilon = \{w\}$
  - $\forall a_1, a_2 \in \Sigma \ \forall w_1, w_2 \in \Sigma^*$:

    $a_1 w_1 \| a_2 w_2 = \{a_1\}(w_1 \| a_2 w_2) \cup \{a_2\}(a_1 w_1 \| w_2)$.
- např. $ab \| cd = \{abcd, acbd, acdb, cdab, cadb, cabd\}$

5

– $\forall L_1, L_2 \subseteq \Sigma^* : \quad L_1 \parallel L_2 = \bigcup_{w_1 \in L_1, w_2 \in L_2} w_1 \parallel w_2$

(rozšíření $\parallel$ na jazyky)

4. Sestavte a formálně zapište alg., který má na vstupu KA M_1 a M_2 a na výstupu KA M takový, že $L(M) = L(M_1) \parallel L(M_2)$.

Vstup: KA $M_1 = (Q_1, \Sigma_1, \delta_1, q_0^1, F_1)$ a
$M_2 = (Q_2, \Sigma_2, \delta_2, q_0^2, F_2)$

Výstup: KA $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ takový, že $L(M) = L(M_1) \parallel L(M_2)$.

Metoda:

1. $Q = Q_1 \times Q_2$
2. $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$
3. $\delta : Q \times \Sigma \to 2^Q$ def. tak, že:

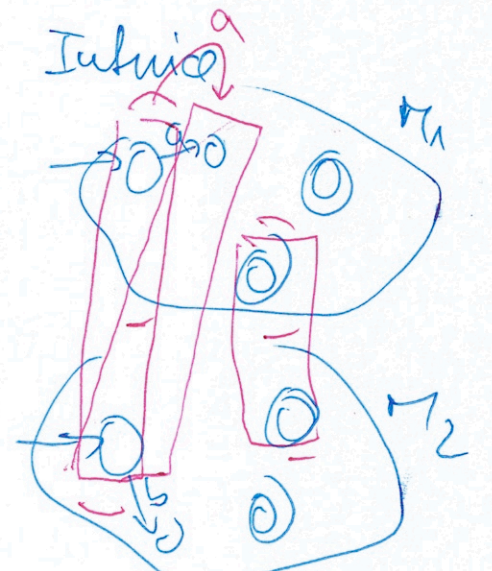
$\forall q_1^1, q_2^1 \in Q_1 \ \forall q_1^2, q_2^2 \in Q_2 \ \forall a \in \Sigma :$

$(q_2^1, q_2^2) \in \delta((q_1^1, q_1^2), a) \iff$

$((q_2^1 \in \delta_1(q_1^1, a) \wedge q_2^2 = q_1^2)$

$\vee (q_1^1 = q_2^1 \wedge q_2^2 \in \delta_2(q_1^2, a)))$

Intuice

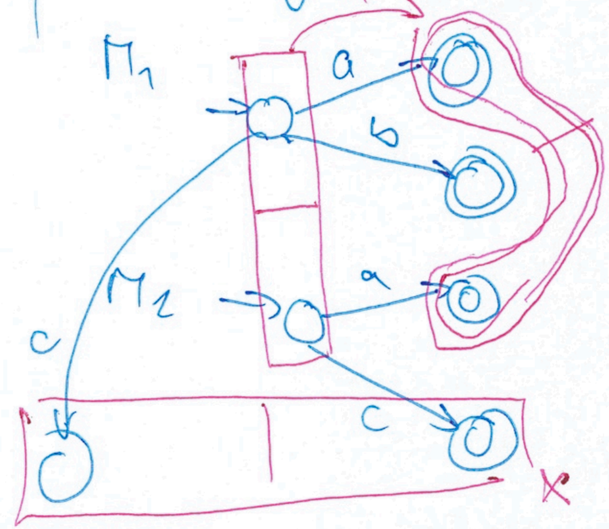


(6)

4. $q_0 = (q_0^1, q_0^2)$

5. $F = F_1 \times F_2$

průnik – M_1 a M_2 musí provádět kroky současně



5. Pomocí P.L. dokažte, že
$L = \{ a^{n!} \mid n \in \mathbb{N} \} \notin \mathcal{L}_3$

Důkaz sporem:

– předp., že $L \in \mathcal{L}_3$.

– Dle P.L. $\exists k > 0\ \forall w \in L : |w| \geq k \Rightarrow$
$\exists x, y, z \in \{a\}^* : xyz = w \wedge y \neq \varepsilon \wedge |xy| \leq k \wedge$
$\forall i \geq 0 : xy^iz \in L$.

– Uvažme libovolné $k > 0$ splňující výše uvedené a zvolme $w = a^{k!} \in L \wedge |w| = k! \geq k$

7

- Tedy víme, že $\exists x, y, z \in \{a\}^* : w = a^{k!} = xyz \wedge y \neq \varepsilon \wedge |xy| \leq k \wedge \forall i \geq 0 : xy^iz \in L$.
- Uvážíme libovolné x, y, z splňující výše uvedené a uvážíme libovolné $i > 1$
- Dle P.L.: $|xy^iz| = l!$ pro nějaké $l \in \mathbb{N}$, protože $xy^iz \in L$.
- Víme, že $|xy^iz| = |xyz| + |y^{i-1}| =$ — jsem mohl napsat, protože $i > 1$

$$= |w| + (i-1) \cdot |y| =$$
$$= k! + (i-1) \cdot |y|$$

- Tedy $l! = k! + (i-1) \cdot |y|$ pro nějaké $l \in \mathbb{N}$
- Zvolme volbu i na $i = (k+1)! + 1$.
- Dostaneme $l! = k! + (\underline{(k+1)! + 1 - 1}) \cdot |y| =$

$$= k! + (k+1)!\,|y|$$

- Vytkneme: $l! = k!\,(1 + (k+1) \cdot |y|)$ — bez krácení $k!$, $k! \geq 1$
- Dostaneme $l(l-1) \cdot \ldots \cdot (k+1) = (1 + (k+1) \cdot |y|)$

Pravá strana je dělitelná $k!$ a taktéž levá strana také! Současně $l! = l \cdot (l-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ a tudíž dělitelnost $k!$

[illegible], že

$l! = l\cdot(l-1)\cdots k\cdot(k-1)\cdots 2$

- Levou stranu lze dělit $k+1$ a tudíž to je možné i na pravé straně.
- Protože $(k+1)\cdot|y|$ je dělitelné $k+1$, musí být $(k+1)$ dělitelné i 1.

  To je ale spor — 1 je dělitelná pouze 1 a $k+1 > 1$ $(k>0)$. SPOR. $\square$

DOPLNĚK

6. a) Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

$\forall \Sigma$: kon. abeceda $\forall L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$: $L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2$.

NEPLATÍ: $\Sigma = L_1 = L_2 = \{a\}$: $\{a\} \not\subseteq \{a\}\{a\} = \{aa\}$

b) zkorigujte výše uvedené tvrzení co nejpřesnějším způsobem a následně dokažte.

$\forall \Sigma$: kon. ab. $\forall L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$: $L_1 = \emptyset \vee \varepsilon \in L_2 \Leftrightarrow L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2$

POZOR:
$L_1 = \{\varepsilon\}$
$L_2 = \{a\}$
$\{\varepsilon\} \not\subseteq \{\varepsilon\}\cdot\{a\} = \{a\}$

Důkaz:

"$\Rightarrow$" $\forall \Sigma$: kon. ab $\forall L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$: $L_1 = \emptyset \vee \varepsilon \in L_2 \Rightarrow L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2$.

- Postačí ukázat, že
  a) $\forall \Sigma \, \forall L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$: $L_1 = \emptyset \Rightarrow L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2$

9

b) $\forall \Sigma\ \forall L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*: \varepsilon \in L_2 \Rightarrow L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2$.

- ad a) Platí triviálně protože $\emptyset$ je nejmenší množina vůči $\subseteq$
- ad b) - Uvažme libovolnou Σ, libovolné $L_1 \subseteq \Sigma^*$ a libovolné $L_2 \subseteq \Sigma^*$ takové, že $\varepsilon \in L_2$.
  - Ukážeme, že $L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2$.
  - Zvolme libovolné $w \in L_1$.
  - Protože $\varepsilon \in L_2$, máme, že $w \cdot \varepsilon \in L_2$, ale $w \cdot \varepsilon = w \in L_2$.

"$\Leftarrow$": $\forall \Sigma$: kon. ab. $\forall L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$: $L_1 = \emptyset \vee \varepsilon \in L_2 \Leftarrow L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2$

Důkaz sporem:

- Předp., že $\neg(\forall \Sigma$: kon. ab $\forall L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*: L_1 = \emptyset \vee \varepsilon \in L_2 \Leftarrow L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2)$
- Ekvivalentně platí: $\exists \Sigma$: kon. ab. $\exists L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*: \neg($ —"— $)$

$\exists \Sigma$ —"— $: \neg(\neg(L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2) \vee (L_1 = \emptyset \vee \varepsilon \in L_2))$

$\exists \Sigma$ —"— $: \neg\neg(L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2) \wedge \neg($ —"— $)$

$\exists \Sigma$ —"— $: L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2 \wedge L_1 \neq \emptyset \wedge \varepsilon \notin L_2$

- Uvažme libovolné Σ, L_1, L_2 splňující výše uvedené.

- $L_1 \neq \emptyset$ — zvolme z něj řetězec $w \in L_1$, který patří mezi nejkratší řetězce v L_1
- Protože $L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2$, máme, že $w \in L_1 \cdot L_2$
- Pak ale $w = w_1 \cdot w_2$ takové, že $w_1 \in L_1$ a $w_2 \in L_2$.
- Avšak $w_2 \neq \varepsilon$, protože $\varepsilon \notin L_2$. Tedy $|w_2| \geq 1$
- Pak ale $|w_1| < |w|$: SPOR neexistuje řetězec kratší než nejkratší.

$\square$