# Bezkontextové jazyky – TIN – demo 13/10/2023

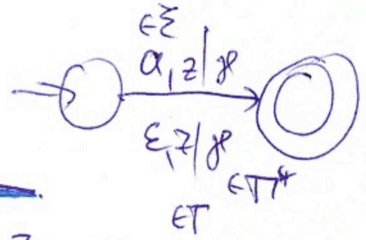
– ZA $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, z_0, F)$

kon. mn. (Q), kon. vst. abeceda ($\Sigma$), kon. zás. ab. ($\Gamma$), $q_0 \in Q$, $z_0 \in \Gamma$, $F \subseteq Q$

$$\delta: Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \rightarrow 2^{Q \times \Gamma^*}$$

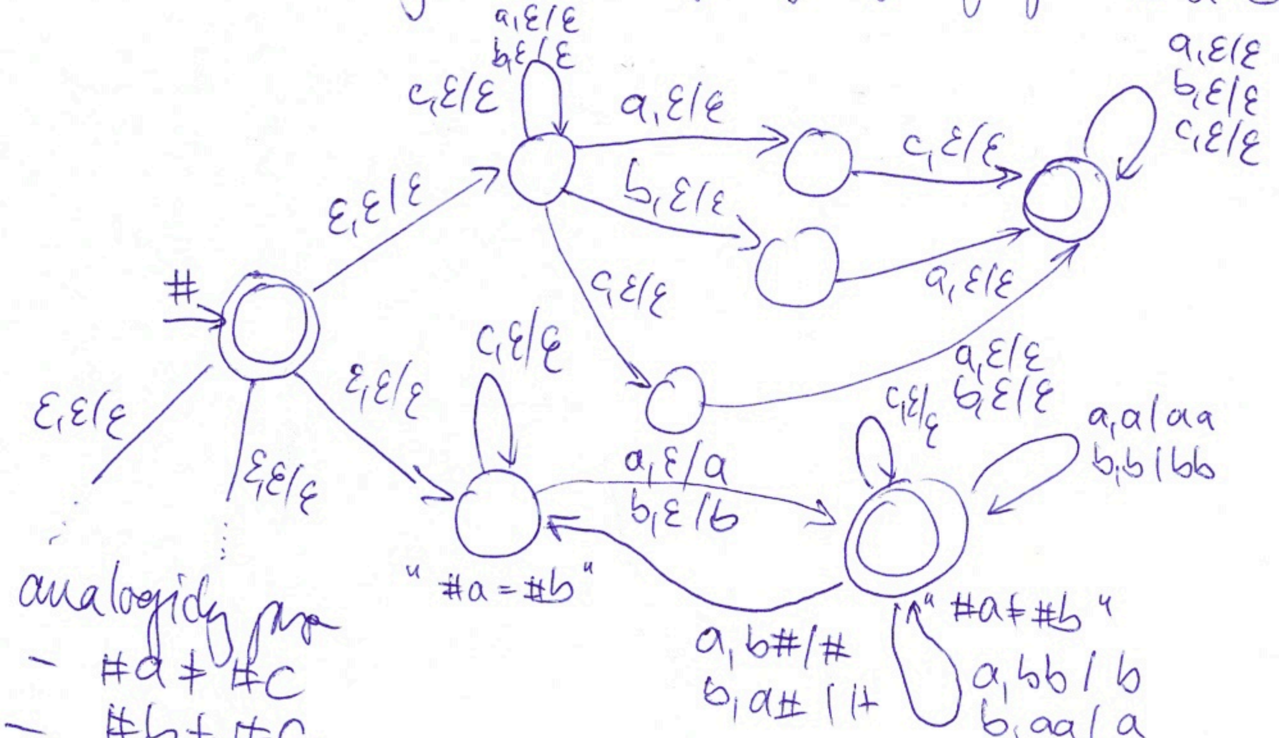
DZA: $\delta$ — " — $\Gamma^*$ — " —

Notace




komplement

1. Sestrojte $\underline{D}$ZA přijímající jazyk $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$ vůči abecedě $\Sigma = \{a, b, c\}$.




analogicky pro
– #a ≠ #c
– #b ≠ #c

porušení pořadí v $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$

porušení podmínky #a = #b

doplňky: a) Výše uvedený jazyk lze užít k důkazu neuzavřenosti $\mathcal{L}_2$ vůči <u>komplementu</u>.

Intuice: Jinak by $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\} = \{a^n b^n c^n \mid n \geq \}$ musel být v $\mathcal{L}_2$, což není.

b) Tento jazyk lze také užít k tomu, že DZA jsou striktně slabší než (R)ZA.

Intuice: Jinak by výše uvedený automat (ZA) šel determinizovat a komplementovat – a tudíž $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$ by musel být $\mathcal{L}_2$.

2. Sestavte a formálně zapište alg. pro „průnik" nad ZA a KA.

Vstup: – ZA $M_1 = (Q_1, \Sigma_1, \Gamma_1, \delta_1, q_0^1, z_0^1, F_1)$, kde

$$\delta_1 : Q_1 \times (\Sigma_1 \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma_1 \to 2^{Q_1 \times \Gamma_1^*}$$

– KA $M_2 = (Q_2, \Sigma_2, \delta_2, q_0^2, F_2)$, kde

$$\delta_2 : Q_2 \times \Sigma_2 \to 2^{Q_2}$$

Výstup: – ZA $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, z_0, F)$, kde

$$L(M) = L(M_1) \cap L(M_2)$$

Metoda:

1. $Q = Q_1 \times Q_2$
2. $\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$ (většinou by stačilo $\Sigma_1 \cap \Sigma_2$, ale hrozila by možnost $\Sigma = \emptyset$)
3. $\Gamma = \Gamma_1$
4. $\delta : Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \to 2^{Q \times \Gamma^*}$ takové, že

a) $\forall q_1^1, q_2^1 \in Q_1 \ \forall q_1^2, q_2^2 \in Q_2 \ \forall a \in \Sigma \ \forall z \in \Gamma \ \forall \gamma \in \Gamma^*$:

$$((q_2^1, q_2^2), \gamma) \in \delta((q_1^1, q_1^2), a, z)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$(q_2^1, \gamma) \in \delta_1(q_1^1, a, z) \wedge q_2^2 \in \delta_2(q_1^2, a)$$

b) $\forall q_1^1, q_2^1 \in Q_1 \ \forall q_1^2, q_2^2 \in Q_2 \ \forall z \in \Gamma \ \forall \gamma \in \Gamma^*$:

$$((q_2^1, q_2^2), \gamma) \in \delta((q_1^1, q_1^2), \varepsilon, z)$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$(q_2^1, \gamma) \in \delta_1(q_1^1, \varepsilon, z) \wedge q_1^2 = q_2^2$$

Nutné, nelze nahradit $\forall q \in Q_2$ a následně pracovat s $q_1$ namísto $q_2$ a $q_2^2$.

— Jinak by byl pokryt pouze případ kdy KA stojí a nebyl by pokryt přechod KA nad stavu aniž by četl symbol

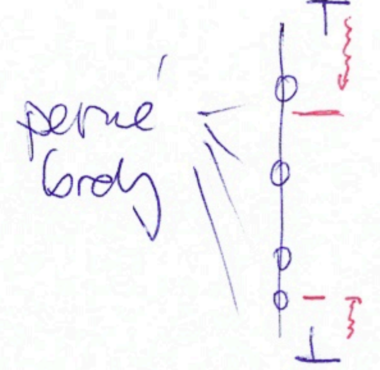
5. $q_0 = (q_0^1, q_0^2)$

6. $z_0 = z_0^1$

7. $F = F_1 \times F_2$.

## Algoritmy založené na postupném zpřesňování odhadu výsledku

- $D$ – doména odhadů řešení (včetně mezních řešení)
    - čísla, symboly, množiny, vektory
- $\sqsubseteq$ – uspořádání na odhadech, typicky se očekává existence minima $\perp$ a/nebo maxima $\top$
- $f: D \to D$ – zpřesňující funkce.
- $x_0, x_1, x_2 \ldots$ – proměnné nad $D$
- postup řešení: – $x_0$ – počáteční odhad
    - následně počítáme
      $x_{i+1} = f(x_i)$ pro $i = 0, 1, 2, \ldots$
    - dokud nenastane $x_{i+1} = x_i = \underline{\underline{x}}$ řešení
        - tzv. pevný bod $f()$: $f(x) = x$
- vyžaduje se typicky monotónnost $f()$




- typicky se hledá nejmenší nebo největší pevný bod – dle charakteru úlohy.
- nejmenší pevný bod: začneme $\bot$ a zvětšujeme
  největší — " — $\top$ a zmenšujeme.

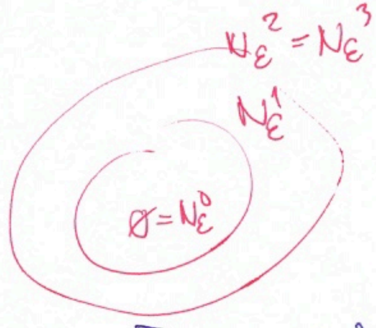
3. Zapište formálně alg. pro výpočet mn-y $N_\varepsilon$ pro danou bezk. gr.

Vstup: bezk. gr. $G = (N, \Sigma, P, S)$

Výstup: $N_\varepsilon = \{ A \in N \mid A \overset{+}{\underset{G}{\Rightarrow}} \varepsilon \}$

Metoda:

1. $N_\varepsilon^0 = \emptyset$, $i = 0$
2. $N_\varepsilon^{i+1} = \{ A \in N \mid \exists (A \to \alpha) \in P : \alpha \in (N_\varepsilon^i)^* \} \cup N_\varepsilon^i$
3. jestliže $N_\varepsilon^{i+1} = N_\varepsilon^i = N_\varepsilon$,
   jinak $i := i+1$ a jdeme na 2.




může být, ale nemusí!

(u tohoto případě překladače všechny zadané symboly se vždy znovu vygenerují a jiných případů může být nutné)

poznámka:
- $D = 2^N$
- $\sqsubseteq \; = \; \subseteq$, $\bot = \emptyset$, $\top = N$
- $f(X) = \{ A \in N \mid \exists (A \to \alpha) \in P : \alpha \in X^* \} [\cup X]$

- příklad: Algoritmický spočtěte $N_\varepsilon$ pro

$$G = (\{S, A, B, C\}, \{a, b\}, P, S)$$

$$P: \quad S \to aA \mid BAC \mid \varepsilon$$
$$A \to BC$$
$$B \to CC$$
$$C \to S \mid aS$$

---

- $N_\varepsilon^0 = \emptyset$
- $N_\varepsilon^1 = \{A \in N \mid \exists (A \to \alpha) \in P : \alpha \in (N_\varepsilon^0)^* \} =$
  $= \{ \text{———} \text{"} \text{———} : \alpha \in \emptyset^* \} =$
  $= \{ \text{———} \text{"} \text{———} \quad \alpha \in \{\varepsilon\} \} =$
  $= \{S\}$
- $N_\varepsilon^2 = \{A \in N \mid \exists (A \to \alpha) \in P : \alpha \in (N_\varepsilon^1)^* \}$

  $\Downarrow$

  $(\{S\})^* = \{\varepsilon, S, SS, \ldots\}$

  $= \{S, C\}$
- $N_\varepsilon^3 = \{A \in N \mid \ldots \ldots \quad \alpha \in \{S, C\}^* \}$

  $= \{\varepsilon, S, C, SS, SC, CS, CC \ldots$

  $= \{S, C, B\}$
- $N_\varepsilon^4 = \ldots \quad \{S, C, B, A\}$
- $N_\varepsilon^5 = \ldots \quad \{S, C, B, A\} = N_\varepsilon^4 = N_\varepsilon$

Algoritmy založené na výpočtu tranz. uzávěru vhodně zvolené relace

- typicky řešení Booleovských obvodů
  řešení lze převést na zjišťování, zda daný systém se může přes sekvenci kroků dostat z nějaké význačné konfigurace do jiné význačné konfigurace.
- Navrhne se relace $\rho$ popisující jeden krok v takové sekvenci
- spočte se $\rho^+$
- ověří se, zda $\rho^+$ platí mezi danými význačnými konfiguracemi.

4. Sestavte a formálně zapište alg. testu, zda daná bezk. gr. obsahuje cyklus.

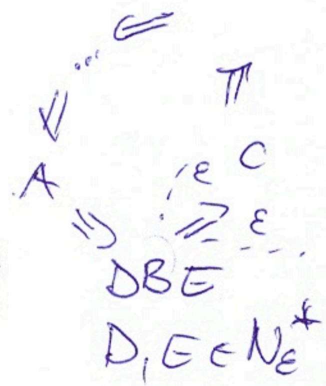
Vstup: bezk. gr. $G = (N, \Sigma, P, S)$

Výstup: ANO, pokud $\exists A \in N: A \underset{G}{\overset{+}{\Rightarrow}} A$; NE jinak.

Metoda: 1. Spočteme mn-u $N_\varepsilon$.

2. Zavedeme relaci $\rho \subseteq N \times N$ takovou, že $\forall A, B \in N$:

$A \rho B \iff \exists (A \to \alpha B \beta) \in P : \alpha, \beta \in N_\varepsilon^*$




3. Spočteme $\rho^+$

4. Odpovíme ANO, jestliže $\exists A \in N : A \rho^+ A$; jinak odpovíme NE.

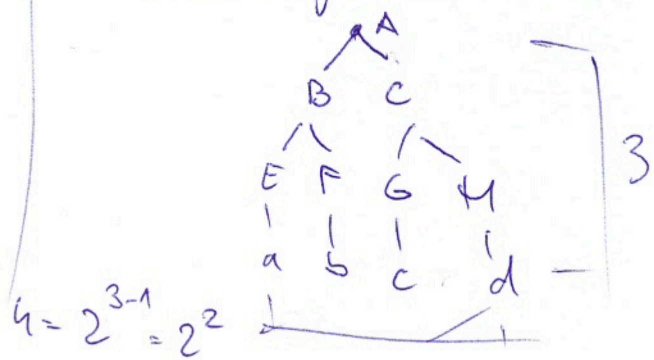
## Pumping Lemma pro $\mathcal{L}_2$

$\forall \Sigma$: abeceda $\forall L \subseteq \Sigma^*$: $L \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow \exists k > 0\ \forall z \in L: |z| \geq k \Rightarrow$

$\exists u, v, w, x, y \in \Sigma^* : z = u\underline{v}w\underline{x}y \wedge vx \neq \varepsilon \wedge |vwx| \leq k \wedge$

$\forall i \geq 0: u\underline{v}^i w \underline{x}^i y \in L$

Důkaz – hrubá intuice
– CNF:
délka větve $= 2^{\text{výška}-1}$




5. Dokažte, že $L = \{w \in \{a,b,c\}^* \mid \#_a(w) > \#_b(w) > \#_c(w)\} \notin \mathcal{L}_2$.

Důkaz sporem – zákl. idea:
- předp. $L \in \mathcal{L}_2$
- uvažujme libovolné $k > 0$

a zvolme $z = a^{k+2} b^{k+1} c^{k} \in L$,

$|z| = 3k+3 \geq k$ (protože $k>0$)

– Uvažme všechny volby $u, v, w, x, y$ splňující $z = uvwxy \wedge vx \neq \varepsilon \wedge |vwx| \leq k$. Takové musí existovat dle P.L.

– Každá z uvedených voleb spadá do jedné z následujících kategorií:

1. $v$ i $x$ je zvoleno z $a^{k+2}$. Pak ale pro $i=0$ bude $\#a \leq \#b$ (protože $vx \neq \varepsilon$).
2. $vx$ obsahuje pouze znaky a a b nebo jen b, každopádně alespoň 1 b. Pak ale pro $i=0$ nastane $\#b \leq \#c$.
3. $vx$ obsahuje alespoň 1 c a je tvořena z b a c, příp. pouze c. Pak ale pro dostatečně velké $i$ dojde k tomu, že $\#c > \#a$.

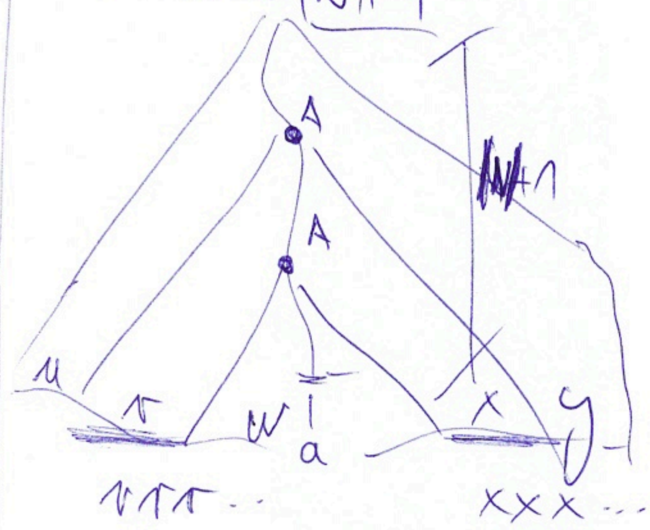
Další volby možné nejsou a není tedy možné splnit

– věta délky $2^{|N|+1}$ $\|$ $2^{výška-1}$

$|N|+1 = výška - 1$

výška $|N|+2$

– V nelistových uzlech máme cesty o délce $|N|+1$



podmínku $\forall i \geq 0: u v^i w x^i y \in L$, což je SPOR. □

- diskuse: šlo by dojít ke sporu pro větu $z = (abc)^k aab \in L$, $|z| = 3k+3 \geq k$.

  NE: lze zvolit např. $v = a$ a $x = bc$ (nebo např. $v = abc$ $x = \varepsilon$.)

6. Dokažte, že $L = \{c^i ww \mid i \geq 2 \wedge w \in \{a,b\}^*\} \notin \mathcal{L}_2$.

Důkaz sporem – idea:

- Předp., že $L \in \mathcal{L}_2$.
- Nechť $k > 0$
- zvolíme $z = c^2 a^k a^k \in L$, $|z| = 2 + 2k \geq k$
  - nelze dojít ke sporu – lze volit např. $v = a, w = \varepsilon, x = a$
- zvolíme $z = c^2 a^k \underline{b^k} a^k b^k \in L$, $|z| = 2 + 4k \geq k$.
- zbytek doma. (POZOR: nelze volit $v$ z prvního $a^k$ a $x$ z 2. $a^k$: $w$ by obsahovala $b^k$ a tudíž $|vwx| > k$ !!! )

□

7. Rozhodněte a dokažte, zda platí následující:

a) $L_1 \in \mathcal{L}_3 \vee L_2 \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow L_1 \cup L_2 \in \mathcal{L}_2$

(pozn. $\forall L_1 \forall L_2$ implicitní)

NE: lze volit např. $L_1 = \cancel{\emptyset} \in \mathcal{L}_3$

$L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\} \notin \mathcal{L}_2$

a $L_1 \cup L_2 = L_2 \notin \mathcal{L}_2$.

b) $\forall L_1 \in \mathcal{L}_2\ \forall L_2 \in \mathcal{L}_3 : L_1 \subseteq L_2 \Rightarrow \overline{(L_1 \cup L_2)} \in \mathcal{L}_3$

ANO: – protože $L_1 \subseteq L_2$, tak $L_1 \cup L_2 = L_2 \in \mathcal{L}_3$

– a $\mathcal{L}_3$ je uzavřena vůči komplementu

c) $\forall L_1 \in \mathcal{L}_2\ \forall L_2 \in \mathcal{L}_3 : L_1 \subseteq L_2 \Rightarrow \overline{L_1 \cap L_2} \in \mathcal{L}_2$

NE: lze zvolit např. $L_1 = \overline{\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}} \in \mathcal{L}_2$

a $L_2 = \{a, b, c\}^* \in \mathcal{L}_3$ a pak

$\overline{L_1 \cap L_2} = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\} \notin \mathcal{L}_2$.


D