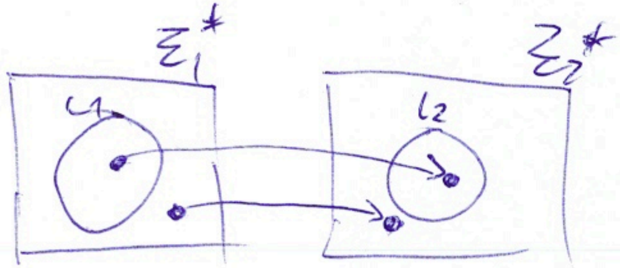
TIN – demo 4 – nerozhodnutelnost 10/11/2023

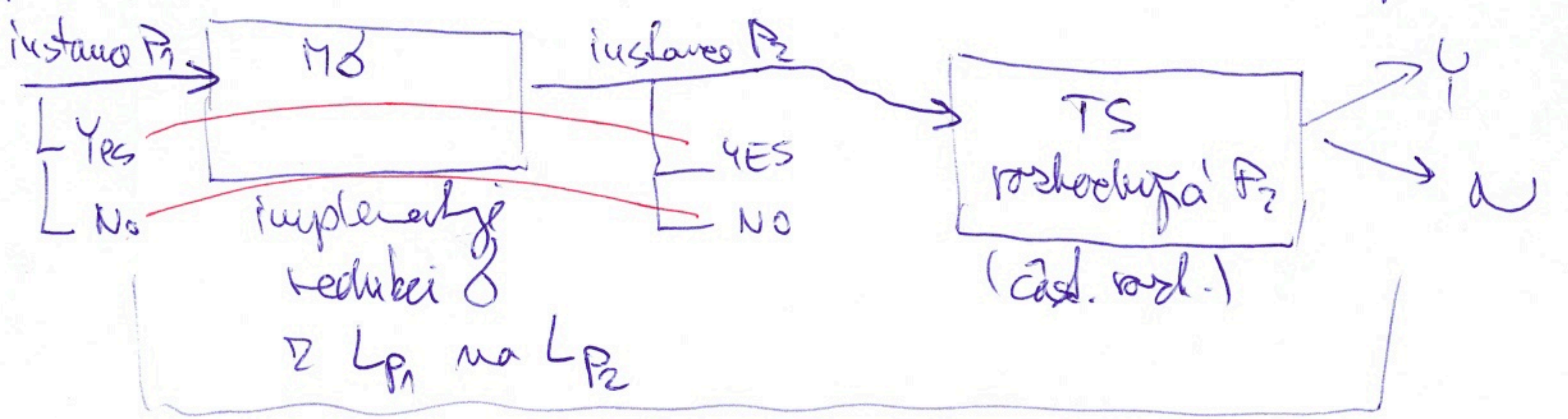
- redukce σ z $L_1 \subseteq \Sigma_1^*$ na $L_2 \subseteq \Sigma_2^*$ je
  $\sigma: \Sigma_1^* \rightarrow \Sigma_2^*$ taková, že



  1. σ je implementovatelná úplným TS a
  2. σ "zachovává členství" v jazycích L_1, L_2:
     $\forall w \in \Sigma_1^*: w \in L_1 \Leftrightarrow \sigma(w) \in L_2$.

- použití
  a) <u>dokazování rozhodnutelnosti / část. rozhodnutelnosti</u>

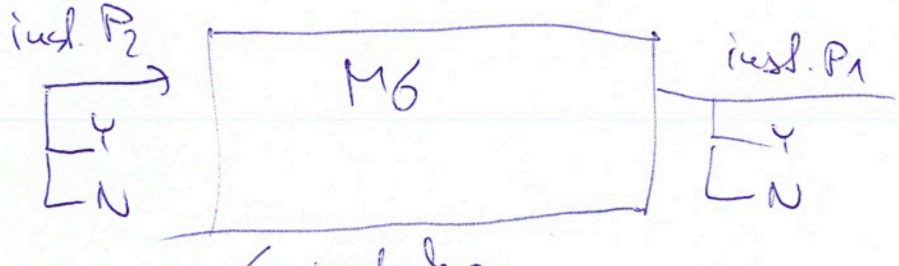
P_1 – nový problém $\quad$ P_2 – známý rozhodnutelný / částečně –"– problém



b) dokázání nerozhodnutelnosti (důkaz, že problém není ani částečně rozhodnu.)

P_1 – nový problém

P_2 – známý nerozh. problém (ani částečně rozhodn. problém)



neexistující TS rozhodující P_1

↑ nemůže existovat, jinak by M_σ; TS rozh. P_1 rozhodovalo P_2 – NELZE

σ redukce z L_{P_2} na L_{P_1}

- obecná kostra důkazu nerozhodnutelnosti redukcí
  1. Navrhneme redukci σ ze známého nerozh. problému na zkoumaný problém.
  2. Ukážeme, že σ lze implementovat ÚTS.
  3. Ukážeme, že σ zachovává členství v jazyce.

1. Dokažte, že problém neprázdnosti jazyka TS není rozhodnutelný.

- Důkaz redukcí z problému zastavení TS.
- Problém zastavení TS lze charakterizovat jazykem
  $HP = \{ \langle M \rangle \# \langle w \rangle \mid M$ je TS, který na w zastaví $\}$,
  kde $\langle . \rangle$ je operátor zakódování TS a jejich vstupů.
- Problém neprázdnosti lze charakterizovat jazykem
  $NEP = \{ \langle M \rangle \mid M$ je TS takový, že $L(M) \neq \emptyset \}$.
- Navrhneme redukci $\sigma : \{0,1,\#\}^* \to \{0,1\}^*$
  z HP na NEP.

idea	HP		NEP
	– nekorektní instance (NO)	$\mapsto$	TS s prázdným jazykem $\to 0$ 0 (NO)
	– vstup $\langle M \rangle \# \langle w \rangle$, M na w zastaví (YES)	$\mapsto$	TS s neprázdným jazykem (např. Σ^*) (YES)
	– vstup $\langle M \rangle \# \langle w \rangle$, M na w cyklí (NO)	$\mapsto$	TS s prázdným jazykem. (NO)

- σ přiřadí řetězci $x \in \{0,1,\#\}^*$ řetězec $\langle M_x \rangle$, kde M_x je TS pracující následovně:
  1. M_x smaže svůj vstup.
  2. M_x zapíše na vst. pásku řetězec x
  3. M_x ověří, zda $x = \langle M \rangle \# \langle w \rangle$ pro TS M a řetězec w — test na členství v reg. jazyce kódů. Pokud ne, odmítne.
  4. Jinak spustí simulaci M na w. Pokud ta doběhne přijme — jinak cyklí.
- σ lze snadno realizovat pomocí ÚTS M_σ. Konečně M_x sestává ze sekvence 4 dílčích komponent:
  1. Smazání vstupu — konst. operace, M_σ pouze vypíše přísl. konstantní kód.
  2. Zápis x na vstup: snadné — je-li $x = a_1 \dots a_n$, $n \geq 0$, postačí aby M_σ vypsal sekvenci posun doprava, zápis a_1, posun doprava ..., zápis a_n.
  3. Test správného zformování x: test na členství ve fixním reg. jazyku. M_σ vypíše kód simulace příslušného KA na x.

4. M_σ vypíše kód UTS

- Studujme jazyk TS M_x – existují dva případy:

  a) $L(M_x) = \emptyset \Leftrightarrow x$ nemá správnou strukturu nebo $x = \langle M \rangle \# \langle w \rangle$ a M je TS, který cyklí na vstupu w.

  b) $L(M_x) = \Sigma^*$ $\Leftrightarrow$ $x = \langle M \rangle \# \langle w \rangle$ a M je TS, který na w zastaví.

- Ukážeme zachování členství v jazyce:

  $\forall x \in \{0,1,\#\}^* : \sigma(x) \in UEP \Leftrightarrow \sigma(x) = \langle M_x \rangle$,

  kde $L(M_x) = \Sigma^* \Leftrightarrow x = \langle M \rangle \# \langle w \rangle$, kde TS M zastaví na vstupu w $\Leftrightarrow x \in HP$ $\square$

2. Ukažte, že problém prázdnosti jazyka TS není ani částečně rozhodnutelný.

- Idea důkazu:
  - Redukce z problému nezastavení TS, který je charakterizován jazykem

    $CO\text{-}HP = \{ \langle M \rangle \# \langle w \rangle \mid M$ je TS, který na w nezastaví$\}$

- Problém prázdnosti jazyka TS lze charakterizovat jazykem

  $EMP = \{\langle M\rangle \mid M \text{ je TS takový, že } L(M) = \emptyset\}$.

- Lze užít takřka identickou redukci jako v 1. příkladě, pouze v situaci, kdy x je nesprávně zformovaná instance, M_x přijme vše (a tedy $L(M_x) = \Sigma^*$). □

3. Dokažte, že problém regularity jazyka daného TS není ani částečně rozhodnutelný.

Důkaz (idea):

- Problém regularity budeme reprezentovat jazykem $REG = \{\langle M\rangle \mid M \text{ je TS takový, že } L(M) \in \mathcal{L}_3\}$.
- Důkaz redukcí z co-MP.
- Navrhneme redukci $\sigma : \{0,1,\#\}^* \to \{0,1\}^*$ redukující co-MP na REG.

⌈ idea co-MP $\qquad$ REG

- x : nesmysl (NO) $\mapsto L(M_x) = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$
- $x = \langle M\rangle \# \langle w\rangle$, M na w zastaví (NO) $\mapsto$ — " —

⌊ – $x = \langle M\rangle \# \langle w\rangle$, M na w nezastaví (YES) $\mapsto L(M_x) = \emptyset$

- Redukce σ přiřadí $x \in \{0,1,\#\}^*$ kód TS M_x, který na vstupu $z \in \{0,1\}^*$ pracuje následovně:
  1. M_x posoudí, zda jeho vstup $z \in \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$ a výsledek si zapamatuje ve svém stavovém řízení.
  2. Smaže vstup a zapíše na něj x.
  3. Ověří, zda $x = \langle M \rangle \# \langle w \rangle$ pro TS M a vstup w. Pokud ne, pak pokud $z \in \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$, přijme, jinak odmítne.
  4. spustí simulaci M na w. Pokud doběhne, pak pokud $z \in \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$, přijme, jinak odmítne.
- Tuto redukci lze zřejmě implementovat ÚTS M_σ.
- Zkoumejme $L(M_x)$ — mohou zde nastat 2 případy:
  a) $L(M_x) = \emptyset \Leftrightarrow x = \langle M \rangle \# \langle w \rangle$, kde M je TS a w je vstup takový, že M na w cyklí.
  b) $L(M_x) = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\} \Leftrightarrow x$ není správně zformované, nebo $x = \langle M \rangle \# \langle w \rangle$, kde M je TS, který na w zastaví.

- Ukážeme zachování členství v jazyce:

$\forall x \in \{0,1,\#\}^*: \sigma(x) \in REG \Leftrightarrow L(M_x) = \emptyset \Leftrightarrow$

$x = \langle M \rangle \# \langle w \rangle$, kde TS M na vstupu ~~ne~~ zastaví

$\Leftrightarrow x \in CO-HP$. $\square$

4. Dokažte, že problém neregularity jazyka daného TS rovněž není ani částečně rozhodnutelný.

Idea důkazu:

- Daný problém lze reprezentovat jazykem $CO-REG = \{ \langle M \rangle \mid M$ je TS takový, že $L(M) \notin \mathcal{L}_3 \}$.
- Použijeme redukci $\sigma : \{0,1,\#\}^* \to \{0,1\}^*$ redukující CO-HP na CO-REG.
- σ přiřadí každému $x \in \{0,1,\#\}^*$ TS M_x, který pracuje následovně:
  1. M_x posoudí, zda jeho vstup $z \in \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$. Pokud ano, přijme.
  2. M_x smaže vstup a zapíše na něj x.
  3. Posoudí, zda $x = \langle M \rangle \# \langle w \rangle$ pro TS M a vstup w. Pokud ne, přijme.

4. M_x spustí simulaci M na w. Pokud doběhne, přijme.

- σ lze evidentně implementovat ÚTS.
- Zkoumejme $L(M_x)$ — nastávají 2 případy:

a) $L(M_x) = \Sigma^*$ $\Leftrightarrow$ x je nesprávně zformované, nebo $x = \langle M \rangle \# \langle w \rangle$, kde TS M na vstupu w zastaví.

b) $L(M_x) = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$ $\Leftrightarrow$ x je $\langle M \rangle \# \langle w \rangle$, kde M je TS, který na vstupu w cyklí.

- Zachování členství:

$\forall x \in \{0, 1, \#\}^* : \sigma(x) \in \text{CO-REG} \Leftrightarrow L(M_x) = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$
$\Leftrightarrow x = \langle M \rangle \# \langle w \rangle$, kde M je TS, který na w nezastaví $\Leftrightarrow x \in \text{CO-HP}$. $\square$

5. Dokažte, že problém posouzení, zda daný TS je úplný, není ani částečně rozhodnutelný.

Idea důkazu:

- Redukce z CO-MP.
- problém úplnosti budeme reprezentovat jazykem $TOTAL = \{ \langle M \rangle \mid M \text{ je úplný TS} \}$
- Navrhneme redukci $\sigma : \{0,1,\#\}^* \to \{0,1\}^*$ redukující CO-MP na TOTAL.
- σ přiřadí každému $x \in \{0,1,\#\}^*$ TS M_x, který pracuje následovně:
  1. M_x na ~~svou~~ 2. pásku zapíše x a ověří, zda $x = \langle M \rangle \# \langle w \rangle$ pro TS M a vstup w. Pokud ne, M_x začne cyklit.
  2. Pokud M_x má na vstupní pásce řetězec z o délce $|z| = n \geq 0$, odsimuluje např. na 3. pásce max n kroků TS M na w.

3. Pokud M v rámci n kroků zastaví, M_x začne cyklit, jinak přijme.

- Implementovat δ pomocí úplného TS je zřejmě možné.
- Zachování členství:

$\forall x \in \{0,1,\#\}^*: \delta(x) \in TOTAL \Leftrightarrow x = \langle M \rangle \# \langle w \rangle$ pro TS M a vstup w takové, že M na w nezastaví pro libovolné $n \geq 0$ kroků $\Leftrightarrow$ $x = \langle M \rangle \# \langle w \rangle$ pro TS M, který na vstupu w nezastaví $\Leftrightarrow x \in CO\text{-}HP$. $\square$

Postovy systémy (PS)

- PS S nad abecedou Σ je definován jako neprázdný seznam dvojic neprázdných řetězců:

$S = \langle (\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2), \dots, (\alpha_n, \beta_n) \rangle$, kde $n \geq 1$ a $\forall 1 \leq i \leq n: \alpha_i, \beta_i \in \Sigma^+$.

- Řešení PS S je neprázdný seznam indexů $I = \langle i_1, i_2, \dots, i_m \rangle$, kde $m \geq 1$ a $\forall 1 \leq j \leq m: 1 \leq i_j \leq n$ a

$\alpha_{i_1}\alpha_{i_2}\cdots\alpha_{i_m} = \beta_{i_1}\beta_{i_2}\cdots\beta_{i_m}$.

- Postův korespondenční problém (PCP) se ptá, zda daný PS má řešení.
- PCP je nerozhodnutelný.
- Příklady PS nad $\Sigma = \{a, b\}$

a) - $S_1 = \langle (ab, a), (aa, baaab), (aa, a) \rangle$

$n=3$ $\quad \alpha_1\ \beta_1 \quad \alpha_2\ \beta_2 \quad \alpha_3\ \beta_3$

- S_1 má řešení $I = \langle 1, 2, 1, 3 \rangle$:

$\alpha_1\alpha_2\alpha_1\alpha_3 = ab.aa.ab.aa$

$\beta_1\beta_2\beta_1\beta_3 = a.baaab.a.a$

b) - $S_2 = \langle (ab, a), (aaa, a), (ba, b) \rangle$

- S_2 nemá řešení — konečně

$\forall\, 1 \le i \le 3 : |\alpha_i| > |\beta_i|$, tedy konkatenace β_i bude vždy kratší.

6. Dokažte, že problém víceznačnosti BG není rozhodnutelný.

Idea důkazu:

- Použijeme redukci z PCP na problém víceznačnosti BG.
- PCP lze charakterizovat jazykem
  $PCP = \{ \langle S \rangle \mid S$ je PS, který má řešení $\}$,
  kde $\langle . \rangle$ je vhodný operátor kódování PS nad $\{0,1\}$.
- Problém víceznačnosti BG lze charakterizovat jazykem $AMB = \{ \langle G \rangle \mid G$ je BG, která je víceznačná – tedy má alespoň 2 různé der. stromy pro také věty $\}$
  kde $\langle . \rangle$ je vhodný operátor kódování BG nad $\{0,1\}$
- Navrhneme redukci $\sigma : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ redukující PCP na AMB.
- σ přiřadí každému řetězci $x \in \{0,1\}^*$ gramatiku G_x takovou, že:
  1. Pokud x není platný kód PS, pak $G_x = (\{S\}, \{a\}, \{S \to a\}, S)$, která je

jednoznačná.

2. Pokud x je kód PS $S = \langle(\alpha_1,\beta_1),\dots,(\alpha_n,\beta_n)\rangle$ nad Σ pro nějaké $n \geq 1$, pak:

intuice na příkladu PS $S_1 = \langle(ab,a),(aa,baaab),(aa,a)\rangle$, který má řešení — a tedy G_x musí být víceznačná.

BG G: $S \to S_1 \mid S_2$ (derivace přes α_i/β_i)

$S_1 \to ab S_1' 1 \mid aa S_1' 2 \mid aa S_1' 3$

$S_2 \to a S_2' 1 \mid baaab S_2' 2 \mid a S_2' 3$

aby se vynutilo použití alespoň jedné α_i/β_i

$S_1' \to ab S_1' 1 \mid aa S_1' 2 \mid aa S_1' 3 \mid \#$

$S_2' \to a S_2' 1 \mid baaab S_2' 2 \mid a S_2' 3 \mid \#$

řešení $I = \langle 1,2,1,3\rangle$ pak odpovídají násl. der. stromy:

$$S \Rightarrow S_1 \Rightarrow ab S_1' 1 \Rightarrow abaa S_1' 21 \Rightarrow \dots$$

$$S \Rightarrow S_2 \Rightarrow a S_2' 1 \Rightarrow abaaab S_2' 21 \Rightarrow \dots$$

$$abaaabaa\#2121 = abaaabaa\#3121$$

$G_x = (\{S, S_1, S_2, S_1', S_2'\}, \Sigma \cup \{\#, 1, \ldots, n\}, P_x, S)$,

kde všechna čísla $1, \ldots, n$ považujeme za literály (pozor $11 \neq 1.1$) a bez újmy na obecnosti předpokládáme, že $\{\#, 1, \ldots, n\} \cap \Sigma = \emptyset$.

P_x je nejmenší množina pravidel zahrnující následující pravidla:

- $S \to S_1 \mid S_2$
- $\forall 1 \leq i \leq n$: $S_1 \to \alpha_i S_1' i$, $S_2 \to \beta_i S_2' i$,

  $S_1' \to \alpha_i S_1' i$, $S_2' \to \beta_i S_2' i$
- $S_1' \to \#$, $S_2' \to \#$

- Redukci σ lze evidentně implementovat úplným TS M_σ.
- zachování členství v jazycích:

  $\forall x \in \{0,1\}^*: \sigma(x) \in AMB \iff x$ je platný kód PS S a v gramatice G_x je možno vyderivovat stejnou větu přes S_1 i S_2 (derivováním jen přes S_1 nebo jen přes S_2 nemůžeme dostat 2-mi různými způsoby tutéž větu — výsledek se bude lišit vždy minimálně v číslech pravidel). $\iff$

v PS s existuje sekvence indexů $I = \{i_1 \dots i_m\}, m \geq 1$
taková, že $\alpha_{i_1} \dots \alpha_{i_m} \# i_m \dots i_1 = \beta_{i_1} \dots \beta_{i_m} \# i_m \dots i_1$
$\Leftrightarrow$ PS má řešení I $\Leftrightarrow$ $x \in PCP$. $\square$