Opakování základních pojmů (viz přednášky) | Cvičení 6: Redukce (1)

- rekurzivní jazyky (tj. rozhodnutelné problémy) – $\mathcal{L}_{REC}$
- rekurzivně vyčíslitelné jazyky (tj. částečně rozhodnutelné problémy) – $\mathcal{L}_{RE}$
- problém zastavení: $HP = \{ \langle M \rangle \# \langle w \rangle \mid TS\ M \text{ zastaví na } w \}$
- $HP \in \mathcal{L}_{RE}$ ale $HP \notin \mathcal{L}_{REC}$
- $\text{Co-}HP \notin \mathcal{L}_{RE}$
- **redukce**: $A \subseteq \Sigma^*$, $B \subseteq \Psi^*$

  $A \leq B \iff \exists$ redukční funkce $\sigma: \Sigma^* \to \Psi^*$ t.ž.:

  (A se redukuje na B)

  1) $\forall w \in \Sigma^*: \quad w \in A \iff \sigma(w) \in B$ korektnost

  $$\boxed{\begin{array}{l} w \in A \Rightarrow \sigma(w) \in B \ \wedge \\ w \notin A \Rightarrow \sigma(w) \notin B \end{array}}$$

  2) σ lze implementovat pomocí úplného TS ? M_σ

  tj. σ je totálně vyčíslitelná funkce

---

1) Použití redukce:

$A \leq B \wedge B \in \mathcal{L}_{REC} \Rightarrow A \in \mathcal{L}_{REC}$

$A \leq B \wedge B \in \mathcal{L}_{RE} \Rightarrow A \in \mathcal{L}_{RE}$

↳ řešíme A pomocí B a redukce

2)

$A \leq B \wedge A \notin \mathcal{L}_{REC} \Rightarrow B \notin \mathcal{L}_{REC}$

$A \leq B \wedge A \notin \mathcal{L}_{RE} \Rightarrow B \in \mathcal{L}_{RE}$ ⇝ Víme, že A "neumíme řešit" a pomocí redukce dostáváme, že B "nelze řešit"

(2)

1. Rozhodněte a dokažte zda platí následující tvrzení

Nechť $\Sigma = \{a, b, c\}$:

a) $\boxed{\{a^n b^n \mid n \geq 0\} \leq \{a^n \mid n \geq 0\}}$

Řešení: Taková redukce existuje:

$$\forall w \in \Sigma^*: \sigma(w) = \begin{cases} a & \text{pokud } w \in \{a^n b^n \mid n \geq 0\} \\ b & \text{jinak} \end{cases}$$

Zřejmě σ lze implementovat úplným TS. Příslušnost do je rozhodnutelný problém

b) $\boxed{\{a^n b^n \mid n \geq 0\} \leq HP}$

Řešení: I tato redukce existuje:

$$\forall w \in \Sigma^*: \sigma(w) = \begin{cases} \langle M \rangle \# \langle w \rangle & \text{pokud } w \in \{a^n b^n \mid n \geq 0\} \\ \langle M' \rangle \# \langle w \rangle & \text{jinak} \end{cases}$$

opět lze implementovat úplným TS

kde TS M zastaví pro každý svůj vstup a TS M' cyklí ~~[illegible]~~ nad každým vstupem

③

$\boxed{c)\ HP \leq \{a^n b^n \mid n \geq 0\}}$

Řešení: Taková redukce nemůže existovat

Z $HP \leq \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ by plynulo, že ~~[illegible]~~ $HP \in \mathcal{L}_{REC}$ což je spor

Pozn. Všimněte si, že M_σ nemůže rozhodnout zda $w \in HP$!!
~~[illegible]~~ Toto ale neznamená, že nelze HP redukovat na jiné problémy (viz níže)

---

2) Uvažme jazyk $L_1 = \{\langle M \rangle \mid M \text{ je TS t.ž. } |L(M)| \geq 2024\}$

Zařaďte L_1 do příslušných tříd Chomského hierarchie

$L_1 \in \mathcal{L}_{RE}$ Intuice: existuje konečný certifikát příslušnosti 2024 slov a jim příslušné (konečné) akceptující simulace stroje M

Důkaz: konstrukce TS T t.ž. $L(T) = L_1$ (viz dřívější cvičení)

$L_1 \notin \mathcal{L}_{REC}$ Intuice: Jak vypadá certifikát nepříslušnosti?
Musel by ukázat neakceptování / cyklení pro nekonečně mnoho vstupů

Dokážeme že $L_1 \notin \mathcal{L}_{REC}$ pomocí redukce (4)

Jakou redukci použít? Budeme redukovat pouze z HP nebo co-HP

Existuje redukce co-HP $\leq L_1$? Ne, jelikož z toho by plynulo, že L_1 není RE ⇝ spor

$\boxed{\text{Nyní dokážeme, že } HP \leq L_1}$ (z čehož plyne, že $L_1 \notin \mathcal{L}_{REC}$)

Sestrojíme požadovanou redukční funkci σ:

1) Typ (signatura) σ:

$$\underbrace{\sigma(\langle M \rangle \# \langle w \rangle)}_{\text{instance HP}} = \underbrace{\langle M' \rangle}_{\text{instance } L_1}$$

σ je totální, takže musí něco vrátit i když na vstup nedostane validní kód TS a jeho vstupu. V tomto případě σ může vrátit např. TS M' t.ž. $L(M') = \emptyset$ (všechny vstupy hned zamítne)

$\Downarrow$

$\langle M' \rangle \notin L_1$

2) Musí platit, že

M na w zastaví $\Leftrightarrow |L(M')| \geq 2024$

Chování M' tudíž musí záležet na M a w

$\dots$

5

Úplný TS Π_σ (který implementuje σ) pro vstup $\langle \Pi \rangle \# \langle w \rangle$ "naprogramuje" TS Π' (vrátí kód $\langle \Pi' \rangle$) ⇝ tudíž σ je totální vyčíslitelná funkce

kód Π' (budeme používat imperativní programovací jazyk):

vstup: w'
1) Simuluj Π na w
2) Akceptuj w'

Π_σ "zapíše" svůj vstup ($\langle \Pi \rangle \# \langle w \rangle$) do kódu Π'
kód Π' tudíž závisí na konkrétním Π a w.

3) Analýza (důkaz korektnosti σ): $|L(\Pi')| \geq 2024$

Π na w zastaví $\Rightarrow$ Π' akceptuje libovolný vstup w' $\Rightarrow L(\Pi') = \Sigma^* \Rightarrow \langle \Pi' \rangle \in L_1$

Π na w cyklí $\Rightarrow$ Π' cyklí pro libovolný vstup w' $\Rightarrow L(\Pi') = \emptyset \Rightarrow \langle \Pi' \rangle \notin L$

$\boxed{3.}$ $L_2 = \{ \langle \Pi_1 \rangle \# \langle \Pi_2 \rangle \mid \text{TS } \Pi_1 \text{ a } \Pi_2 \text{ t.ž. } L(\Pi_1) \cap L(\Pi_2) \neq \emptyset \}$

$L_2 \in \mathcal{L}_{RE}$: Intuice: Stačí nalézt slovo w t.ž. Π_1 i Π_2 w akceptují (dvě konečné simulace)

$L_2 \notin \mathcal{L}_{REC}$ Intuice: Certifikát nepříslušnost opět musí ukázat neakceptování pro nekonečně mnoho vstupů

Ukážeme, že $HP \leq L_2$

Chování M_2 nezáleží na M a w

Trp σ: $\sigma(\langle M \rangle \# \langle w \rangle) = \langle M_1 \rangle \# \langle M_2 \rangle$

Za M_1 stačí užít TS M' z minulého příkladu a z M_2 TS t.ž. $L(M_2) = \Sigma^*$

Pak dostáváme

M na w zastaví $\Rightarrow L(M_1) = \Sigma^* \Rightarrow L(M_1) \cap L(M_2) = \Sigma^* \Rightarrow \langle M_1 \rangle \# \langle M_2 \rangle \in L_2$

M na w cyklí $\Rightarrow L(M_1) = \emptyset \Rightarrow L(M_1) \cap L(M_2) = \emptyset \Rightarrow \langle M_1 \rangle \# \langle M_2 \rangle \notin L_2$

---

4. Uvažme jazyk $L_3 = \{\langle M \rangle \mid M \text{ je TS t.ž. } |L(M) \cap \{a,b\}| = 1\}$

$L_3 \notin \mathcal{L}_{RE}$: Intuice: Ani certifikát příslušnosti není konečný: Musí ukázat neakceptování tj. možné cyklení stroje M na ~~…~~ vstupu 'a' či 'b'

Nyní sestrojíme obě redukce

$HP \leq L_3 \Rightarrow L_3 \notin \mathcal{L}_{REC}$ a $co\text{-}HP \leq L_3 \Rightarrow L_3 \notin \mathcal{L}_{RE}$

Začneme s $HP \leq L_3$

$$\sigma(\langle M\rangle \# \langle w\rangle) = \langle M'\rangle$$

Nejprve si uvědomme, že řešení (kód M') z příkladu 2. není korektní: M na w zastaví $\Rightarrow L(M') = \Sigma^* \Rightarrow L(M') \cap \{a,b\} = 2 \Rightarrow \langle M'\rangle \notin L_3$!

Tudíž σ musí vrátit jiný M':

vstup w'

1) simuluj M na w
2) IF $w' = $ 'a' akceptuj w'
3) ELSE zamítni w'

Korektnost: M na w zastaví $\Rightarrow L(M') = \{a\} \Rightarrow \langle M'\rangle \in L_3$

M na w cyklí $\Rightarrow L(M') = \emptyset \Rightarrow \langle M'\rangle \notin L_3$ $\square$

Nyní ukážeme, že $co\text{-}HP \leq L_3$

(8)

Zřejmě předchozí řešení pro HP nefunguje. ~~[illegible]~~
Musíme "prohodit" chování M' $\rightsquigarrow$ zejména pokud M na w cyklí pak $L(M')$ se nemůže rovnat $\emptyset$. Musíme něco "přidat" před spuštění simulace

Zde je možné řešení:

kód M':

vstup w'
1) if $w' = 'a'$ akceptuj w'
2) simuluj M na w
3) akceptuj w'

korektnost:

M na w zastaví $\Rightarrow L(M') = \Sigma^* \Rightarrow \langle M' \rangle \notin L_3$

M na w cyklí $\Rightarrow L(M') = \{a\} \Rightarrow \langle M' \rangle \in L_3$

$\square$