# Převod formule do NNF

– povolené spojky $\wedge, \vee, \neg$ ($\neg$ jen před proměnnými)

Postup:

1) náhrada „nežádoucích" spojek
2) De-morgan: $\neg(x \wedge y) \Leftrightarrow (\neg x \vee \neg y)$

$\neg(x \vee y) \Leftrightarrow (\neg x \wedge \neg y)$

$$\neg(x \Leftrightarrow \neg(x \wedge y))$$
$$\Leftrightarrow \neg((x \wedge \neg(x \wedge y)) \vee (\neg x \wedge (x \wedge y)))$$
$$\Leftrightarrow \neg(x \wedge \neg(x \wedge y)) \wedge \neg(\neg x \wedge (x \wedge y))$$
$$\Leftrightarrow (\neg x \vee (x \wedge y)) \wedge (x \vee \neg(x \wedge y))$$
$$\Leftrightarrow (\neg x \vee (x \wedge y)) \wedge (x \vee (\neg x \vee \neg y))$$

Jaká je velikost $NNF(\varphi)$ vzhledem $|\varphi|$

– exponenciální kvůli rozepsání „$\Leftrightarrow$" nebo „xor"

Jaká je velikost $NNF(\varphi)$ pro formuli $\varphi$, která obsahuje pouze $\land, \lor, \neg$?

Dokážeme, že nárůst velikosti $NNF(\varphi)$ vůči $\varphi$ je lineární.

$$|NNF(\varphi)| \leq 2|\varphi|$$

Pomocí indukce vzhledem k počtu spojek $\land, \lor$

---

Počet $\land, \lor$ je 0.

$$\left.\begin{aligned} \varphi &\equiv (X) \implies NNF(\varphi) \equiv \varphi \\ \varphi &\equiv (\neg X) \implies NNF(\varphi) \equiv \varphi \end{aligned}\right\} \implies \text{triviálně platí } |NNF(\varphi)| \leq 2|\varphi|$$

---

Předpokládejme, že platí pro „i"

Ukážeme pro i+1

$$\left.\begin{aligned} &1)\ \varphi \equiv (\varphi_A \land \varphi_B) \\ &2)\ \varphi \equiv (\varphi_A \lor \varphi_B) \\ &3)\ \varphi \equiv \neg(\varphi_A \land \varphi_B) \\ &4)\ \varphi \equiv \neg(\varphi_A \lor \varphi_B) \end{aligned}\right\} \text{ počet spojek } \land, \lor \text{ v } \varphi_A \text{ a } \varphi_B \text{ je max. } i$$

1) $\varphi \equiv (\varphi_A \wedge \varphi_B)$

$NNF(\varphi) \equiv (NNF(\varphi_A) \wedge NNF(\varphi_B))$

$|NNF(\varphi)| = |NNF(\varphi_A)| + |NNF(\varphi_B)| + 3 \leq 2 \cdot |\varphi_A| + 2|\varphi_B| + 3 \leq 2 \cdot |\varphi|$

2) obdobně

3) $\varphi \equiv \neg(\varphi_A \wedge \varphi_B)$

$NNF(\varphi) \equiv (NNF(\neg\varphi_A) \vee NNF(\neg\varphi_B))$

$|NNF(\varphi)| = |\underline{NNF(\neg\varphi_A)}| + |\underline{NNF(\neg\varphi_B)}| + 3 \leq 2 \cdot |\neg\varphi_A| + 2 \cdot |\neg\varphi_B| + 3 \leq 2 \cdot |\varphi|$

4) obdobně

# Predikátová logika s rovností

Mějme formuli $\varphi$: $\forall x\,(E(x) \rightarrow M(x,a))$

Zapište signaturu této formule

$$\langle \underbrace{\{a/0\}}_{\text{funkční symboly}}, \underbrace{\{E/1, M/2\}}_{\text{predikátové symboly}} \rangle$$

mějme interpretaci $I = (D_I, \alpha_I)$

$D_I = \{1, 3, 5, 15\}$

$\alpha_I(a) = 1$

$\alpha_I(E) = \emptyset$

$\alpha_I(M) = \{(1,1), (15,3), (15,5), (15,15)\}$

Platí, že $I \models \varphi$ ? ANO, tedy $I$ je modelem $\varphi$.

Platí, že $I \models \exists y\, E(y)$ ? NE, $I$ není modelem $\cancel{\exists y}\ \exists y\, E(y)$.

Má formule $\varphi: \exists x \, (P(x) \wedge \forall y \, (\neg (f(x,y) = f(y,x))))$ model?

1. $\exists x \, P(x) \Rightarrow$ doména je neprázdná
2. můžeme zvolit $x = y \Rightarrow \neg(f(x,x) = f(x,x)) \equiv \underline{FALSE}$

Formule nemá model

---

$\varphi': \exists x \, (P(x) \wedge \forall y \, (f(x,y) = f(y,x)))$

má model

I.

$D_I = \{1\}$

$\alpha_I(P) = \{1\}$

$\alpha_I(f) = \{((1,1),1)\}$

$\equiv (1,1) \mapsto 1$

I'

$D_I = \mathbb{N}$

$\alpha_I(P) = \{0\}$

$\alpha_I(f) = „+“$

<u>Teorie:</u> množina vět/axiomů (uzavřené formule)

- $M \models T$ : interpretace $M$ je modelem $T$ : $\forall \varphi \in T : M \models \varphi$
- $T \models \varphi$ : $\varphi$ je důsledkem $T$ : všechny modely $T$ jsou modely $\varphi$
- $T \vdash \varphi$ : $\varphi$ je dokazatelná z $T$

bezesporná teorie : neexistuje $\varphi$ : $T \vdash \varphi \wedge T \vdash \neg\varphi$

bezesporná teorie $\Leftrightarrow$ má model

úplná teorie : pro každou $\varphi$ : $T \vdash \varphi \vee T \vdash \neg\varphi$

<u>bezesporná $\wedge$ úplná teorie má jeden model</u>

Je teorie $T = \{ \forall x \forall y \ (f(x) = 0 \wedge f(y) = 0) \Rightarrow x = y,$
$\neg \exists (x) \ (f(x) \neq 0) \}$ bezesporná a úplná?

1) max. 1 prvek z D je pomocí f napojí na 0
2) všechny prvky z D se napojí na 0
3) konstanta 0 musí být v D

I:

$D_I = \{a\}$
$\alpha_I(f) = \{a \mapsto a\}$
$\alpha_I(0) = a$

Pouze jeden model

T je bezesporná a úplná

$T' = \{ \forall x \forall y\ (f(x)=0 \wedge f(y)=0) \Rightarrow x=y,\ \exists x.\ f(x) \neq 0 \}$

je $T'$ bezesporná a úplná?

Model $M_1$:

$D_{M_1} = \{a, b\}$

$\alpha_{M_1}(0) = a$

$\alpha_{M_1}(f) = \{a \mapsto a,\ b \mapsto b\}$

$\Downarrow$

teorie je bezesporná

Model $M_2$:

$D_{M_2} = \mathbb{N}$

$\alpha_{M_2}(0) = 0$

$\alpha_{M_2}(f) = \{ i \mapsto i \mid i \in \mathbb{N} \}$

více modelů

$\Rightarrow$ teorie není úplná

$\varphi = \exists x, y, z.\ (x \neq y \wedge y \neq z \wedge z \neq x)$

$M_1 \not\models \varphi$

$M_2 \models \varphi$

- Rozhodnutelní teorie T: jazyk $\{\varphi \mid T \models \varphi\}$ je rozhodnutelný TS

- efektivní teorie T:
  - o sekvenci formulí jsme schopni TS rozhodnout, že jde o důkaz
  - potřebuji TS t. ž. rozhodne $\varphi \in T$

efektivní a úplná ⇒ rozhodnutelná