KONKATENACE JAZYKŮ

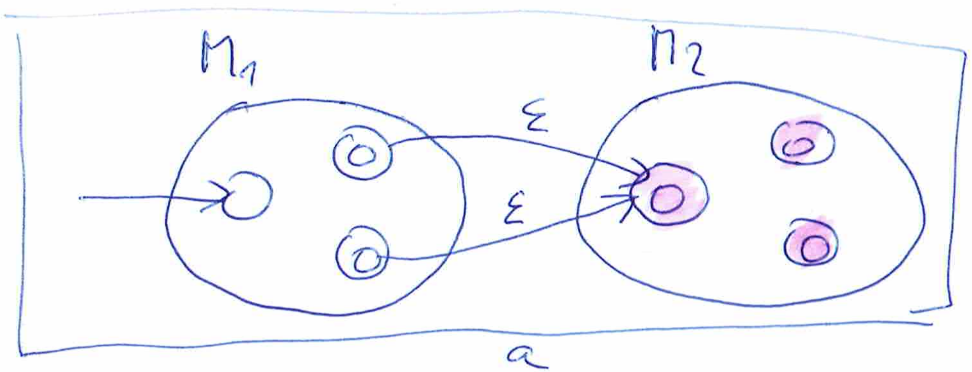
$$L_1 \cdot L_2 = \{ w_1 \cdot w_2 \mid w_1 \in L_1 \wedge w_2 \in L_2 \}$$

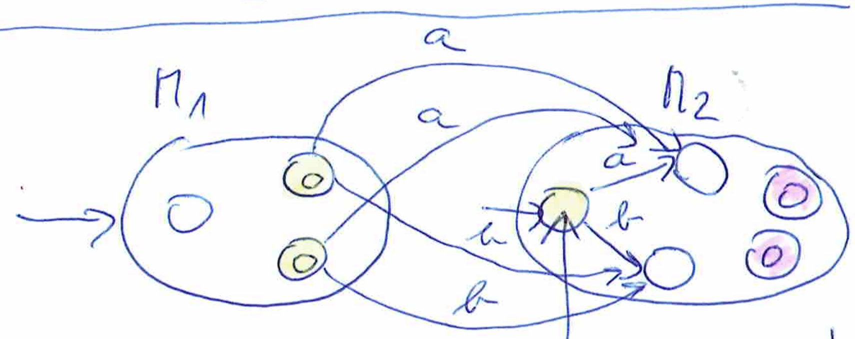
(1)

Navrhněte a formálně zapište algoritmus, pro konstrukci KA, který přijímá konkatenaci jazyků.

Vstup: KA $M_1 = (Q_1, \Sigma_1, \delta_1, q_0^1, F_1)$

$M_2 = (Q_2, \Sigma_2, \delta_2, q_0^2, F_2)$





Pokud byl koncový, tak koncové jsou i v M_1

Výstup KA $M_3 = (Q_1 \cup Q_2, \Sigma_1 \cup \Sigma_2, \delta, \underline{g_0^1}, F)$

$Q = Q_1 \cup Q_2$
$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$

$\delta : Q \times \Sigma \to 2^Q$ definovaná následovně:

$\forall g_1, g_2 \in Q \ \forall a \in \Sigma :$

$g_2 \in \delta(g_1, a) \Leftrightarrow$

$g_2 \in \delta_1(g_1, a) \ \vee$

$g_2 \in \delta_2(g_1, a) \ \vee$

$(g_1 \in F_1 \wedge g_2 \in \delta_2(g_0^2, a))$

$F = F_2 \cup R$, kde $R = \begin{cases} \emptyset & \text{pokud } g_0^2 \notin F_2 \\ \cancel{\{g_0^2\}} \ \text{~~pokud~~} & \\ F_1 & \text{pokud } g_0^2 \in F_2 \end{cases}$ $\leftarrow \underline{\varepsilon \in L(M_2)}$

Pumping lemma pro R. J.

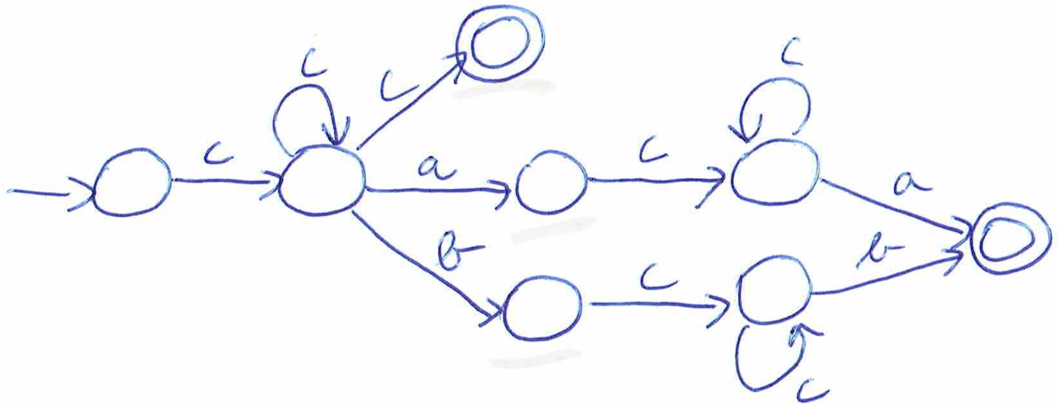
$$\forall L \subseteq \Sigma^* : L \in \mathcal{L}_3 \Rightarrow \Big[\exists k > 0\ \underline{\forall} w \in L : \underline{|w| \geq k} \Rightarrow \exists \cancel{\ } xyz : \\ xyz = w \wedge |y| > 0 \wedge \underline{|xy| \leq k} \wedge \forall i \geq 0 : xy^i z \in L \Big]$$

Uvažujme abecedu $\Sigma = \{a, b, c\}$. Rozhodněte a dokažte, že následující jazyky jsou/nejsou regulární.

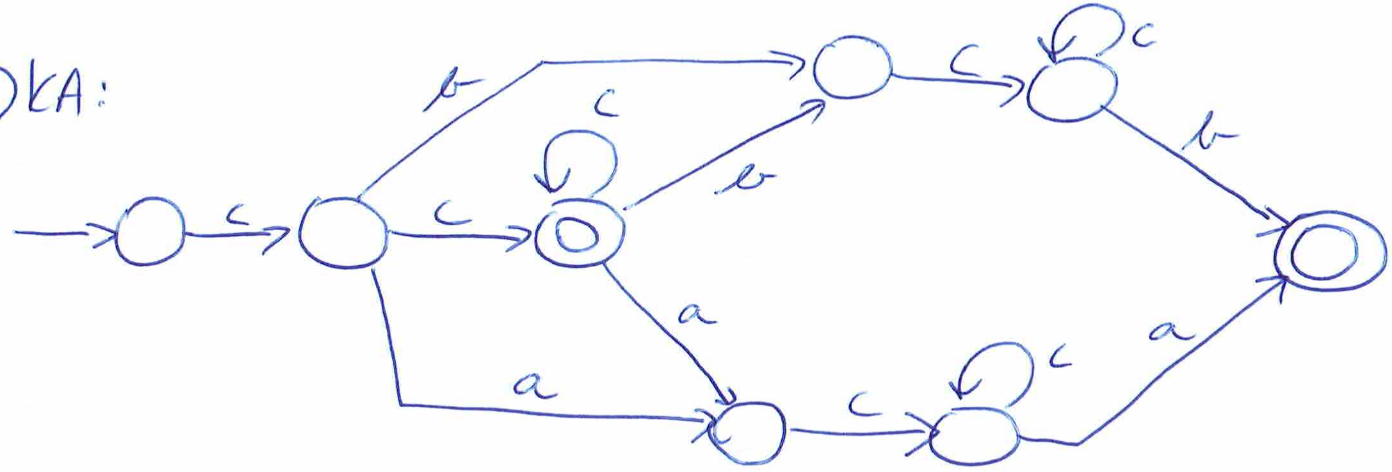
a) $L_1 = \{ c^+ w c^+ w \mid w \in \{a,b\}^* \wedge |w| < 2 \}$

b) $L_2 = \{ c^+ w c^+ w \mid w \in \{a,b\}^* \wedge |w| > 2 \}$

$\underline{L_1}$ je regulární protože můžeme sestavit NKA.



DKA:



UKAŽTE, ŽE PRO L_1 platí pumping lemma.

pro $k=\underline{4}$: $\underline{w} = \underline{caca} \in L$

$\underline{w}$ nelze rozdělit tak, aby $xy^0z \in L$

pro $k=5$

- $w = \underline{c}cX \rightsquigarrow x=\varepsilon \quad y=c \quad z=cX$
- $w = ca\underline{c}cX \rightsquigarrow x=ca \quad y=c \quad z=cX$
- $w = cbccX \rightsquigarrow x=cb \quad y=c \quad z=cX$

$X = c^* \cdot (\varepsilon + \underline{w}c^+\underline{w})$

$X = c^*a$

$X = c^*b$

Pro L_2 ukážeme, že neplatí pravá strana P.L. (6)

- předpokládejme, že L_2 je regulární
- potom existuje konstanta $\underline{k}$ z P.L.
- zvolme slovo $w = f(k) = ca^k ca^k \in L$ $\quad |w| = 2k+2 \geq k$
- musí existovat rozdělení ($\to$ pojďme ho najít)

$$\underbrace{\overbrace{ca\ldots a}^{k}}_{\underline{xy}} ca^k \qquad |xy| \leq k \Rightarrow \underline{xy} = ca^{Q} \qquad Q \leq k-1$$

- $x = \varepsilon$, $y = ca^p$ $\; 0 \leq p \leq k-1$, $\; z = a^{k-p} ca^k$

  pro $i=0$ $\quad xy^0z \in L$

  $xy^0z = a^{k-p} ca^k \notin L$

- $x = ca^Q$, $y = a^p$, $z = a^{k-Q-p} ca^k$, kde $0 < p \leq k-1$, $0 \leq q \leq k-2$

  pro $i=0$ $\quad xy^0z = ca^Q a^{k-Q-p} ca^k = c\underline{a^{k-p}} c\underline{a^k} \notin L$

$\Rightarrow L_2$ není regulární

OPERACE "SCHUFFLE" NAD JAZYKY

$\| : \Sigma^* \times \Sigma^* \to 2^{\Sigma^*}$ definujeme:

$\forall w \in \Sigma^* : \quad \varepsilon \| w = w \| \varepsilon = \{w\}$

$\forall a, b \in \Sigma \ \forall w_1, w_2 \in \Sigma^* :$

$$a_1 w_1 \| a_2 w_2 = \{a_1\} \cdot (w_1 \| a_2 w_2) \cup \{a_2\} (a_1 w_1 \| w_2)$$

$ab \| cd = \{abcd, acbd, acdb, cdab, cadb, cabd\}$

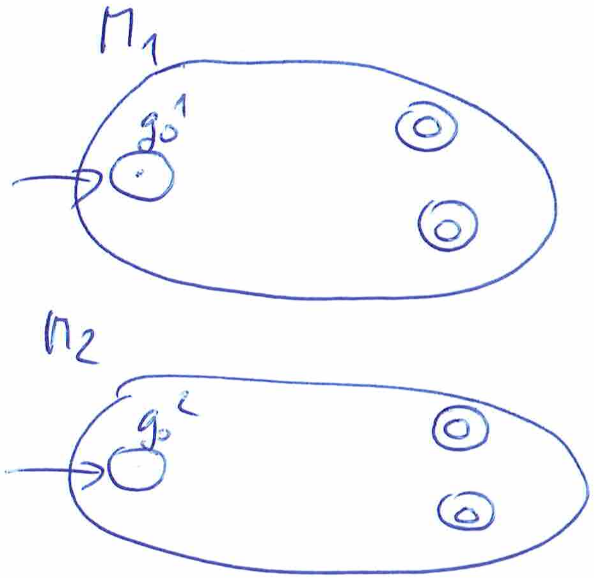
Rozšíření na jazyky:

$$\forall L_1, L_2 \subseteq \Sigma^* : \quad L_1 \| L_2 = \bigcup_{\substack{w_1 \in L_1 \\ w_2 \in L_2}} w_1 \| w_2$$

8

Sestavte a formálně zapište algoritmus, který pro KA M_1 a M_2 sestaví KA M_3 t. ž. $L(M_3) = L(M_1) \,||\, L(M_2)$

IDEA



$q_0 = (\underline{q_0^1}, q_0^2)$

VSTUP: $M_1 = (Q_1, \Sigma_1, \delta_1, q_0^1, F_1)$

$M_2 = (Q_2, \Sigma_2, \delta_2, q_0^2, F_2)$

VÝSTUP: $M_3 = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

$$Q = Q_1 \times Q_2$$

$$\Sigma = \Sigma_1 \cup \Sigma_2$$

$$q_0 = (q_0^1, q_0^2)$$

$$F = F_1 \times F_2$$

δ:

$$\forall \underline{(q_1, s_1)} \in Q \quad \forall \underline{(q_2, s_2)} \in Q \quad \forall a \in \Sigma$$

$$\delta((q_1, s_1), a) \ni (q_2, s_2) \overset{def}{\iff}$$

$$\delta_1(q_1, a) \ni q_2 \wedge s_1 = s_2 \quad \vee$$

$$\delta_2(s_1, a) \ni s_2 \wedge q_1 = q_2$$

9B

Dokažte, že $\nexists$ úplný DKA s 3 stavy pro jazyk

$L = \{ w \in \{a,b,c\}^* \mid w$ obsahuje podřetězec "abc" $\}$

pomocí M-N věty.

Ukážeme, že existují $\underline{4}$ slova, která jsou rozlišitelná $\sim_L$

– uvažujme slova $\varepsilon, a, ab, \underline{abc}$

ukážeme, že $\varepsilon \nsim_L a, \varepsilon \nsim_L ab, \varepsilon \nsim_L abc, \dots$

- $abc \in L \Rightarrow abc \nsim_L \varepsilon, abc \nsim_L a, abc \nsim_L ab$

  protože $\varepsilon, a, ab \notin L$

- $w_1 = \underline{ab}$ a $w_2 \in \{\varepsilon, a\}$

  $w_1 \sim_L w_2 \Rightarrow \underline{\forall} w_3 \in \{a,b,c\}^* : w_1 \underline{w_3} \in L \Leftrightarrow w_2 \underline{w_3} \in L$

  musí platit i pro $w_3 = c$

  $w_1 w_3 = abc \in L$ ale $w_2 w_3 \notin L$

  ZÁVĚR: $w_1 \nsim_L w_2$ tedy $ab \nsim_L \varepsilon \wedge ab \nsim_L a$

- $w_1 = \varepsilon$ $w_2 = a$

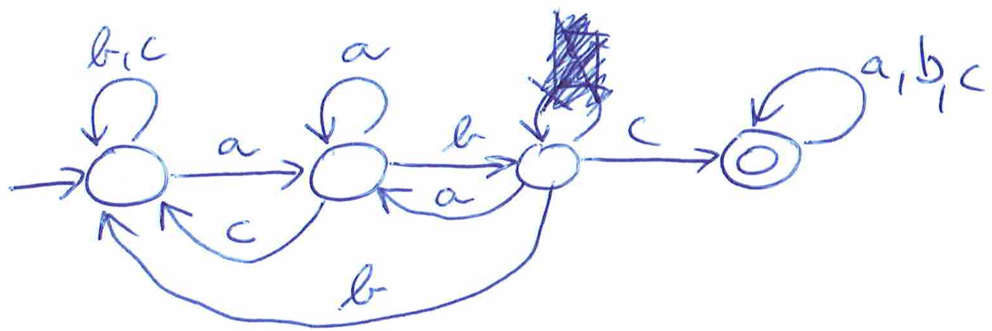
$w_1 \cdot bc \notin L$, zatímco $w_2 \cdot bc \in L$

$w_1 \cdot bc$ = „bc" $w_2 \cdot bc$ = „abc"

$\varepsilon \not\sim_L a$

Celkově víme, že $\sim_L$ má alespoň 4 třídy $\Rightarrow$ nemůže existovat automat s 3 stavy

---



INDEX $\sim_L$ BUDE 4

11

Rozhodněte, zda platí následující tvrzení:

$\forall \Sigma$ konečná abeceda $\forall L_1, L_2 \subseteq \Sigma^* : L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2$

– najdu protipříklad

$\Sigma = \{a\}$ $L_1 = L_2 = \{a\}$

$L_1 \cdot L_2 = \{aa\}$ a $\{a\} \nsubseteq \{aa\}$

TVRZENÍ NEPLATÍ

$\forall \Sigma$ konečnou abecedu $\forall L_1, L_2 \subseteq \Sigma^* : L_1 = \emptyset \vee \varepsilon \in L_2 \Leftrightarrow L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2$

„$\Rightarrow$"

- $\underline{L_1 = \emptyset} \Rightarrow L_1 \cdot L_2 = \emptyset \Rightarrow L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2$
- $\varepsilon \in L_2 \Rightarrow \forall w.\ w \in L_1 : w \cdot \varepsilon \in \underline{L_1 \cdot L_2} \Rightarrow \cancel{w \cdot \varepsilon \in L_1}\ w \in L_1 \cdot L_2$

"$\Leftarrow$"

Důkaz sporem. Předpokládejme, že platí negace

$$\neg(L_1 = \emptyset \vee \varepsilon \in L_2 \Leftarrow L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2)$$

$$\neg(L_1 = \emptyset \vee \varepsilon \in L_2) \wedge L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2$$

$$\boxed{L_1 \neq \emptyset} \wedge \varepsilon \notin L_2 \wedge \underline{L_1 \subseteq L_1 \cdot L_2}$$

Uvažujme libovolné Σ, L_1, L_2 splňující výše uvedené.

- uvažujme w nejkratší slovo z L_1. To musí existovat, protože $L_1 \neq \emptyset$

  $|w| = k$

- musí existovat $\underline{w_1 \cdot w_2} = w$ t. ž. $w_1 \in L_1 \wedge w_2 \in L_2$
- protože $\varepsilon \notin L_2$ tak $\underline{|w_2| \geq 1}$ tedy $|w_1| < |w|$

jsme ve sporu s podmínkou, že w je nejkratší slovo z L_1