Důkaz ekvivalence kontextových a nezkracujících gramatik

Kontextová gramatika (typu 1) *je taková gramatika* $G = (N, \sigma, P, S)$ *typu 0, že každé pravidlo z* P *je ve formě*

$$\alpha A \beta \rightarrow \alpha \gamma \beta,$$

kde $A \in N, \alpha, \beta, \gamma \in (N \cup \sigma)^*, \gamma \neq \epsilon$. *Navíc může* P *obsahovat pravidlo* $S \rightarrow \epsilon$ *za předpokladu, že se* S *nevyskytuje na pravé straně žádného pravidla z* P.

Nezkracující (monotónní) gramatika *je taková gramatika* $G = (N, \sigma, P, S)$ *typu 0, že pro každé pravidlo* $(u \rightarrow v) \in P$, *platí*

$$|u| \leq |v|.$$

Navíc může P *obsahovat pravidlo* $S \rightarrow \epsilon$ *za předpokladu, že se* S *nevyskytuje na pravé straně žádného pravidla z* P.

Následující teorém ukazuje, že kontextové a nezkracující gramatiky mají stejnou vyjadřovací sílu:

Teorém

Nechť L je jazyk. Následující tvrzení jsou ekvivalentní:

(i) existuje kontextová gramatika G taková, že $L = L(G)$

(ii) existuje nezkracující gramatika G' taková, že $L = L(G')$.

Důkaz

$(i) \Rightarrow (ii)$ Je zřejmé, že každá kontextová gramatika je zároveň nezkracující.

$(ii) \Rightarrow (i)$ Nechť $G' = (N', \sigma, P', S')$ je nezkracující gramatika. Beze ztráty obecnosti můžeme předpokládat, že všechny pravidla z P obsahující terminály jsou v podobě

$$X \rightarrow a, \; X \in N, \; a \in \sigma.$$

Mějme tedy pravidlo z P':

(1) $X_1 X_2 ... X_m \quad \rightarrow \quad Y_1 Y_2 ... Y_n, 2 \leq m \leq n,$

kde $X_i, Y_j \in N, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$. Pravidlo zároveň splňuje podmínky nezkracující gramatiky.

Pravidlo (1) je postupně nahrazováno následujícími pravidly:

$$
(2) \qquad
\begin{array}{rcl}
X_1X_2...X_m & \rightarrow & Z_1X_2...X_m \\
Z_1X_2...X_m & \rightarrow & Z_1Z_2X_3...X_m \\
 & \vdots & \\
Z_1Z_2...Z_{m-1}X_m & \rightarrow & Z_1...Z_mY_{m+1}...Y_n \\
Z_1...Z_mY_{m+1}...Y_n & \rightarrow & Y_1Z_2...Z_mY_{m+1}...Y_n \\
 & \vdots & \\
Y_1...Y_{m-1}Z_mY_{m+1}...Y_n & \rightarrow & Y_1...Y_mY_{m+1}...Y_n,
\end{array}
$$

kde $Z_k, 1 \leq k \leq m$, jsou nové nonterminály.

Všimněte si, že pravidla ve formě (2) jsou kontextová. Pravidla typu (1) mohou být tedy simulována pomocí soustavy pravidel (2) a naopak.

Proto je nová gramatika ekvivalentní s G'. Opakováním celého procesu pro všechna pravidla získáme kontextovou gramatiku G ekvivalentní s G'.

Příklad

Mějme tedy nezkracující gramatiku $G = (N, \sigma, P, S)$, která obsahuje pravidlo $aB \rightarrow dEF$, kde $a, d \in \sigma$ a $B, E, F \in N$. Naším úkolem je nyní zaměnit toto pravidlo za pravidla takového tvaru, aby platila podmínka pro kontextové jazyky – tedy do tvaru $\alpha A \beta \rightarrow \alpha \gamma \beta$ (viz. výše).

Nejprve (beze ztráty obecnosti) zaměníme toto pravidlo za tři nová:

$$
\begin{array}{lrcl}
(3) & A & \rightarrow & a \\
(4) & D & \rightarrow & d \\
(5) & AB & \rightarrow & DEF,
\end{array}
\quad \text{kde } A, D \text{ jsou nové nonterminály.}
$$

Všimněte si, že (3) a (4) již splňují podmínku.

Na (5) nyní aplikujeme postup uvedený v důkazu. Pro přehlednost uvádím pravidla také se značením používaným v důkazu, aby byly lépe znát jednotlivé kroky. Svislice ukazují hranice mezi α, A, β (popř. α, γ, β)

Pravidlo $AB \rightarrow DEF$ nyní odpovídá tvaru $X_1X_2 \rightarrow Y_1Y_2Y_3$

$$
\begin{array}{rcl|rcl}
AB & \rightarrow & Z_1B & |X_1|X_2 & \rightarrow & |Z_1|X_2 \\
Z_1B & \rightarrow & Z_1Z_2F & Z_1|X_2| & \rightarrow & Z_1|Z_2Y_3| \\
Z_1Z_2F & \rightarrow & DZ2F & |Z_1|Z_2Y_3 & \rightarrow & |Y_1|Z_2Y_3 \\
DZ_2F & \rightarrow & DEF & Y_1|Z_2|Y_3 & \rightarrow & Y_1|Y_2|Y_3
\end{array}
$$

Jak je vidět, každé pravidlo z této soustavy splňuje podmínku pro kontextové jazyky. Zároveň je takto možné upravit všechna nezkracující pravidla.

Použité zdroje

G.Rozenberg, A. Salomaa (Eds.). *Handbook of Formal Languages*, Springer, 1997. ISBN 3-540-60420-0

Překlad z angličtiny a zpracování příkladu provedl Bc. Jan Pokorný